MEMORIE

DELL'I. R. ISTITUTO VENETO

DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI.

MEMORIE

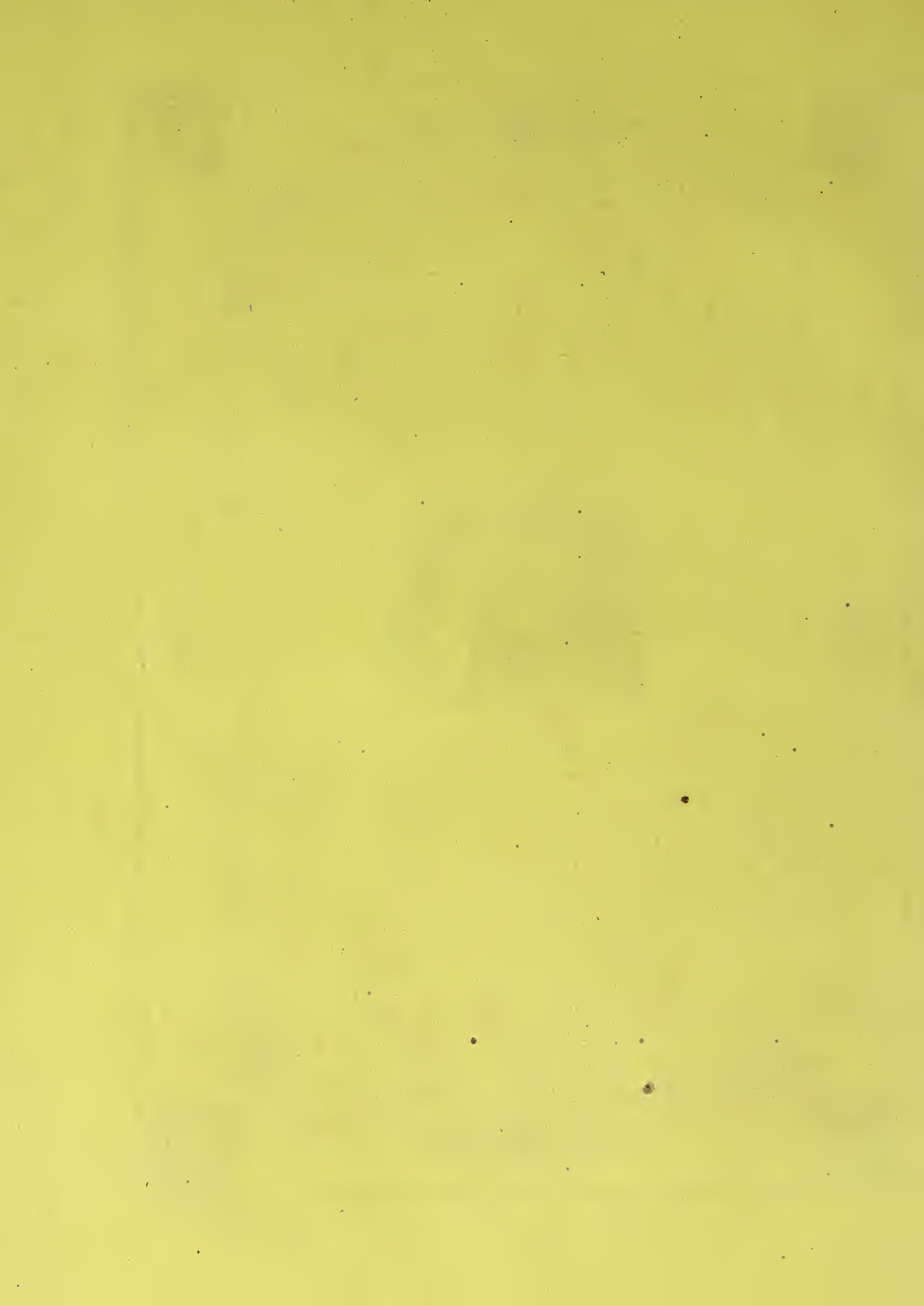
DELL' I. R. ISTITUTO VENETO

DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI

VOLUME SESTO

VENEZIA
PRESSO LA SEGRETERIA DELL' I. R. ISTITUTO
NEL PALAZZO DUCALE
1856./57

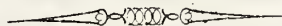
AVVERTIMENTO

In esecuzione dell' articolo 134 degli statuti interni si dichiara che ogni autore è particolarmente responsabile delle opinioni e dei fatti esposti ne' proprii scritti.

OSSERVAZIONI CHIMICO-GEOLOGICHE

SUL POTERE AGGREGATORE DEL FERRO

E SULLA FORMAZIONE DEL COSÌ DETTO **CARANTO** NELL' ADRIATICO BACINO

DEL

DOTT. GIOVANNI DOMENICO NARDO

INTRODUZIONE.

Il letto del mare Adriatico sta in rapporto geologico colle catene dei monti che ne circonscrivono l' intiero bacino, ma le gibbosità, gli avvallamenti ed i piani subacquei influiti furono e lo sono attualmente dal concorso dei fiumi e dei torrenti, i quali promovendo trasporti e sedimenti di differente natura, ne modificarono e ne modificano, a seconda anche delle varie correnti marine, l' antica superficie, dando formazione a quelle estensioni di suolo sovrapposto alle roccie antiche, che si legano coi monti del continente.

Tali estensioni di terreno in parte si osservano asciutte, più o meno al di sopra del livello del mare, come il suolo montano, le pianure, il terreno coltivabile, e la spiaggia, ed in parte trovansi più o meno al dissotto di esso livello, e costituiscono le lagune ed il fondo del mare.

Quelle al dissopra del livello del mare, che mostransi sempre maggiori dal lato del bacino, dove fiumi o torrenti confluiscono in maggior numero, sono composte da *strati* di terriccio, argilla, marna, sabbia, ciottoli, od altri sedimenti di vario genere, diversamente distribuiti e sovrapposti a seconda delle tante cause che successivamente possono aver avuta parte nell' alterare la loro posizione primitiva. Quelle sottoposte alle acque del mare costituiscono varie sorta di fondi, i quali per tratti più o meno lunghi e con qualche regolarità di

disposizione presentansi arenosi, arenoso-argillosi, argillo-fangosi, calcarei, e calcarei misti di sabbia e di argilla, e di ammassi conchigliari o di altri corpi marini, e sono di maggior o minor potenza, secondo le situazioni e le distanze dai litorali, ed il numero e potere delle cause influenti alla loro formazione, che, come dicemmo, sono la confluenza de' fiumi e de' torrenti, le correnti sottomarine, ecc.

Non è però che le differenze dei fondi accennati stieno solo nel vario genere delle sostanze che li compongono, poichè osservansi altresì variazioni di coesione nei varj materiali di cui sono formati, e certe croste od ammassi di svariata estensione, che a prima vista si manifestano per un agglomeramento dei materiali medesimi, fattosi più o meno rapidamente in seguito al loro trasporto e sedimento in un punto determinato.

In così fatti agglomeramenti di differente natura, consiste quella roccia di origine contemporanea, detta *Caranto* volgarmente, la quale riscontrasi, oltrechè sotterra nelle venete campagne, in quasi tutti i punti dell' adriatico bacino, a maggiore o minore profondità, scoperta e direttamente bagnata dall' acqua, ovvero coperta da materiali simili o dissimili da quelli che la compongono.

La voce *Caranto*, di cui non trovasi analogo nel glossario barbaro, viene molto a proposito derivata dal prof. Catullo dal verbo εσχαρεω *crustam obduco*, il cui participio è εσχαρόων-δοντος. Il Patriarchi ed il Boerio, nei loro Dizionarii del dialetto veneziano, lo definiscono generalmente come un tufo arenoso. Il Filiasi dice, chiamarsi Caranto quegli strati di creta, solida talvolta quanto il macigno, che trovasi scavando ad 8 a 12 piedi di profondità nelle lagune, dopo il fango e la sabbia, e che sono i sostegni delle palafitte su cui s' innalzano i veneti palazzi. Nell' opuscolo del medesimo autore, intitolato *Osservazioni sopra l' alzamento del flusso marittimo nelle lagune venete*, Treviso 1826, p. 31, parlando del fondo della laguna, così si legge: « Credo che debbasi avvertire » rispetto alla laguna, che il suo fondo, secondo le diverse situazioni, dove lu» teo e fangoso ritrovasi, e dove molle; dove argilloso e cretoso, sabbioso *ca*» *rantoso* e questo durissimo. Chiamasi qui con tal nome una specie di argilla » talmente compatta che si pena a romperla col piccone. Credo sia la stessa » che anche dentro alle montagne si trova, e che col tempo ivi, secondo il Broc» chi, marmorea diventa. Questi strati diversi variano pure sommamente nella » posizione, estensione, grossezza ed altezza, e finanche nella rispettiva superpo» sizione. » — Sembra però non aver avuto il Filiasi su tal roccia e sulle sue

differenze di formazione e natura idee molto precise, quando dà ad essa il nome di creta.

Il dott. Agostino Fapanni, in una sua Memoria *sulla coltivazione dei territorii di Mestre e di Noale* inserita nel Giornale di Agricoltura di Filippo Re, tenendo discorso sulle terre Carantine di quelle contrade, dice, che tali terre sono le più infelici che sianvi, perchè aventi ad una assai tenue profondità degli strati di una materia dura e petrina, chiamata Caranto, traforata qua e là, di color giallognolo, che, fatta in pezzi, offre la forma di ciottoli. Inclina egli a credere tale sostanza il *Tophus Scaber* di Virgilio, locchè sembrami molto probabile.

Lodovico Pasini, in una sua Memoria, *sulla ghiaja ed alcune pudinghe del Vicentino*, pubblicata l'anno 1828 nel Giornale di Padova, accenna aver anch' esso sulle spiaggie del mare Adriatico veduto un esempio di rocce che si formano attualmente. Raccolsi, egli scrive, una pietra arenaria zeppa di conchiglie marine allo stato naturale, che si forma qua e là in alcuni punti, e che l'impeto dell' onde distrugge con molta facilità ; la quale non è che un agglutinamento di arene successo in un sito tranquillo e costituisce uno strato molto sottile. Una tal pietra, come ben può vedersi, è ancor essa una specie di Caranto.

Identica al Caranto dei Veneti è la crosta, di cui fa menzione Donati (1750, *Stor. nat. adr. p.* XI), da lui osservata in quella parte di mare che lambisce l'Istria, le isole di Quarnero, la Dalmazia, ecc. attribuendo ad essa ognor crescente l' innalzamento dell' adriatico fondo. Di una tal crosta parla pure il Grisellini (1780, *Lettere odeporiche, p.* 21) seguendo l' opinione del Donati. Il Brocchi (1814, *Conch. fossile subap.)*, dimostrar volendo che alcuni fossili hanno un' origine marina, cita ad esempio le concrezioni dei fondi dell' Adriatico osservate dal Donati, ossia il Caranto. È meraviglia come non si trattenga su di tali concrezioni anche l'Olivi, alle cui diligenti indagini non devono pure esser sfuggite, quando si fece a studiare la storia fisica del mare Adriatico.

Analogo al Caranto sotto più aspetti può considerarsi il *ferretto* dei Lombardi, accennato dal Breislak (1822) nella sua *Descrizione geologica della Provincia di Milano.*

Il prof. Catullo (1838) nella sua *Geognosia delle Venete provincie,* dedicò un apposito articolo al Caranto nostrale, fluviatile e marino, facendo conoscere una tal roccia molto meglio degli altri autori; non esaurì però tutto quanto riguarda la storia di essa, e specialmente la sua genesi.

Parendomi, dalle indagini praticate in differenti situazioni dell' adriatico

bacino, poter meglio chiarire con nuovi fatti quanto finora da altri fu scritto, e dimostrare con maggior precisione l'origine, la natura, e le differenze della roccia in discorso, tenterò esporre quanto potei raccogliere sull' argomento e dedurre da osservazioni le più accurate.

Per maggior chiarezza di dire, dividerò il mio discorso ne' seguenti capitoli:

Cap. 1.° Origine del Caranto.
» 2.° Terreni a cui appartiene il Caranto, suo modo di trovarsi nella terra, e varie specie di esso.
» 3.° Riassunto, conclusione ed applicazioni.

Capitolo I.

Origine del Caranto.

Gli autori venuti a mia cognizione, i quali parlarono del *Caranto* e del *ferretto* dei Lombardi, che, come dissi, sembrano roccie analoghe, convien dire non siensi accorti del vero modo di loro formazione. Essi conobbero bensì essere il Caranto una roccia che può giornalmente prodursi per la trasformazione dell' arena, della ghiaja, ecc., in aggregati solidi; ma per ispiegare tale fenomeno ricorsero alla teoria di un cemento aggregatore, la quale non è applicabile nel caso nostro, perchè non ispiega l' origine, la natura ed il modo di agire di tale principio cementatore in punti determinati di terreno, e non determina le condizioni necessarie perchè ne risultino gli aggregati in discorso. Infatti Breislak (*Descrizione Geologica del Milanese*, p. 33), parlando del ferretto, si limita a dire che accade talvolta che in alcuni luoghi si trovi la sabbia agglutinata da un' argilla carica di ferro, ma che diventa tenero e friabile esposto all' aria, al sole ed all' acqua piovana. Il Bouè, parlando nella sua *Guida del Geologo viaggiatore,* dei depositi marini, dice bensì che in certi punti delle coste la sabbia e la ghiaja si agglutinano, tanto mediante un cemento calcareo, come per delle infiltrazioni ferruginose, talchè producονsi in tal modo gres e pundighe, talvolta conchigliari, come nelle lagune dell' Adriatico ed altrove; ma quando trattasi di spiegare il fenomeno si limita a pensare che delle sorgenti minerali e la temperatura dell' acqua debbano contribuire a tale formazione.

Anche il Lyell, discorrendo nei suoi *Principii di Geologia,* della fossilizza-

zione delle conchiglie a considerevoli profondità, e confrontando il letto dell' Adriatico con quello dei mari britannici, scrive che la ragione per cui non trovansi in questi ultimi agglomeramenti solidi di origine recente come nel primo, è dovuta alla mancanza nelle isole Britanniche di quelle sorgenti calcaree e minerali che tanto abbondano nel Mediterraneo e nelle terre vicine. (*Principes de Géologie par Ch. Lyell, P. II. Paris* 1845, p. 509, 512.)

Il prof. Catullo, che fu il primo a parlarne distesamente, definisce il Caranto una specie di conglomerati composti di grani di sabbia, uniti insieme da un cemento argillo-ferruginoso, i quali non hanno mai che una lieve adesione colla roccia molle che li circonda; scrive, esser seguita la genesi di esso mediante le acque di cui sono imbevute le argille palustri a cui ordinariamente è sottoposto, in contatto colle sabbie, le quali infiltrandosi attraverso le medesime, si impadronirono dei materiali del cemento e li portarono sopra le sabbie, formando così l' impasto grossolano detto *Caranto,* il quale contiene sovente oggetti lavorati dall'uomo, come chiodi ed altri strumenti di ferro. In altro luogo (pag. 96), parlando dei cumuli sabbiosi del veneto estuario, in cui trovansi sparsi depositi di Caranto, facendone confronto col Caranto fluviale, indica le due roccie essersi generate sotto l' influenza di una medesima causa, cioè mediante il glutine pietroso portatovi sopra dall' acqua piovana che s' infiltra a traverso la massa incoerente de' cumuli sabbiosi terrestri. Discorrendo finalmente del Caranto sottomarino, così si esprime: « Quanto poi al mezzo che serve ad
» unire insieme i materiali del Caranto e che forma con essi una pietra di
» aspetto arenaceo, possiamo dire che delle parti più leggere e più fine, che l'ac-
» qua separa in progresso, sieno quelle che legando fra loro i grani, facciano le
» veci di cemento. Di fatti, il glutine, di cui sono impastati gli elementi del Ca-
» ranto, sembra esser composto di un' argilla calcarifera, più o meno ferrugi-
» nosa, la quale resa pingue dalle sostanze organiche decomposte, costituisce
» eziandio quella materia puzzolenta e limacciosa che rinviensi nei rivi di Vene-
» zia, e che Olivi distingue col nome di fango marino. »

Volli esporre quanto scrissero i chiari autori suaccennati sulla genesi del Caranto, non per diminuire il loro merito, nè per confutarli, ma solo per mostrare non esser essi pervenuti ad osservare alcuni fatti importantissimi che io ebbi motivo di considerare ripetutamente, sull' appoggio de' quali parmi ora poter dedurre più positive conclusioni sulla genesi della roccia in discorso.

Esaminando attentamente varie specie di Caranto fluviale e marino, tratto

dalle venete campagne, dal fondo delle lagune e dal mare in punti diversi, ebbi ad accorgermi non senza sorpresa, che nei Caranti di attuale formazione, il principio cementatore partivasi sempre da un nucleo, dal quale diffondevasi gradatamente accrescendo l' ammasso, e che un tal nucleo era un pezzo di ferro, un chiodo od altro lavoro di questo metallo, il quale passava per gradi allo stato d' idrato ferrico. Credeva anch' io da principio, come mostrò di credere il prof. Catullo, che in tali aggregati la presenza di chiodi o di altro arnese di ferro, fosse puramente avventizia, ma dovetti convincermi esser stata invece la vera causa di essi. Oltre ai tanti fatti cadutimi sottocchio di pezzi di ferro rimasti lungamente nel profondo del mare, i quali si estrassero rivestiti di una pudinga od altro aggregato di natura relativa ai materiali costituenti il fondo su cui poggiavano, potrei citarne non pochi che si presentarono all' altrui osservazione.

Il sig. dott. Paoli di Pesaro, nella prima edizione della sua opera *Sul moto molecolare de' solidi* (pag. 165), scrive, che « nel giugno 1823 fu » pescata nel mare Adriatico una piccola àncora, la quale era interamente rico- » perta da una pudinga e da alcune poche conchiglie del genere *Ostrea*, e che » la forza con che gli elementi della pudinga stessa aderivano fra loro era tale, » che tentandosi da chi ne venne primieramente in possesso di ritrarre il ferro, » si giunse con fatica a forti colpi di martello a separare alcuni de' ciottoli, e » scuoprire in un punto l' àncora cui essi erano aderenti. » La pudinga in discorso è forza convenire altro non essere che una formazione di Caranto promossa dal ferro costituente l' àncora in attualità d' idrossidazione. L' estrazione dal mare di àncore circondate da involucro carantoso, più o meno denso od esteso, è frequente avvenimento fra noi, e non ha guari venne pescata nel fondo del mare della Manica la famosa àncora del peso di libb. 3000, che si vuole perduta dagli Inglesi nell'assedio di Havre, nel 1545. Essa, oltrechè tutta corrosa dalla ruggine, mostrasi circondata da un involucro di sabbia e di conchiglie molto denso formatosi nel modo anzidetto. Cito un tal fatto, di cui fecero anche cenno le nostre Gazzette, perchè osservato in un mare diverso dal nostro.

Leggesi pure nel *Journ. des Mines*, T. IX, N.° 57, essersi estratti dal mare stesso un temperino a due lame con manico di corno, coperto di una pudinga e di un ammasso di sabbia quarzosa conglutinata da un cemento ferruginoso, nonchè un pezzo di anello di ferro intonacato della stessa sostanza, e molti impronti di palle da cannone, di vario calibro, in forma di calotte più o meno grosse. Duhamel il figlio, possessore di tali oggetti, regalatigli dalla Municipalità

di Cherbury, mostrasi anch' egli di parere, doversi al ferro ossidato la formazione di tal impasto; non dà però spiegazione del fenomeno. Il grosso chiodo inviluppato di Caranto, esistente nel Museo di Padova, non è altrimenti, come pensa il chiar. Prof. Catullo, accidentale in quell' ammasso carantoso, ma fu egli medesimo, col suo ossidarsi, che promosse nel fondo del mare l' agglomerato, di cui si vede vestito. Anche gli altri chiodi ostensibili nell'I. R. Gabinetto di Padova, tratti dal caranto che si trova nelle argille euganee, già convertiti in ferro idrossidato, devono considerarsi come accidentali fattori delle roccie da cui si estrassero.

Un fatto molto cospicuo, e d' incontrovertibile appoggio al mio assunto, è quello osservato l' anno 1823, nell' occasione dello sgombro dal canale di Malamocco, dei materiali di un bastimento naufragato nove anni addietro sul banco della Rocchetta, nell' interno di quel porto. Questi materiali consistenti in ferro, legno e zavorra penetrati dalla sabbia e dall'acqua, si trovarono ridotti, mediante l' idrossidazione del ferro, in ammassi così solidi ferruginoso-sabbiosi, da dar persino scintilla coll'acciarino. Vedesi in taluno di tali ammassi l' impressione del legno, al cui contatto trovavasi la sabbia cementandosi, nonchè l' arnese di ferro che idrossidandosi ne promosse l' aggregazione. La conoscenza di un tal fatto, ed il possesso di alcuni saggi di tal genere, che vi metto sotto occhio, per me devonsi alla cortesia del nostro collega ingegnere Casoni. Pescando nel fondo dell'Adriatico, e talora anche nell' interno de' nostri canali si estraggono, dalle acque certi arnioni di varia grossezza, talora digitati, di forma irregolare, di color plumbeo, rappresentanti una pietra di grana fina, argillo-ferruginosa, a cui non di rado aderiscono corpi marini, talvolta bucherati da animali perforatori, i quali crederebbonsi rimasugli ruotolati prodotti dal disfacimento di pietre maggiori; rompendo però tali pietre, rinviensi nel loro centro od un chiodo od altro pezzo di ferro idrossidato, ovvero, se riuscì completa l' idrossidazione, presentansi vuoti, ed il vuoto mostra la forma del chiodo che l' occupava.

Lasciando delle limature di ferro commiste a sabbia od a ghiaja e mantenendovi costante acquosa umettazione, non tardasi ad ottenere agglomeramenti della stessa natura del caranto.

Ella è d'altronde cosa notoria, che gli ossidi di ferro bruni si condensano colle terre stemperati nell' acqua, e che un tale miscuglio prende molta durezza col tempo. Si osservò pure da molti anni, benchè non siasi data spiegazione del fenomeno, che i cementi in cui entra dell' ossido di ferro sono ben più solidi e

durevoli di quelli in cui non si trova. Per tal cagione così bene riescono le pozzolane nelle costruzioni sott' acqua; in tal caso il ferro che contengono passa allo stato d' idrato ferrico, ed acquista il potere cementatore. In generale poi si osserva, che il mezzo più forte adoperato dalla natura per unire insieme i ciottoli e le ghiaje che costituiscono i conglomerati posdiluviani, è il ferro idrossidato (1).

Ora applicar volendo tali fatti alla formazione degli ammassi di Caranto che rinvengonsi in varii punti dell' adriatico bacino, è facile riconoscerne l' origine nell' accidentale esistenza, in uno o più luoghi d' un terreno, di pezzi di ferro o di altre sostanze ferruginose, dall'acqua decomponibili, poste in circostanze tali da poter convertirsi in idrato ferrico, e cessar quindi il bisogno di ricorrere alla vaga teoria di altri mezzi cementatori, che d' altra parte si presta meno facilmente alla spiegazione di altri fenomeni geologici. Ammesso in fatti l'esposto principio, tornerebbe frustranea l' opinione di que' naturalisti i quali, spiegar non potendo l' esistenza degli ammassi carantosi fra le sabbie e le argille dei terreni dello Stato veneto, pensassero esser stati colà trascinati dalle correnti di mare prima che si formasse l' argilla, ovvero di chi volesse considerare il Caranto come prodotto di quelle chimiche azioni che cooperarono alla formazione del terreno lisiano.

Le circostanze necessarie perchè un pezzo di ferro possa in un terreno promuovere agglomeramenti sono la presenza di acqua e di materiali che diano ad essa facile passaggio, come le sabbie, le ghiaje, ed il frantume di corpi marini. Senza di ciò l' idrossidazione del ferro si fa molto lenta, o non è di tal grado da goder forza cementativa. Infatti, i pezzi di ferro sepolti in un terreno asciutto, il quale dà difficilmente passaggio all' acqua, s'idrossidano con lentezza e non mostrano quasi niun incrostamento, o sono questi incrostamenti assai sot-

(1) Estraggonsi talvolta dal fondo del mare àncore od altri arnesi di ferro, i quali, benchè rimasti lungo tempo sott' acqua, si mostrano soltanto più o meno idrossidati alla loro superficie ed incrostati appena in qualche parte dai materiali terrosi. Ciò può spiegarsi facilmente considerando che non in tutti i siti del mare v'ha quella quiete necessaria perchè si effettui l'aggregazione; che le correnti impediscono affatto l'accumulamento di materiali aggregabili, in causa della loro forza locomotrice; che se l' arnese di ferro cade in situazione ove il fondo sia calcare compatto, non possono colà aver luogo cementazioni per mancanza di materiali. Berzelius arreca un esempio di cannoni di ferro, nei quali, estratti dal mare dopo 50 anni, si trovò un terzo della loro grossezza convertito durante quel tempo in carburo, che esposto all' aria, dopo un quarto d' ora divenne tanto caldo ch' era impossibile toccarlo. Fenomeni analoghi si osservarono estraendo dal fango della laguna, le palle gettate all' epoca del bombardamento, benchè rimaste sepolte per un tratto di tempo ben minore.

tili, come si osserva sovente negli arnesi antichi di ferro, che si discoprono sotto le rovine e fra il terriccio vegetabile. Vedasi da ciò quanto le lagune ed il fondo del mare riescano propizii per una tale formazione, e come parimente esser lo debbono i letti de' fiumi e de' torrenti.

Dalle osservazioni istituite, onde meglio chiarire il processo dell' operazione aggregativa conseguente all' idrossidazione del ferro a contatto dei materiali costituenti qualche terreno, potei dedurre che posto un pezzo di questo metallo nell'acqua fra la sabbia e la ghiaja, forma esso un centro elettro-chimico (1), il quale promuove la decomposizione dell' acqua che trovasi al contatto delle particelle metalliche, sicchè avviene la loro conversione in idrato ferrico.

Le particelle poi di un tale prodotto, separandosi, vengono dalle correnti galvaniche portate attraverso gl' interstizj dei corpi circostanti, lungi dal sito in cui si formarono, e così succede l' idrossidazione delle parti sottoposte, le quali distaccandosi anch'esse successivamente, vengono, per opera delle medesime correnti e de' particolari processi elettro-chimici che ne conseguono, poste unitamente alle prime a contatto de' materiali ferrosi, riducendo la loro superficie a tale stato da compenetrarsi e da aderire le une alle altre, cementandosi, come in seguito farò meglio conoscere.

Essendo successivo un tale trasporto e continuato, ne avviene che il processo di aggregazione continua fino al totale esaurimento del ferro che serve di nucleo cementatore, la qual cosa si riconosce dal vuoto che rimane nel centro dell'aggregato il quale conserva la forma del nucleo stesso, sicchè l' aggregato medesimo va così crescendo gradatamente fino al cessare della causa promotrice il trasporto di particelle d' idrato ferrico sopra nuovi materiali circostanti.

La quantità dell' idrato ferrico trovasi quindi sempre maggiore nel centro in confronto della circonferenza dell' aggregato; ma quando il processo rimane compiuto e sia tale idrato intieramente esaurito, o soltanto tale quantità ne resti sparsa egualmente in tutta la roccia, da aversene appena piccole traccie, cessa l' aggregato medesimo di aggiungere a sè nuovi materiali (2).

(1) Scrive il *Becquerel* (*Ann. de ch. et de ph.* t. 54, p. 139), che quando un pezzo di ferro trovasi di già ricoperto in qualche parte di perossido idrato e sia esposto all' azione dell' aria e dell' acqua, la sua ossidazione progredisce più rapidamente, divenendo perciò il polo positivo di una piccola pila, l'azione della quale non cessa fino a tanto che il ferro non siasi converso in idrato di perossido, o in ossido magnetico a norma del più o meno pronto rinnovamento dell' aria. E quanto al modo pel quale si effettua questo mutamento nel ferro, egli opina che la decomposizione, o combinazione che dir si voglia, tostochè abbia avuto incominciamento alla superficie, penetri fino al centro del ferro, talchè havvi trasporto di ossigeno come nelle cementazioni ordinarie.

(2) La proprietà del ferro di venir trasportato, nel suo passaggio dallo stato metallico a quello d' idrato

Nel Caranto, giunto a tale stadio di aggregazione, riconoscesi appena aver esso avuto il ferro per principio cementatore, e molto bene resiste fuori dell' acqua, e può servir anche di materiale da fabbrica; che se al contrario le particelle d' idrato ferrico sieno in esso soprabbondanti, posto al contatto dell' aria perde la sua acqua, prende il giallo rugginoso, acquista sempre più ossigeno e soprattutto d' acido carbonico, e così ne avviene lo scioglimento della roccia, il quale si fa mano a mano che la nuova ossidazione si va operando. Perciò accadde, che la pudinga formatasi sull' àncora posseduta dal D.r Paoli di Pesaro, la quale appena estratta dal mare era tanto dura e consistente, si ebbe a fendere spontaneamente dopo alcuni mesi, al contatto dell' aria. Da ciò avviene, che il ferretto, di cui parla Breislak al §. 15 della sua Geologia milanese, tanto duro appena estratto che conviene romperlo con picconi di ferro, diventa tenero e friabile se si lascia esposto all' aria ed al sole. E così dicasi d' ogni altra specie di Caranto nostrale, che vediamo sciogliersi indubitatamente con maggiore o minore prontezza, qualora la cementazione non siasi completata, nei modi accennati, entro le viscere della terra o nel fondo dell' acqua. Se però i conglomerati di Caranto non perfezionati si lascino anche sciolti in frammenti, immersi nell' acqua, si cementano questi di nuovo ed uniti insieme costituiscono un aggregato simile al primo.

Quanto esposi relativamente al Caranto, può anche applicarsi ad alcuni gres e pudinghi a cemento ferruginoso, che credonsi di più antica formazione, i quali facilmente disgregansi al contatto dell'aria, e così pure ad alcuni marmi penetrati dal ferro, ma non ancora giunti ad una proporzionale combinazione di esso coi materiali terrosi che li compongono. Tali roccie si perfezionano lasciate immerse per lungo tempo nell' acqua, benchè staccate dal loro masso, e perdono in parte

ferrico, medianti le correnti promosse dalla presenza dell' acqua, attraverso i corpi solidi coi quali trovasi a contatto, notasi non solo nelle sostanze minerali terrose di vario genere, ma più facilmente nei corpi di origine animale e vegetabile, in causa del colore nerastro che ad essi comunica.

Le conchiglie, che si rinvengono in ammassi alluviali in molti siti del mare o della laguna, acquistano un color nerastro per tale cagione, e sono queste che trovansi in agglomerati di più o meno estesa dimensione.

E' minima però la quantità del ferro che ciascun guscio contiene, ed appena sensibile a' chimici reagenti, e diviene nulla affatto quando il guscio ritorna di colore biancastro.

Nelle sostanze vegetabili in tal modo mineralizzate, il ferro discopresi in quantità più sensibile. Se conficcasi un chiodo in un pezzo di quercia e s' immerga questo nell' acqua, vedesi, di mano in mano che nasce l' idrossidazione del ferro, venir trasportate le particelle di questo metallo gradatamente dal centro del chiodo a tutto lo spessore del legno, il quale acquista in tal modo, combinandosi al tannino, nero colore, e mostra, abbruciando, l' ossido in esso penetrato. In tal maniera si forma il nostro così detto *Ebano d'Arsenale*, che non è altro che Rovere imbevuto d'ossido di ferro, come pure il legno nero di quercia che si scava in alcune foreste in prossimità a sorgenti ferruginose che trovasi gettato sulle sponde in alcuni laghi di Neuchatel, come descrisse il Razumowschi.

il difetto di sciogliersi esposte all'aria. Ciò prova che per ottenere le suaccennate aggregazioni non occorre sia il ferro alla condizione metallica, ma bastare allo scopo qualunque stato di esso capace di sentire l' influenza dell' acqua e di passare allo stato d'idrato ferrico. Egli è pertanto che le particelle ferruginose sparse in alcune arene, danno ad esse il potere di agglomerarsi quando restino per lungo tratto bagnate dall'acqua; ciò succede in molti punti della nostra spiaggia, ove formansi anche quotidianamente per tal causa di simili ammassi, ne' luoghi specialmente in cui sianvi depositati granelli di sabbia nera, che, come si sa, è quasi del tutto ferrugginosa. Lo stesso avviene per la decomposizione della mica, di cui talvolta abbonda la sabbia, la quale contiene del ferro in quantità abbastanza considerevole. In tal caso, essendo il ferro ridotto a minimi frammenti, ciascuno di questi diventa un centro aggregatore, quindi è facile dedurvi perchè più pronto riesca il processo cementativo. Si possono citare molti altri esempj analoghi a quelli riferiti superiormente, quali sono il sabbione osservato dal Brocchi (*Conch. foss. sub.* t. I, p. 83) fra Fano e Pesaro, che in alcuni luoghi, com' egli dice, è capace di un certo grado d' impetrimento, e quelle dune consolidate che osservansi in differenti parti del mondo. Lo stesso è a dirsi del *Megiotan*, ossia delle conglomerazioni di sabbia, di conchiglie o d'altro, osservate dal Marsigli nel fondo del Mediterraneo (*Hist. phys. de la mer* 1725, pag. 14, 15), e considerate accidentalmente coprenti il vero fondo di quel mare, e così pure di una gran parte di quegli agglomeramenti eterogenei, che, secondo il Risso, si formano annualmente nel litorale di Nizza, nelle fessure del calcare marnoso e jurassico, e che trovansi ricoperte a qualche metro di profondità dalle acque marine. Forse potrebbesi pensare egualmente di altri aggregati del bacino mediterraneo creduti d' origine più antica (Risso, *Hist. natur. des principales productions de l'Europe méridionale.* Tom. I. Paris 1826, p. 201) (1).

(1) C. Lyell ne'suoi *Elementi di Geologia*, Cap. IV, della I Parte, al paragrafo *Cementazione delle molecole*, parlando della consolidazione di que' sedimenti in cui tale processo non si compie che lungo tempo dopo la loro formazione, scrive, che ne' luoghi dove l' acqua delle sorgenti ferruginose o calcaree attraversarono un letto di sabbia o di ghiaja, osservasi talvolta che il ferro od il carbonato calcareo è deposto negli intervalli che separano i grani di sabbia od i ciottoli, di maniera che in certi punti tali diverse sostanze restano legate insieme e formano una pietra, mentre in altre situazioni la medesima serie di stratificazioni conserva una struttura incoerente e molle. Una cementazione di questo genere trovasi in una roccia esistente presso Kolloway nel Wiltshire. E' molto probabile che tali agglomeramenti abbiano per la maggior parte un' origine analoga a quella de' nostri caranti.

Considerando l' origine del nuovo gres rosso in relazione a quanto dal medesimo autore, nella citata opera, vien riferito, cioè provenire esso sovente dalle alluvioni di materiali di roccie decomposte contenenti ossido di ferro in grande proporzione, i quali trasportati nel mare od in un lago formano, agglomerandosi, degli strati

Le sabbie della costa nord della Cornovaglia e delle rive del mare presso Messina, agglutinansi insieme col lasso del tempo, poste nelle favorevoli circostanze accennate, ed acquistano compattezza di roccia così uniformemente solida e dura, che gli abitanti sogliono preferirla a molte altre pietre nelle opere di costruzione. Dicasi ciò pure del gres che trovasi appiedi ai Pirenei, il quale in molti punti non è che una sorte di *molasse*, ed in altri è ridotto alla durezza di una pietra idonea alle costruzioni, e chiamasi *Carcassone* (D'Aubuisson, *Géogn.*, T. II, p. 437).

Aggiungasi finalmente, a meglio comprovare il consolidamento delle aggregazioni ferrifere sott' acqua, oltre al fatto notorio delle pozzolane, quanto succede ne' graniti di Messina e nelle dighe d' Olanda, e ciò che Brocchi istesso riferisce nel suo *Trattato mineralogico sulle miniere di ferro*, t. II, p. 284, cioè che nella diga dell' Oderteich in 70 anni si formò un granito simile a quello d' onde proveniva la sabbia adoperata ad empiere la diga stessa, e quanto vien riportato dal Brard relativamente al gres di Pontoise ne' dintorni di Parigi, ed a quello di Grammont, entrambi i quali acquistano solidità, se vengano immersi nell' acqua (1).

Con quanto innanzi ebbesi ad esporre è facile lo spiegare la rigenerazione di tali gres e graniti, e le cagioni dei differenti gradi di coesione delle loro parti componenti.

È da abbandonarsi quindi nel caso nostro l' idea che le soluzioni di ferro,

di gres rosso o di marna analoghi a quelli del vecchio gres rosso, o d' altri impasti per caratteri litologici rassomiglianti, fa d' uopo concludere nascere la cementazione nella maniera da noi esposta.

Il ferro ossidato idrato in grani, che trovasi nei dipartimenti della Francia centrale, si mostra in qualche circostanza agglomerato coll' intermezzo di un calcare ferruginoso, per cui ha luogo la credenza della contemporaneità del terreno e del minerale.

Dietro gli accennati principj potrebbe considerarsi il metallo di formazione anteriore, e la calce dell' età del calcare d'acqua dolce, ed essersi questa cementata per l'azione del ferro, con cui venne posteriormente a contatto. Per la stessa cagione anche il ferro ossidato idrato ferroso mostrasi nei terreni superficiali sovente sotto forma di pudingo ferruginoso. (Ved. Dufrenoy, *Traité de Mineralogie*, T. II, p. 488, 491.)

(1) Domenico Paoli nel suo importantissimo lavoro sul moto molecolare de'solidi, parlando, nel Cap. XI, dell' azione dell'acqua e delle alterazioni che si operano ne' minerali, e delle infiltrazioni di essa nei medesimi, oppone alla pretesa facoltà dissolvente dell'acque l'osservazione, che non pochi corpi progrediscono nel loro consolidamento quantunque s' impedisca in essi l' evaporazione, e, ciò che più importa, mentre su di essi tuttavia continua l' acqua ad esercitare la sua azione. Cita ad esempio i cementi così detti idraulici, i quali induriscono nell' acqua invece che essere da essa disciolti; così pure i graniti rigenerati di Messina, e la rigenerazione dei gres di Pontoise e di Grammont. Dopo quanto esposi relativamente al modo con cui si opera la formazione del Caranto, non è difficile conoscere in che consista l' influenza dell' acqua nella rigenerazione delle roccie nelle quali entra il ferro. Nei cementi idraulici però, dove questo metallo mancasse, il modo d' azione dell' acqua dovrebbe spiegarsi altrimenti.

intromettendosi fra i materiali terrosi, arenacei, ciottolosi, e conchigliari pei quali attraversano, servano ad essi d' intermezzo cementatore nel modo stesso che le infiltrazioni calcaree e silicee, involgendo cioè i materiali accennati, ed aggregandoli. I gres ed i pudinghi a cemento intromesso mostransi ben differenti da quelli su cui tenemmo discorso.

Dall' analisi meccanica di tali due specie di agglomerati è molto facile riscontrare negli uni il cemento intromesso, mentre negli altri, cioè nei carantacei, difficilmente discopresi, e sembrano invece i materiali componenti, aggregati per semplice adesione di superficie. Deve credersi di conseguenza, come dissi più sopra, servire il ferro, nella formazione del Caranto, non d' intermezzo agglutinatore, ma di mezzo potenziale o fattore determinante un' azione elettro-chimica, per cui le superficie medesime dei materiali che trovansi casualmente a contatto, vengono modificate in maniera di acquistare un' adesione reciproca, una specie di fusione molecolare prodotta dall' elettricità, agente riconosciuto il più valido per ottenere coesioni di forza estrema.

Un tale processo di aggregazione sembra però compiersi in più maniere; in alcuni casi pare che la forza elettro-chimica converta la superficie de' corpi carbonato-calcari, che trovansi fra loro a contatto, in istato di soluzione acquosa, mediante l' azione dell' acido carbonico sovrabbondante nell' acqua, per cui havvi passaggio dallo stato di carbonato insolubile a quello di bicarbonato solubile, e che un tal acido si vada successivamente svolgendo in modo da far ritornare le superficie medesime, dopo fuse insieme, allo stato di carbonato neutro. Non è difficile persuadersi di ciò osservando col miscrocopio la superficie di alcune di tali aggregazioni. Quando un impasto si esamina nel suo primo stadio, discopronsi le superficie lievemente aderenti, distaccantisi con facilità le une dalle altre; progredendo il processo conglomerativo, si aggiungono particelle calcaree alle prime, e l' aggregato acquista adesione maggiore; in seguito discopronsi persino le superficie degli interstizj, lasciati da que' corpi che non giunsero a perfetto contatto, coperte di sottilissimi e minimi cristalletti calcarei, prismatici, disposti nella maniera stessa come avviene nell' interno di alcune geodi. Il tempo però giunge a fondere e quindi a distruggere anche tali cristalli, ed in quel caso si osservano le superficie de' corpi aderenti tenacemente le une alle altre come sofferta avessero una vera fusione. Ciò si riscontra di preferenza nelle aggregazioni conchigliari; e se in luogo di grossi materiali trovansi a contatto minimi frammenti soltanto, il processo manifestasi eguale, ma in tal circostanza è

è più difficile riconoscerlo nella sua origine, e l' impasto riesce di grana più o meno fina e più o meno aderente, secondo lo stadio di sua formazione. Se i materiali aggregati fossero di pura sabbia calcare, può questa fondersi col tempo in maniera da credersi calce carbonata compatta. Se a questi materiali sottili trovansi misti materiali più grossi o conchiglie, sembra che i primi servano quasi ai secondi di cemento intermezzo. Se alla sabbia calcare sia commista della sabbia silicea, la soluzione calcare serve di cemento a questa avvolgendola nel passare allo stato neutro; ma allora facilmente si disgregano i granelli silicei coll' acido nitrico.

Se l' ossido di ferro entra nell' impasto in grande abbondanza per essere prossimo al centro metallico, i suoi caratteri manifestano il suo predominio e chiaro apparisce, com' è infatti, il principale intermezzo cementatore; l' aggregato in tal caso mostra molta durezza ed aderenza, e dà scintille coll' acciarino, se nei materiali di esso entrano frammenti silicei.

Se l' impasto è di frammenti calcarei o di argilla, sembra farsi il processo aggregativo in modo più complesso, ed agire il ferro come fattore elettro-chimico non solo sulla calce ma ancora sugli altri principj componenti l' argilla, per cui la silice stessa rimane in parte allo stato temporario di soluzione, locchè facilmente spiegasi coll' isomerismo, nel modo stesso che potrebbe spiegarsi come l' argilla mista alla calce formi sott' acqua dei buonissimi cementi idraulici, e come ciò più facilmente e durevolmente si effettui colla presenza del ferro.

Anche se l' aggregato sia di puri frammenti silicei, può venir cementato dal ferro; in tal caso però l' idrato ferrico vedesi molto abbondante e serve d' intermezzo conglomeratore. Non potrei citar esempj in cui sabbia o ciottoli di pura selce siensi aggregati per fusione di superficie, nel modo stesso come nei frammenti calcarei si osserva. Che se ciò avvenir potesse, converrebbe che il ferro avesse anche il potere di far nascere sulle superficie de' corpi silicei, mediante la reazione di qualche alcali messo in libertà, uno stato di soluzione per la quale tali superficie, fondendosi insieme, restassero aderenti per un nuovo sprigionamento dell' alcali medesimo.

Studj più profondi, condotti a seconda de' moderni principj di scienza elettro-chimica-molecolare, potranno, valutando ogni speciale circostanza concomitante, chiarire siffatto argomento importantissimo, e molti altri che con esso si legano, e spargere luce sopra fenomeni geologici tuttavia molto oscuri, e fino ad ora incertamente od erroneamente spiegati.

Capitolo III.

Terreni a cui appartiene il Caranto, modo di trovarsi nell' adriatico bacino, e differenti specie di esso.

Da quanto esposi nel precedente capitolo è facile conoscere, non doversi riguardare la formazione del Caranto come esclusiva a particolari terreni ed accaduta regolarmente ad epoche geologiche determinate, ma, ammesse le suesposte circostanze, poter essa aver origine in qualunque punto dell' adriatico bacino, e specialmente in quelle situazioni di esso, ove l' accidente portò quantità maggiore di ferro, o di sostanze ferrifere.

Trovasi infatti Caranto a maggiore o minore profondità in tutti i terreni alluviali del bacino medesimo nelle venete lagune e nel profondo del mare, specialmente in siti tranquilli e dove il ferro concorre in copia maggiore, cioè nei luoghi più frequentati dall' uomo, vale a dire in prossimità delle spiaggie.

Il Caranto delle adriatiche campagne sta ordinariamente sottoposto ai depositi argillosi, ossia nella parte superiore dei letti di sabbia o di ghiaja che sono sottoposti all' argilla. Sotto il Caranto trovasi la sabbia sciolta e nel suo stato naturale, e spesso torna di nuovo a ricomparire l' argilla, indi il Caranto. Avviene il caso che ammassi di Caranto si trovino immediatamente sotto il terriccio vegetabile, quando il terreno sottoposto sia sabbioniccio o ghiajoso.

Nelle spiaggie circondanti l'Adriatico, fra mezzo alla sabbia che le costituiscono, a maggiore o minore profondità e distanza, sovente anche del tutto scoperti, vedonsi ammassi arenacei più o meno solidi ed estesi, che altro non sono che un Caranto arenaceo misto spesso a frammenti di conchiglie marine o fluviali.

Scavando nelle isole Veneziane o nelle lagune, a 6, 8, 12 o 16 piedi di profondità, trovansi in quasi tutte le situazioni dopo il fango e l' argilla, e spesso anche dopo strati di sabbia, ammassi di Caranto più o meno potenti e grossi, sotto i quali seguitando lo scavo, rinviensi nuovamente sabbia od argilla; alle volte in alcuni siti profondi delle lagune veggonsi degli ammassi scoperti. Sparsi poi per le lagune e nei canali si pescano di frequente di quegli arnioni argillosi calcarei, od argilloso-sabbionosi con frammenti conchigliari, come addietro accennai, e questi alla superficie del fondo o ad assai poca profondità. L' epoca

memoranda del bombardamento di Venezia lascierà non v' ha dubbio anche nei fondi della nostra laguna delle indelebili traccie, poichè le migliaja di bombe e di palle sprofondate ne' siti in cui ferveva la lotta, prepareranno alla posterità masse ingenti carantose, delle quali la storia saprà allora indicare l' origine.

Nel profondo del mare Adriatico pescansi in tutti i siti conglomerati carantacei di specie diversa, a seconda dei materiali componenti i varj fondi, e vi hanno situazioni in cui il Caranto forma dei banchi immensi o delle secche, quali sono le accennate anche dal Donati, come *croste* o *cotenne*, composte di testacei e polipari, ad arena e terra frammisti ed impietriti in buona parte. Tali croste hanno sovente molti piedi di grossezza e sembrano di continuo aumentarsi per depositi conseguenti a nuovi trasporti.

Abbondantissimi sono essi nella costa orientale, cioè nell' Istria, Quarnero e Dalmazia. Lo stesso Donati ne osservò dei lunghissimi tratti, come quello che comincia all' Isola grossa, e va fino alle Bocche di Cattaro. Il letto su cui poggiano tali ammassi è differente secondo le situazioni, poichè ora è sabbioso, ora argillaceo, ed ora petroso, o, come dicono *d'aspreo*, cioè costituito dagli scogli calcarei, che più frequenti si riscontrano nel lido orientale del nostro mare tutto prossimo alle radici de' monti istriani e dalmatini, in confronto del lido opposto.

La potenza e l'estensione di tali massi stanno in ragione diretta della quantità di fomite cementatore, nonchè del concorso in punti determinati de' materiali suscettibili d' essere cementati, e delle circostanze capaci di favorirne il processo. Non riesce quindi difficile lo spiegare, come in certi siti possano essersi formati depositi così vasti, quando si pensi alla quantità immensa di ferro che di continuo viene inghiottita dal mare, ed alla minima quantità occorrente pel processo cementativo: dimodochè potrebbe calcolarsi che un' oncia di ferro metallico fosse capace di servir di nucleo cementatore a più piedi cubici di materiale. In tal modo avviene che due o più centri di cementazione a conveniente distanza, accrescendo gli agglomerati, si uniscano e formino un masso solo, e vada così di continuo aumentando sempre più col trasporto di nuovi materiali e coll' aggiunta di nuovo ferro, la potenza degli ammassi carantosi. La qual potenza pur diverrebbe estraordinaria ed oltre limite, se la provvida natura non avesse fatte agire per arrestarla quelle stesse forze distruggitrici, che non risparmiano nemmeno quelle roccie dure e potenti che servono di base al Caranto, e che opponendosi all' accrescere di tali ammassi collo sciogliere i componenti,

preparano materiali a nuove formazioni, destinate anch' esse a distruzioni novelle. L' urto quindi del mare agitato, e più di tutto l' energica possa degli animali perforatori, servono a limitare in parte il progresso che farebbe col tempo l' estensione di tali agglomerati, i quali ciò nullameno vanno in qualche punto talmente perfezionandosi, da acquistare la consistenza e la durezza di roccie antiche, specialmente se ghiaja e sabbia silicea ne sono i materiali costituenti, essendo quelli composti di spoglie di testacei o polipari più facili a decomporsi ed a distruggersi per le cause accennate.

Questi ultimi però, anche per osservazione dello stesso Donati, ad una profondità alcune volte minore alcune altre maggiore d' un piede, ritrovansi perfettamente impetriti e passati in sostanza marmorea, ed a minore profondità sono più conservate le spoglie animali che li compongono, e finalmente nella superficie loro osservansi aggregate spoglie conservatissime di animali morti, o viventi ancora.

Dall' esposto quindi vedesi non esser altrimenti vero quanto asserisce il Brocchi nel suo *Trattato sulle Miniere di ferro del Dipartimento del Mella*, che cioè il mare attuale perdette intieramente la sua energica possa, e non faccia più nuovi scogli e nuovi ammassi petrosi; che i fiumi tributano ad esso bensì una quantità di terra di vario genere sommamente attenuata e che se ne distacca dai continenti coll' erosione dell' onde, ma che questi materiali giacciono ne' suoi fondi in depositi fangosi incapaci d' incontrare nessuna coerenza, e che non compongonsi mai, o molto di rado, una breccia, un pudingo, od un' arenaria che sono le più grossolane produzioni del regno minerale.

Può accordarsi bensì che i pudinghi di Cherbourg, quello aderente all'àncora pescata nel mare di Ancona, e quanti altri accennai, sieno fatti parziali e prodotti di particolari accidenti; che i conglomerati che si vanno facendo attualmente non siano che una leggera imagine di ciò che successe in grande altre volte; ma non possono negarsi gli effetti necessarj delle decomposizioni e delle ricomposizioni chimiche delle roccie che per successione di tempo si vanno osservando, le quali non sono poi da considerarsi tanto differenti da quelle che si operarono nei tempi antichi. Come può negarsi infatto che, oltre ai metalli ferruginosi trasportati dai fiumi e dall' accidente, esister possano in fondo del mare miniere di ferro od altri ammassi di questo metallo, staccati dal loro letto per circostanze analoghe a quelle che agirono nel profondo dei mari ne' secoli antichi, e che questi ammassi venendo sparsi per identiche cause e messi al caso di

idrossidarsi, possano dar origine a conglomerati simili a quelli che delle antiche formazioni sono proprj?

Non è quindi sotto certo aspetto da sbandirsi intieramente l'opinione di que' geologi, i quali credono che le cause concorse alla produzione delle roccie di sedimento marino possano continuare anche adesso nella loro azione in fondo dei mari. Se tali cause, come dissi, non agiranno coll' antica energia, cambiate essendosi moltissimo le circostanze, se non agiranno tutte, lo faranno almeno in gran parte, e certamente in modo analogo, per certe formazioni, come sembra che il fatto dimostri, vedendosi tutto giorno aver origine terreni simili a quelli che si sono formati nelle epoche geologiche in cui il mare stanziava sul continente. Non è vero che troppo angusti spazj occupino gli aggregati recenti, per poter servire di prova in confronto delle grandi estensioni di suolo che coprono gli antichi sedimenti, e che gl' impasti portino l' impronta di un' aggregazione imperfetta, stentata, e, per così dire, abortita, giacchè estensioni abbastanza grandi di suolo occupano tali moderni sedimenti, per non farsene lieve conto, e poichè i gres, le pudinghe ed altri agglomerati, che attualmente formansi in fondo dei mari, sono, quando raggiungono certo grado di perfezione, dotati di solidità e compattezza non inferiore a quella di altre analoghe roccie montane, prodotto di antiche formazioni sedimentose marine, abbenchè non giunti ancora come quelle, per forza del tempo, a completa durezza. Se fosse possibile portare lo sguardo nell' imo fondo dell' oceano vedremmo, almen giudicando da quello che ci è dato scoprire sulle formazioni dell' angusto spazio occupato dal mare Adriatico, che molti banchi di rocce si avrebbero lavoro del mare attuale, non confondibili colle rocce sottomarine che si legano coi monti del continente, e che sono formazioni di quel geologico periodo in cui un oceano vasto e tranquillo deponeva lentamente i principj che doveano formarle, per poi, distruggendosi, prestar materiali agl' impasti moderni di cui tenemmo discorso.

Persuadendo ogni fatto, che il mare allagasse un tempo le nostre pianure, lambendo le radici de' monti che lo circoscrivono, e doversi ai trasporti de' fiumi ed al graduato ritiro dell'acque la formazione dei depositi di alluvione distribuiti regolarmente in più punti, si possono dedurre conclusioni sui rapporti di analogia che si vedono esistere fra le situazioni ed il modo di trovarsi del Caranto contemporaneo in confronto di quello più antico, ma formatosi sotto l'influsso di simili cause.

Infatti, confrontando le stratificazioni di deposito alluviale delle venete cam-

pagne coi terreni subacquei delle lagune, che ne sono continuazione e che diverranno un giorno campagne essi stessi, vedesi tutta l' analogia di formazione, poichè tanto allo strato di terriccio nelle campagne, quanto a quello di fango nelle lagune, trovasi quasi sempre sottoposta l' argilla, indi l' arena o la ghiaja sole ed alterne, e sì nell' une come nell'altre tornano sovente le argille e le sabbie e viceversa, a differenti profondità, secondo i siti e l' estensione del deposito di che sono formati, e le cause accidentali posteriori che possono aver alterato lo stato loro primitivo.

Tanto nelle campagne quanto nelle lagune trovansi ordinariamente gli ammassi di Caranto in analoga situazione, vale a dire al punto di contatto delle argille colle sabbie, e trovasi pure analogia relativamente alla profondità a cui son posti, alla loro estensione e grossezza, alla forza di aderenza del loro impasto, ecc., locchè tutto dimostra aver essi avuta origine eguale ad epoche differenti, e doversi considerare pel maggior numero quelli che si scavano ora nelle venete campagne come formazioni di que'tempi, in cui queste ancor erano coperte dal mare, nel modo stesso che ora lo sono le lagune. Le quali lagune se progressivamente non divennero campagne esse stesse, ciò devesi solo considerare come effetto di quell' artifizio che si adopera da tanti secoli per guarentire la loro esistenza.

Da quanto si è notato relativamente ai differenti fondi marini riesce facile conoscere quante specie di Caranto possano in essi aver formazione.

Tra i fondi marini, come vedemmo, ve ne hanno di argillosi, di arenacei, di calcari o silicei, di ciottolosi, di conchigliosi e di misti; il nome specifico quindi devesi scegliere a seconda della differenza dei materiali aggregati. Altri caratteri per designare le varietà possono aversi dalle qualità dell' argilla, dell' arena, dei ciottoli, delle conchiglie, ecc.

Che se pongasi mente al luogo di formazione, potrà distinguersi il Caranto del mare da quello di laguna, il fluviale dal campestre. Se vogliasi accennare alla profondità da cui si estrae, può dirsi superficiale o profondo, superiore od inferiore ad uno od altro strato alluviale ; se si ha riguardo all' epoca di formazione, potrà chiamarsi antico o recente; se al grado di sua perfezione, perfetto od imperfetto.

Di tutte le accennate specie di Caranto potete vederne un saggio nella serie che vi presento, e farvi un'esatta idea de' particolari caratteri che le distinguono.

Capitolo III.

Riassunto, conclusioni ed applicazioni.

Da quanto ebbi ad esporre relativamente alle opinioni degli autori sull'origine del Caranto, alle osservazioni da me fatte sulla vera genesi di questa roccia, e sulle varie specie di essa in relazione ai terreni nei quali si rinviene, sembrami potersi concludere a pro della scienza:

1.° Essere il Caranto una roccia che può giornalmente prodursi per la trasformazione dell' argilla, dell' arena, della ghiaja e di altri corpi, in aggregati solidi, ma non aver essa origine da infiltrazioni minerali, come venne creduto finora, e come avviene nella formazione di altri gres e pudinghi;

2.° Il ferro operare la genesi del Caranto, non come intermezzo agglutinatore, ma come mezzo potenziale o fattore determinante al contatto dell'acqua un'azione elettro-chimica, mediante la quale le superficie dei materiali, che trovansi casualmente a contatto, vengono modificate in maniera da acquistare un' adesione reciproca, come quasi nascesse in esse una specie di fusione e d' impasto molecolare;

3.° Una tale azione elettro-chimica esser quindi condizionata alla presenza d'uno o più nuclei di ferro passanti, per l' azione dell'acqua, dallo stato metallico o di ossidazione a quello d' idrato ferrico;

4.° Formarsi in tal modo un seguito di vibrazioni e di correnti elettro-chimiche, le quali, continuando finchè durano le circostanze che le promuovono, trasportano molecole d' idrato ferrico non solo a contatto delle superficie, ma attraverso lo spessore dei materiali circostanti fino alla totale distruzione del nucleo da cui partono, sicchè rimane vuoto lo spazio da esso prima occupato, e rammenta la forma che aveva;

5.° Rinvenirsi più ferro presso il nucleo dell'aggregazione che nella circonferenza, sparire il ferro stesso quasi affatto col tempo in ogni punto di essa, od almeno rimanerne soltanto traccie appena sensibili, e cessare in tal modo il potere aggregativo;

6.° Disaggregarsi facilmente questa roccia, al contatto dell' aria, in quelle parti dove il ferro sovrabbonda, e ciò in causa del passaggio di questo metallo

dallo stato di ossido bruno a quello di ossido rosso, e succedere questo più o meno facilmente a seconda della quantità dell' ossido stesso;

7.° Riattivarsi il processo cementativo e ristabilirsi l'aggregazione dei materiali, quando si ristabilisce l' azione dell' acqua sopra di essi;

8.° Cessare la disaggregazione, quando nella roccia il principio ferroso sia ridotto a tale quantità da non più mantenere correnti, e succedere questo tanto più prontamente quanto è maggiore la quantità dell' ossido bruno e riuscire in tal caso l' aggregato ottimo materiale da fabbrica;

9.° Il processo d' aggregazione compiersi nell' acqua marina al pari che nella dolce, però con maggiore rapidità in quella che in questa;

10.° Le differenze nelle specie di Caranto dipendere dalla differenza dei materiali aggregabili, coi quali un pezzo di ferro viene a contatto;

11.° Non differire il modo di aggregazione col differire dei materiali medesimi, ed essere eguale il processo, tanto se trattisi di pezzi di considerevole grandezza come di frammenti ridotti al minimo grado di dissoluzione, od anche di soluzione nell' acqua; ma in quest'ultimo caso trovandosi l' impasto di materiali sottili a contatto con corpi maggiori, servir esso a facilitare l'unione di questi corpi facendo uffizio di secondario mezzo cementatore;

12.° Colla teoria medesima del processo cementativo del Caranto potersi spiegare la formazione di alcuni gres e pudinghi creduti di origine più antica, e ciò servir anche alla spiegazione di altri fenomeni geologici finora misteriosi, ed a confermare la sentenza di alcuni fisici relativa all' impulso che le forze elettriche danno agli elementi de' corpi nel mutamento delle masse terrestri.

Di tutte queste deduzioni non solo la scienza potrà valersi svariando ed estendendo sperimentali ricerche a seconda degli odierni progressi negli studj elettro-chimici, ma l' arte stessa potrà approfittare. Chi non vede infatti quanto utile deve riuscire l' applicazione delle accennate osservazioni alla costruzione delle dighe e di altri lavori sott' acqua (1), laddove occorre robustezza di fonda-

(1) Ad illustrazione di tale argomento credo conveniente sia aggiunta la seguente Nota letta all' I. R. Istituto il giorno 27 novembre 1854 ed inserita ne' suoi Atti: *Se sempre abbia parte il ferro nella consolidazione e durata dei cementi idraulici?* Nel n.° 4 del 24 luglio 1854 del Conto reso settimanale dell' Accademia delle scienze di Parigi, leggesi l' estratto di una Memoria dei sigg. Malagutti e Durocher, intitolata: *Ricerche sulla resistenza delle calci idrauliche e dei cementi all' azione distruttiva dell' acqua del mare.*

Gli autori di una tale Memoria, coll' appoggio di esperimenti da essi fatti su così importante argomento, vennero a concluderne:

« Che i cementi riputati come più resistenti all' azione distruttiva dell' acque del mare, contengono sem» pre delle quantità notabili di ossido di ferro.

menta a valida opposizione alle forze potenti delle correnti sottomarine e degli irati marosi?

Del potere cementatore del ferro si valse già l' arte in più casi dall' esperienza condotta; ma quanto maggiormente potrà approfittarne ora che la scienza venne in soccorso dell' arte?

Potrei a conferma di ciò far conoscere l' esito felice di alcuni miei speri-

» Che certe combinazioni di silice, allumina e calce danno, a circostanze eguali, delle reazioni assai differen-
» ti, secondo che esse sono sprovvedute o che contengono molto ossido di ferro. »

A tali conclusioni veniva io medesimo nella mia Memoria letta tre anni or sono a questo I. R. Istituto, sul potere aggregatore del ferro, e sulla formazione del così detto Caranto nel bacino adriatico, ed in conseguenza di esse richiamava l' attenzione degl' ingegneri che si occupano di costruzioni subacquee, onde avessero ad approfittare delle mie osservazioni.

Se non che alla Memoria degli autori succitati seguì una Nota letta all' Accademia delle scienze dal sig. Vicat, ed inserita nel n.º 9 del 28 agosto del Conto-reso di questo stesso anno, nella qual Nota sono citati dei fatti bene stabiliti, i quali sarebbero in opposizione diretta di quanto viene asserito nella Memoria dei sigg. Malagutti e Durocher, sull' efficacia del perossido di ferro nelle composizioni idrauliche.

E tali fatti sono i seguenti:

Vi hanno dei cementi indistruttibili dall'acqua di mare, i quali contengono dal 5 al 12 per cento di perossido di ferro. Ve ne hanno di lievemente attaccabili, i quali contengono dal 5 al 7 per cento di questo metallo. E ve ne hanno di eminentemente distruttibili, abbenchè contengano quasi un sei per 100 di ferro.

Cita inoltre, che fra le pozzolane vi ha quella di Roma che resiste più d' ogni altra, benchè contenga soltanto 12 per 100 di perossido di ferro, mentre la peggiore di tutte, che è quella della Isola Borbone, ne contiene il 35 per 100.

Aggiunge ancora, che tutte le pozzolane artificiali fabbricate con delle argille bianche e convenientemente messe in opera, resistono all' acqua del mare, e che ve ne hanno di quelle che non contengono principii ferruginosi, o se ne contengono, sono limitati al solo 2 per 100, e che le calci idrauliche, le quali unite alla sabbia sono le sole che danno aggregati indistruttibili dall' acqua del mare, non contengono che quantità insignificanti di perossido di ferro.

Da tali fatti conchiude il sig. Vicat « essere difficile il poter attribuire al perossido di ferro un' importante
» efficacia nella formazione dei cementi subacquei, ed il generalizzare la di lui utilità appoggiando a casi forse ec-
» cezionali che potrebbero spiegarsi in differente maniera. »

Tali considerazioni del sig. Vicat non infirmano però quanto erasi da me inserito nella mia Memoria sul potere cementatore del ferro; provano soltanto potersi aver cementi idraulici anche senza l' intervento di tal metallo, locchè io pure aveva avverato facendo nuove esperienze sopra altre specie di pozzolana contenenti particelle ferruginose in piccolissime quantità, come ne è prova l' aver asserito parlandovi della terra di Santorino (*), nella sessione di marzo dello scorso anno, che « contenendo quella terra il ferro in assai minima quantità, si converte
» in cemento idraulico, unita alla calce, e solidifica per ragioni composte in parte differenti da quelle da me es-
» poste sul potere aggregatore del ferro. »

Di tutto ciò credetti conveniente informare codesto I. R. Istituto, non tanto per mostrare l' anteriorità delle mie osservazioni su tale argomento, quanto per farvi conoscere la loro consonanza con quelle dei sigg. Malagutti, Durocher e Vicat.

(*) *Sulla natura della terra di Santorino e sulla sua applicazione alle arti ed all' agricoltura.* Nota inserita negli Atti delle adunanze dell' I. R. Istituto, T. IV, Ser. 2.da, 1853.

menti corroborati da un quarto di secolo di prova, sull' efficacia della presenza del ferro ossidato nei materiali terrosi usati nella composizione dei lastricati picei da me per primo proposti ed esperimentati fino dal 1827 (1), e così pure nella costruzione di alcuni pavimenti subacquei, all'oggetto di renderne più consistente l' impasto, ma ciò riservo a soggetto di un mio futuro discorso.

(1) Vedasi la Gazzetta di Verona 1828, n.° 26; il Giornale veneto di tecnologia e belle arti, novembre 1833, e la Gazzetta di Venezia, n.° 95, 23 aprile 1838.

(*Letta nel giorno 23 giugno 1851.*)

FERMENTAZIONE LATTICA

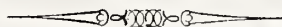
DEI

CORPI DELLE OSTRICHE *(Ostrea edulis L.)*

E SEPARAZIONE

DEL PRINCIPIO PRODUTTORE DELL' ACIDO, CHIAMATO *Ostreina*

DEL MEMBRO EFFETTIVO

PROF. B. BIZIO

§ I.

Fermentazione lattica dei corpi dell' ostriche, e separazione dell' acido lattico.

In quel tempo in che dava opera alle mie *Ricerche* sulle branchie dell' ostriche, pubblicate nel volume secondo delle *Memorie* di questo I. R. Istituto, colle quali io portava ad evidenza sperimentale che il coloramento in verde osservato talvolta sorgere naturalmente in questi animali, viene dal rame ch'essi contengono, e la pruova io posava in quel colore che ne sarebbe dovuto uscire in opera dell' ammoniaca originata dalla putrefazione animale ed operante nel rame dell' organo; siccome io sapeva che, piccola cosa sì, ma pur tuttavia tracce di rame si contengono altresì ne' corpi e nel mantello, così divisai di sottoporre a quello stesso cimento che le branchie, eziandio i corpi, badando che restassero umettati dall' acqua aderente, come in alcune sperienze praticai anche sperimentando le branchie.

In questo raffrontamento delle branchie co' corpi, osservai adunque che, dove le prime si putrefacevano, esalavano odore assai fetido e si risolvevano in una materia mucosa azzurrastra, i corpi in opposto ingiallivano un poco, si appassivano, e l' umore che ne usciva e nel quale restavano immersi aveva l'appa-

renza di una sanie. Non mi venne fatto di scorgere niente di quel colore che nelle branchie, ma la particolarità singolare che notai si fu un odore forte di cacio, che quella materia alterata tramandava. Avvisato da questa maniera di speciale odore, saggiava l' umore predetto colle carte azzurre, e il trovava fortemente acido, anzi l' acidità esser tanta, che bastava a preservare i corpi medesimi dalla corruzione.

Il fatto, che due parti distinte di un minuto animale, quale si è un' ostrica, abbandonate egualmente a sè medesime sotto l' influsso di una temperie competente, una soggiaccia a tutte le alterazioni che incontrano le materie animali che si corrompono, e l' altra in contrario inacidisca e si conservi, mi sembrò così inaspettato, singolare e nuovo da volere uno studio attento e considerato. Perciò il dì 20 giugno del passato anno 1844, essendo la temperie a + 21° $^1/_2$ circa del R., io dava cominciamento alle mie sperienze, le quali continuava e molte volte ripeteva sino al giorno 12 di settembre dello stesso anno. Tutti i cimenti furono instituiti a questo modo: Pigliai una certa quantità di ostriche; vi separai esattamente le branchie e, lavati i corpi una sol volta e lievemente coll' acqua distillata, li posai in un recipiente cilindrico di vetro empiendolo fino presso il labbro, e mescendovi appresso quel solo tanto di acqua distillata, che bastasse ad empire i vani, che restavano fra la materia animale di tal maniera ammassata. Indi chiudeva la bocca del vase a mano di un sol velo raro, legatovi in giro; sì che lasciasse esito ai gas svolgentisi, e togliesse modo agl' insetti di mettervisi dentro.

Assestato in tal guisa l'esperimento, osservava che, corso anche il solo spazio di quindici o sedici ore, senza che punto si alterasse il naturale odore del mollusco, provando l' umore alle carte azzurre, si manifestava una visibile reazione acida, la quale cresceva nello spazio di un giorno, e di mano in mano aumentava a segno da fornirmi, corsi due giorni, una gagliarda acidità. Questa acidità gagliarda, palesatamisi dopo due dì, era altresì accompagnata da un copioso sprigionamento di bolle, e dall'odore di cacio che principiava ad esalare, il quale si rendeva più spiccato e deciso nel terzo giorno; al qual termine osservai altresì un fievolissimo spargimento di gas solfido idrico e di ammoniaca, che tuttavia ne' successivi dì non si rese più cospicuo, ne' quali l' odore di cacio torna sì schietto e vero che, a non vedere la cosa, si avrebbe potuto credere di odorare del puro cacio.

In questa prima sperienza, che nel medesimo modo fu più altre volte ripe-

tuta, dopo il nono dì io saturai l'acido a mano di una soluzione satura di bicarbonato sodico, tenendo che, liberata la materia animale dalla presenza dell' acido, essa ripigliasse la sua azione, e incontrandosi ancora nuova materia da trasformare, seguisse una produzione novella di acido. Il successo comprovò la previsione, se non che l' acido, il quale novellamente si produsse, fu in quantità sì poco da non bastare alla preservazione della materia animale; sì che accorgendomi che lo sprigionamento del gas solfido idrico e dell' ammoniaca si rendeva più vigoroso, e quindi avvedutomi che la putrefazione si era messa e s' inoltrava nell'undecimo dì, neutralizzai di nuovo il poco acido ingeneratosi, e posi fine all'esperimento, il che ebbe luogo due giorni dopo la prima neutralizzazione.

Fatto ciò, aggiunsi alla materia cinque volumi di acqua, e la posi al fuoco finchè bollisse, a fine di coagulare l' albumina e di separarla, per agevolarmi di tal maniera la filtrazione del liquido, la quale ciò nulla ostante mi riuscì penosa e difficile. Com' ebbi il liquido chiaro abbastanza, il concentrai a bagnomaria fino a consistenza di sciloppo denso. Allora il trattai coll' alcoole della gravità in ispecie 0,850, ond' ebbi precipitata un' abbondevole quantità di materia animale, restando il sale formatosi sciolto nell'alcoole, congiuntamente alla sostanza animale nello stesso alcoole solubile.

Prima però di procedere innanzi in divisare il modo, onde giunsi a separare l' acido in istato di purità, non credo di pretermettere l' indicazione di certune di quelle molte modificazioni, che avvisai di portare al modo sperimentale nel ripetere la mentovata fermentazione lattica dell'ostriche. Una delle condizioni, che mi restava da accertare in questa particolare fermentazione, si era la quantità dell'acqua da adoperarsi, senza che l'acido originatosi, per un soverchio allungamento, tornasse insufficiente alla preservazione della materia animale. Per chiarire adunque questo punto, com' ebbi separati i corpi dalle branchie, li lavai al solito, e quindi gli asciugai bene con carta sugante, indi ne fermai il quanto in peso mettendoli per ultimo nell' acconcio di fermentare con una quantità in doppio di acqua.

Temperata così l' esperienza, que' corpi dell' ostriche che a principio erano tutti a fondo, li rinvenni il dì appresso, avvegnachè l' odore si serbasse quel medesimo che hanno naturalmente le ostriche, tutti sospinti a galla a cagione di un gagliardo sprigionamento di gas che si era messo. Saggiai il liquido colle carte azzurre, e non ebbi che segni assai fievoli di acidità.

Il giorno vegnente, a cagione del copioso sprigionamento del gas, i corpi

erano così sollevati e portati a galla da rimanere inferiormente un grosso strato di liquido privo affatto della materia fermentante, ed avente l' apparenza di una sanie sanguigna. L' odore si teneva ancora poco diverso da quello dianzi, e la reazione mostrava un' acidità abbastanza forte.

Per quantunque poi io adoperassi di risospingere a fondo la materia sollevata, non mi venne fatto di riuscirvi; perocchè le molte e spesse gallozzoline, che aderivano a' corpi, gli alleggerivano sì da non potersi tenere sommersi. Appresso si cominciò a sentire l' odore di cacio, e nel quarto dì ad avere la reazione del gas solfido idrico e dell' ammoniaca; finchè nel sesto giorno l' odore cacioso mostrò velarsi dal putrido, finchè mi bisognò sospendere l' esperienza, acciocchè la materia non entrasse decisamente in putrefazione.

In altre sperienze menomai così la quantità dell' acqua da ridurla in peso eguale a' corpi, ed anche la metà, ma nessuna misura trovai più acconcia di quella, ch' è il solo tanto bastevole a riempiere i vani, come ho detto a principio. Nulladimeno qualunque sia la quantità dell'acqua adoperata, entro i limiti mentovati, niente nuoce alla produzione dell' acido; se non fosse che, quando l'acqua è molta, riuscendo la soluzione troppo diluita, non si presta più bene alla preservazione della materia animale, e ch' essendoci portata a galla, è messa così a contatto dell' aria ambiente che la putrefazione torna d' assai accelerata.

Tuttavia si faccia così o in altro modo, quando si abbia il sale sciolto nell'alcoole, come dissi, ci s' instilla adagio adagio tanto acido solforico, che la sostituzione torni a capello perfetta. Allora ne precipita il solfato sodico, e l' acido lattico, prodottosi dalla fermentazione de' corpi delle ostriche, resta sciolto nell' alcoole congiuntamente a non poca materia animale, che vi si accompagna.

Fatto ciò sottoposi alla distillazione la soluzione alcoolica feltrata. Rimase nella storta l' acido, unito alla materia animale, a guisa di uno sciloppo denso. Adunata questa materia, la stemperai nell' acqua distillata, e saturai l'acido coll' ossido piombico aiutando la combinazione a mano di un moderato calore. Come l' acido fu compiutamente neutralizzato, feltrai la soluzione, e per tal modo, oltrechè avere separati, a condizione di solfato e di cloruro piombico, l' acido solforico e cloridrico procedenti dai solfati e dai cloruri esistenti nella sostanza animale, ebbi per giunta la separazione di una parte non lieve di materia animale, condotta a qualità di *apotema* insolubile; tuttavia la soluzione del sale piombico si teneva ancora fortemente colorita.

Datomi a svaporare il sale fino a secchezza, mi venne a modo di un estratto

gommoso pressochè nero. L' apparenza gommosa del sale, in giunta al difetto di volatilità nell' acido, mi persuadeva vie maggiormente che l' acido ivi combinato fosse l' acido lattico. Ridotto frattanto il sale a secchezza, levai la temperie un tantino di più, sicchè condotto in istato di fusione, il serbai così per uno spazio di tempo alquanto lungo, adoperandomi in oltre di rivoltare e rimescolare la materia continuamente. Di tal maniera pervenni a decomporre buona parte della materia animale, onde il sale era sconciato; perocchè venutomi finalmente in una massa nera e quasi carbonosa, dato mano a scioglierlo nell'acqua, tornò separata col mezzo della feltrazione non poca materia resa insolubile.

Ora, avuta questa soluzione del sale piombico, diedi mano alla doppia sostituzione, valendomi del solfato zincico, e n' ebbi precipitato il solfato piombico, e il sale zincico sciolto. Se questo sale era un lattato, stante la sua facilità a cristallizzare io doveva averlo agevolmente in condizione cristallina. Svaporai adunque la soluzione, e condotta in termine da apparire alla superficie del liquido una pellicola cristallina, il posi in luogo fresco e quieto, acciocchè cristallizzasse. E vaglia il vero, corsi due giorni, trovai il liquido pressochè totalmente rappreso in una massa cristallina. Ma siccome il sale era ancora sconciato da molta materia animale, e quindi mi sarebbe riuscito malagevole il separarlo dall' acqua madre, e in ogni modo con perdita sempre notevole di sale, perciò diedi mano all'alcoole, nel quale, se un lattato, sapeva essere insolubile il sale zincico, e in opposto solubile la materia animale, la quale appunto per questa sua solubilità si portò tant' oltre fino a sconciarmi il presente sale cristallizzato. Trattai adunque la massa coll' alcoole della gravità in ispecie 0,850, e stemperatala ben bene, mi venne il sale precipitato, e la materia animale sciolta pressochè totalmente. Lavai il sale coll' alcoole ripetutamente, e quando l' alcoole ne uscì affatto scolorito, allora seccai il sale avutone.

Questa massa salina, ridotta in polvere, la sciolsi nell' acqua distillata, e me ne tornò una soluzione torbida e leggermente gialliccia. Feltrata ne separai la materia animale resa nuovamente insolubile, e messa quindi a bollire con poco carbone animale, riuscì scolorita intieramente. Allora svaporata debitamente, ne venne il sale candido e bene cristallizzato; il quale tuttavia purificai a perfezione con nuove cristallizzazioni.

Condotto il sale di tal maniera ad un termine compiuto di purezza, tornai a scioglierlo nell' acqua a perfetta saturazione. Poscia il decomposi col mezzo di una soluzione di ossido baritico, e conseguitone il sale baritico sciolto, il tornai

a decomporre, mescendovi adagio adagio una misura bastevole di acido solforico, aggiungendovi o poco acido, o poca soluzione di barite fino a cogliere il preciso punto che nulla vi avesse più nella soluzione nè di acido solforico, nè di barite.

Conseguito di tal maniera l' acido procedente dalla fermentazione de' corpi delle ostriche sciolto nell' acqua, libero da ogni materia estranea, e svincolato da qualunque combinazione, lo svaporai a mite calore fino ad averne l'acido concentrato; il quale per ogni sua qualità, oltre le mentovate fin qui, si die' a vedere vero acido lattico, e quindi ci si dà per indubitato, che i corpi delle ostriche, messi nell' acconcio di fermentare, incontrano una reale fermentazione lattica.

§ II.

Separazione del principio produttore dell' acido.

Messo dunque in evidenza, che i corpi delle ostriche, collocati nell' acconcio di fermentare, provano realmente la fermentazione lattica, ne veniva subito la domanda: Se ne' corpi delle ostriche, come nel latte, vi avesse la lattina, e in caso che no, quale altro principio diverso desse ivi origine all' acido lattico? Per rispondere a questa domanda faceva d' uopo intraprendere una nuova serie di ricerche; e siccome nella fermentazione lattica delle ostriche io aveva osservato che, data una temperie di + 18° a 20° del R., l'acido si produce prontamente, e le ostriche, tratte dalle conchiglie e separatevi le branchie, tornano sensibilmente acide anche nel breve spazio di 15 a 16 ore, così eziandio senza farmi a considerare, che si tratta di materia animale sempre agevole a corrompersi, vedeva troppo chiaramente la necessità di aspettare la stagione fredda per dar mano all' esperienza.

Perciò il giorno 17 di dicembre del passato anno 1844, in cui la temperie si condusse fra i 5° e i 6° sopra lo zero del R., presi cento ostriche ben grosse, e, toltevi esattamente le branchie, dopo averle lavate una sol volta coll' acqua distillata, ne tagliai i corpi in bricioli assai minuti, e gl' infusi in tanta quantità d' acqua distillata, che avanzasse la materia animale di circa due centimetri in altezza. A quando a quando dibatteva la materia, e corso lo spazio di 24 ore colava l' infusione; spremeva bene la materia per panno lino fitto, e quindi feltrava per carta la soluzione, la quale usciva limpida, e di un colore gialliccio opalino assai elegante. Ripeteva consecutivamente quattro volte l'infusione fredda,

e feltrate ed unite tutte le soluzioni che trovai neutre perfettamente, le sponeva al fuoco in vase di porcellana finchè levassero il bollore. In tal modo ne aveva coagulato l'albumina. Allora, aspettato che il liquido freddasse, il feltrava nuovamente, e feltrato pianamente svaporava a bagnomaria, guardando la troppo necessaria pratica di difendere la bocca del recipiente con carta sugante lievemente bucata, e legata bene in giro.

Tirata innanzi la svaporazione a questo modo, come il liquido fu ridotto una metà circa, cominciarono ad apparire alla superficie pellicole abbondevoli di caseina o materia caciosa, le quali crebbero di mano in mano, finchè il liquido si ridusse ad una decima parte della quantità primitiva. Allora fa bisogno feltrarlo di nuovo per separarne la detta caseina; perocchè se si concentra la soluzione maggiormente, essa ci torna densa per modo da renderne impossibile la feltrazione. Feltrato che sia si torna a svaporare come dianzi, e ciò fino a consistenza di sciloppo. Saggiata allora questa soluzione colle carte azzurre la rinvenni acida fortemente.

Condotta a questo termine la posai in luogo quieto, per vedere se nulla si adunasse di materia cristallina; ma osservatala di giorno in giorno per quattro o cinque dì consecutivi, mi parve inutile l'attendere di vantaggio, e mi appigliai al partito di dividere la massa in due sostanze, una solubile e l'altra insolubile nell'alcoole, sostanze, che costantemente ci vengono trovate in materie di simil fatta. Stemperai adunque la massa nell' alcoole del peso in ispecie di 0,820; seguì un forte intorbidamento, sì che, aggiuntovi un dieci volumi circa, diede in fondo una materia, in vista come polverosa, di colore bianchiccio, mentre con la quiete, la soluzione alcoolica si rese limpida e di color gialliccio. Essa manifestava una reazione acida; segno che l' acido, trovato precedentemente nella soluzione acquosa ristretta, si era sciolto nell'alcoole. Il precipitato, raccolto sopra un feltro, il lavai ripetutamente coll' alcoole, cioè fino a tanto che non isciolse più nulla di materia gialla, e perchè non si agglutinasse in massa compatta, trovai bisognarci una pronta disseccazione; ma le particolarità di questa sostanza, palesateci nell'opera del disseccarla, sono di tal maniera speciali da discorrerne tutto a parte nella indicazione delle sue proprietà.

La materia precipitata si scioglie nell' acqua facilmente, e rende una soluzione lievemente torbidiccia e opalina. Essa non è acida nè alcalina, e inalba alcun che co' sali baritici e coll' acido ossalico; non punto però col nitrato argentico. Veduto per tal modo che l' alcoole avea tratto seco tutti i cloruri; sicchè

la mia sostanza non restava sconciata, che solo da tracce lievi di solfati e di calce, a mano della barite e dell' acido ossalico, vi tolsi l' acido solforico e la calce, riavendola poscia pura con precipitarla di nuovo col mezzo dell' alcoole. Questo modo di purificazione della materia fu costantemente seguito eziandio negli altri temperamenti, che sporrò appresso, tenuti per averla.

Entrato in sospetto che l'acido apparitomi nella concentrazione delle soluzioni, o infusioni, soprammentovate, fosse venuto dalla trasformazione di quel cotale principio esistente nelle ostriche, in opera del calore; siccome divisai d'instituire alcune ricerche a questo fine, e l' ottenuto era poca cosa, misi mano a procacciarmene altra quantità. Perciò il dì 8 gennajo di quest'anno 1845, pigliata una quantità in numero doppia di ostriche, cioè dugento, mi feci ad estrarne, come dianzi, il nuovo principio. Ma siccome la raddoppiata quantità della materia mi forniva altresì una quantità doppia di liquido da svaporare, ne seguì che durò sì lungamente da non lasciarmi più dubbio alcuno circa la metamorfosi incontrata da questo singolare principio in opera di un calore sostenuto a 100° C. In fatti la soluzione, o il liquido delle infusioni, inacidì grandemente, e rinvenni la materia residua alterata in modo notevole. Perduta di tal maniera la sostanza sopra la quale io faceva assegnamento d' instituire le mie ricerche, il dì 31 dello stesso mese dava opera nuovamente all' estrazione del nuovo principio con altra quantità di ostriche, limitando al possibile la misura dell' acqua e il numero delle infusioni. Ma senza far caso, che operando a questo modo incontrai una perdita ragguardevole di materia, non iscansai nemmeno lo sconcio di avere la produzione dell' acido, e conseguentemente la sostanza alquanto alterata.

Veduta la somma difficoltà di evitare la metamorfosi di questo nuovo principio, cioè la produzione dell' acido, avvisai di battere un' altra via, cioè di seccare a + 100° C. i corpi delle ostriche; seccati, di ridurli in polvere grossa, e questa polvere stemperare nella minore quantità possibile di acqua. Corse 24 ore, versai la materia sur un feltro, e colato il liquido vi mesceva, subito che n'era adunata una certa quantità, l'alcoole per averne senza più precipitata la sostanza, ch' io indagava. Siccome la feltrazione era lenta, così passato il primo liquido, io ne infondeva di nuovo, e di nuovo precipitava la materia, continuando l'opera, finchè l' alcoole non mi dava più che un lieve inalbamento. In questo modo io aveva la mia sostanza di primo tratto pressochè pura; perocchè l' albumina, comechè consolidata a + 100° C. di temperie, non era più sciolta dall' acqua; e la caseina sempre poco solubile, pochissimo o nulla riuscì solubile in questo

caso, perchè avviluppata tra le altre materie insolubili. Tuttavia fu tornata a sciogliere di nuovo, e feltrata e depurata al solito, di nuovo precipitata coll' alcoole.

Avuta la nuova sostanza in questa maniera, essa mi riuscì candida perfettamente, e sempre eguale tutte volte ch' io me la procacciai; qualità in che non mi venne mai fatto di averla col metodo primo di preparazione. Se non che deggio osservare, che i corpi delle ostriche nell' atto primo in che provano l' azione di una temperie a + 100° C. si contraggono, s' indurano e cacciano fuori, e per così dire, spremono una certa quantità di umore acquoso, il quale vuol essere incontanente separato, perchè altrimenti inacidisce assai, si tinge in forte color giallo, ne imbeve i corpi, vi s' incorpora, portando nella materia, che vogliam separare, alcun che di quello sconcio che cerchiamo di evitare.

Questa nuova sostanza io nominerò *ostreina*, per ricordare la materia animale, donde l' ho cavata la prima volta; avvegnachè io tenga per cosa certa doversi il medesimo principio organico rinvenire in altri generi parecchi di molluschi acefali, come ne' *pettini*, nei mitili, nelle pinne, ecc. Dissi di chiamarla *ostreina*, perocchè io credo che voglia essere quello, che è l' amigdalina, l' asparagina, la castorina, la salicina, ecc., agli acidi che ne derivano; e ciò a cagione della singolare proprietà da essa manifestata, e che nessun' altra sostanza manifesta, cioè di partire così la sua molecola, qualora sciolta nell' acqua si esponga per un certo tempo ad una certa temperie di + 100° C. da averne acido lattico ed una materia gialla particolare. Questo si deduce dagli avvenimenti soprallegati, ma meglio il vedremo appresso studiando alcun che le proprietà di questa nuova materia. Mi sembra dover in essa esistere il radicale dell'acido lattico, lume però che dobbiamo attendere dall' analisi elementare di questa assai speciale sostanza, ed alla quale diviso di por mano.

§ III.

Dell' ostreina.

Non ho fin qui parlato della disseccazione dell'ostreina, perocchè essa presenta in quest' opera particolarità sì speciali, che mi sembrarono dover esser notate nel farmi a descrivere le sue principali proprietà.

Ottenuta anche candida e pura in opera del processo ultimamente ricor-

dato, se adoperiamo la disseccazione spontanea all'aria, essa si conglutina, offusca e ingiallisce alquanto. Se la esponiamo ad una temperie di + 100° C. si conglutina del pari, e si sconcia vie maggiormente fino a tornarci di un colore oscuro castagnino. Adoperai di abbassare la temperie fino a + 60° C., ma non iscansai del pari che si alterasse in modo notevole; sicchè tale successo, oltrechè renderci avvertiti di dover ricorrere ad altro mezzo di disseccazione, ci rivelò la grande mobilità degli elementi in che consiste.

Per averla adunque secca debitamente, e senza che punto provasse di alterazione, anzi si tenesse nella sua perfetta interezza, diedi mano al vuoto pneumatico in questo modo: Avuta la ostreina pura e candida sopra il feltro, lasciatala quivi gocciolare al possibile, la portai sotto la campana della macchina pneumatica, quivi sovrapponendola debitamente sì che restasse ad una lievissima distanza della superficie di una bastevole quantità di cloruro calcico anidro e polveroso. Faceva il vuoto e lo iterava a quando a quando come vedeva rimetter la pressione, finchè in termine di due giorni l' ebbi secca perfettamente. Ove però si tenesse assiduamente la mano pronta a rifare il vuoto tostochè la pressione rimonta, potrebbesi averla secca con assai maggiore sollecitudine.

Avuta così, è candida perfettamente, in forma di una polvere sì leggera, che ha vista di magnesia polverizzata.

Non ha odore di sorta, e messa sulla lingua e gustata se ne ha sapore lieve, come di mandorla, che resta lungamente.

Presa di quella avuta dalle prime disseccazioni col mezzo di un moderato calore, che mi era venuta in picciole masse conglutinate, ed accostata a un lume acceso prese fuoco, e bruciò con piccola fiamma, spargendo un odore ricordante qualche poco quello del pane bruciato, e lasciando molto carbone.

Si scioglie nell' acqua con grandissima facilità ad ogni temperie. La soluzione non è acida nè alcalina; e dove si lasci alle naturali influenze, se la temperie è un po' elevata, come, esempligrazia, di + 22° del R., dopo lo spazio di ventiquattr' ore esala un lieve odore, come di colla inagrita, e dà alle carte azzurre una reazione sensibilmente acida, la quale nei successivi dì si rende di più in più notevole, non però mai molto gagliarda.

Se però si apparecchia una soluzione di *ostreina*, e vi si aggiunge a tenere opera di fermento, una piccola cosa di caseina, e la soluzione così apprestata si colloca in una stufa, serbata costantemente ad una temperie di + 18° a 20° del R., essa incontra quivi realmente la fermentazione lattica. Anzi a questo

proposito è bello vedere la infusione fredda de' corpi delle ostriche, toltavi l'albumina col mezzo dell'ebullizione, e feltrata, se poscia si abbandona a sè sotto l'influsso di una temperie come dianzi, fare precisamente quel medesimo che il latte, messo nelle medesime circostanze, cioè prima intorbidarsi, indi dare in fondo copiosi fiocchi di caseina conglutinata, e fornirci una reazione acida forte.

La cosa poi vie più particolare, che ci dà a vedere questa speciale sostanza, quella si è, che, ove si sciolga nell'acqua, e si metta in una bacinella di porcellana, coperta al solito colla carta sugante, quando si esponga ad una temperie di $+100^\circ$ C., e quivi si sostenga quanto abbisogna, rimettendo acqua distillata se viene in termine di seccare, si arriva in ultimo ad avere la ostreina risoluta intieramente in acido lattico, e in una materia gialla oscura insolubile. Questa speciale attitudine io non so che s'incontri in nessuna delle materie organiche conosciute se non ci paresse venirci ricordata o da una sostanza speciale avuta recentemente dal Pelouze ne' suoi cimenti a secco sopra l'acido lattico, onde gli riuscì di trarne diversi aggruppamenti molecolari, tra' quali uno, che intitolò *lattida*, della quale si nota la proprietà, che, fatta bollire nell'acqua, si risolve in acido lattico idrato, sicchè mi sembra probabile che nella ostreina si contenga la molecola detta *lattida*.

Se l'ostreina si bagna semplicemente con l'acqua, si gonfia pressochè a somiglianza della gelatina, si rende trasparente e in questa condizione ha quasi vista di una vera gelatina molle. Venuta così, se si lascia seccare all'aria, si conglutina in una massa giallastra, pallida, fragile, che va in polvere facilmente.

È inutile ch' io dica, richiamandoci il processo della sua preparazione, che l'ostreina è insolubile nell'alcoole, come altresì non si scioglie punto nell'etere.

Messa nell'acido solforico concentrato, si agglutina, piglia subito una tinta gialla, sudicia. Appresso diviene quasi nera, e facendo di rimescolarla, fornisce un liquido torbidiccio, bruno.

Nell'acido nitrico, come nel solforico, a principio si agglutina, ma indi, ajutando l'opera con rimescolare la materia, si scioglie senza che dia mostra d'incontrare sensibile alterazione.

Nell'acido cloridrico si scioglie bene e facilmente.

Nell'ammoniaca liquida fornisce una soluzione opalina, come nell'acqua, e vi si scioglie colla medesima facilità. Lo stesso adoperano all'incirca la potassa e la soda sciolte.

Di questa particolare sostanza non mi resta, che solo di determinare la composizione elementare, che, come estrinseca al subbietto della fermentazione lattica de' corpi delle ostriche, e del principio produttore dell' acido in quanto si attiene alla sua conoscenza e all' attitudine della sua trasformazione, dee fornirci materia di un lavoro a parte.

(*Letta nel giorno* 29 *novembre* 1851.)

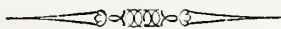
OSSERVAZIONI

DELLO

ECCLISSE SOLARE DEL GIORNO 28 LUGLIO 1851

FATTE IN DIVERSI OSSERVATORII DI EUROPA

CALCOLATE

DAL M. E. PROF. GIOVANNI SANTINI

1.° Il fenomeno di un ecclisse solare destò in ogni tempo un grande interesse, soprattutto quando egli riuscisse o totale, od anulare; ma le singolari ed inaspettate apparenze presentatesi nell' ecclisse totale dell' otto luglio 1842, e le altre non meno enigmatiche osservate in Inghilterra dal chiarissimo astronomo sig. Bayly nell' ecclisse anulare del 5 maggio 1836, davano all' ecclisse del 28 luglio 1851 la massima importanza per la fondata speranza di poter raccogliere nuovi dati intorno alla fisica tessitura dei due globi celesti per noi più interessanti, il solare cioè, ed il lunare. Infatti questo ecclisse doveva riuscire totale in molti luoghi dell'Europa settentrionale, ove trovansi stabiliti osservatorii astronomici forniti di tutto l' occorrente per qualunque genere di osservazioni, ed astronomi celebratissimi, sostenuti ed incoraggiati da governi illuminati, i quali abbracciano con alacrità ogni occasione opportuna per far progredire ogni ramo dell' umano sapere; generale era il desiderio di verificare, se intorno al globo opaco della luna, durante l' ecclisse totale, si rendessero visibili quelle prominenze piramidali d'una vivida luce rosea, che furono con sorpresa da tutti noi osservate nell' ecclisse totale del 1842, e descritte nelle relazioni di quel

tempo pubblicate nelle raccolte scientifiche; se il globo lunare si mostrasse cinto da quella bella e vivida corona luminosa rimarcata non solo nel 1842, ma anco nei precedenti ecclissi totali, dei quali ci è stata dalla storia lasciata la descrizione; se apparissero quei fili e globuli neri osservati dal sig. Bayly nel soprannominato ecclisse anulare, da esso descritto nella sua interessante relazione inserita nel X volume delle Memorie della Società astronomica di Londra. Molte discussioni erano insorte intorno a questi fenomeni; soprattutto intorno alle prominenze piramidali vedute nel 1842; ma la improvvisa ed inattesa comparsa del fenomeno, e la brevissima durata della totale oscurazione non permisero che si potessero instituire osservazioni sicure intorno alle medesime. Esse vennero generalmente riguardate come appartenenti al globo solare; io credei ravvisarle verso quella regione in cui nel giorno precedente doveva essere tramontato un ammasso di macchie; lo che avrebbe potuto far credere, che le grandi estuazioni, alle quali viene attribuita la loro formazione, avesse potuto sollevare parte della materia ignea, in forma di montagne coniche, o piramidali, le quali sorpassando l' interposto globo lunare, si rendessero a noi visibili, e dessero origine alle rimarcate apparenze. Le relazioni, che ora leggiamo nei giornali scientifici intorno alle osservazioni fatte in quei luoghi ove l' ecclisse fu totale, accennano esse pure all' apparizione di protuberanze rosee simili a quelle del 1842, e sembrano anche confermare la opinione da me allora con riserva esternata, che cioè fossero in una intima relazione colle macchie solari, siccome può vedersi nella interessante relazione datane dal sig. De-Arrest, il quale osservava in Königsberg nell' Osservatorio illustrato dai lavori del celebre Bessel (*Astron. Nachr.* n. 780).

2.° Non è mio intendimento in questo giorno, colleghi chiarissimi, di intrattenervi con relazioni istoriche intorno ai fenomeni fisici osservati in questo ecclisse, ma piuttosto di esporvi i risultamenti dei calcoli numerici da me eseguiti per ottenere la correzione delle tavole lunari, confrontando alle medesime le osservazioni fatte in Padova all' Osservatorio della nostra Università, ed in molti altri luoghi. Quando siano stati osservati i tempi del principio e fine di un ecclisse, come anche del principio e fine dell'ecclisse totale od anulare (allorquando queste circostanze, in vero rarissime, possano aver luogo) si può determinare con precisione la posizione della luna rapporto all' ecclittica, e stabilire l' istante della sua congiunzione col sole in un momento, in cui non può essere direttamente osservata e confrontata colle tavole. Così gli ecclissi del sole som-

ministrano il solo sicuro mezzo di rilevare l' errore delle tavole nei novilunii. È stato osservato da molti, e soprattutto dal ch. nostro collega cav. Carlini, che mentre le odierne tavole lunari rappresentano con fedeltà la posizione della luna, finchè essa è visibile e lontana dal sole, se ne allontanano notabilmente all'epoca dei novilunii, onde poi accade che i tempi del principio e fine di un ecclisse solare calcolato non si riscontrino esattamente coincidenti con quelli che vengono osservati; così nell'ecclisse ultimo la differenza ascese a circa un minuto di tempo, lo che annunzia già di per sè un errore nelle longitudini somministrate dalle tavole di circa un mezzo minuto. Io mi propongo in questa breve discussione d'indagare l' errore delle tavole del sig. Burkardt generalmente in uso ai nostri giorni pel calcolo delle effemeridi astronomiche, ed a tale oggetto verrò calcolando le osservazioni instituite nelle più celebrate specole di Europa; innanzi tutto farò parola del metodo tenuto in queste ricerche.

3.° E primieramente mi farò a riflettere, che la osservazione di un ecclisse solare è fenomeno sottoposto a molte difficoltà e dubbiezze. Avvicinandosi la luna al sole, essa diviene invisibile, e comunque venga calcolata la posizione del punto, in cui deve seguire il primo contatto, non riesce così facile rivolgerci l'attenzione; giacchè se impiegasi un cannocchiale di piccolo ingrandimento, per procurarsi un gran campo ed abbracciare una notevole estensione del contorno solare, non si può cogliere con sicurezza il vero principio dell' ecclisse, ed in generale, non verrà percepito, a motivo del piccolo ingrandimento, se non quando sia da alcuni secondi incominciato, e sia divenuta sensibile la intaccatura oscura operata nel sole dall' ingresso della luna; se poi si adopera un cannocchiale di un forte ingrandimento, pel piccolo campo da esso abbracciato, si corre pericolo di non rivolgerlo con precisione al punto del contatto, e che esso cada fuori del campo. Sembra quindi conveniente l' uso di cannocchiali dotati di un mediocre ingrandimento, per es. di 40 o 50, i quali abbracciano un campo notabilmente grande, e se dotati di molta chiarezza e precisione, mostrano il principio dell' ecclisse con sufficiente esattezza. Qualunque cura però si adoperi, è difficile poterlo percepire al suo vero principio; non così facilmente potendo l' osservatore assicurarsi d' una intaccatura nel disco solare, sottendente un angolo di due secondi, è palese che difficilmente potrà garantire il principio dell'ecclisse entro limiti più ristretti di 4″ di tempo.

4.° Oltre questa incertezza, ve ne ha un'altra all'incirca dello stesso ordine negli ecclissi solari, dipendente dalla incertezza, in cui versiamo intorno all' an-

golo, sotto il quale si presentano al nostro occhio i diametri del sole e della luna. È un'osservazione costante, che il nostro occhio vede gli oggetti fortemente illuminati, come ingranditi oltre il naturale, e li giudica sottendere un angolo ottico maggiore del vero. Una semplicissima dimostrazione di questo fenomeno, quanto curioso altrettanto recondito, ce la presenta l' osservazione del globo lunare poco dopo il novilunio alla sera, ed anche qualche giorno avanti il novilunio alla mattina innanzi il sorgere del sole; in queste circostanze vediamo l' intero globo lunare, di cui una piccolissima falce rivolta al sole è fortemente illuminata, mentre l' altra ricoperta da una luce debole e cinerina proveniente dai raggi solari rimandati dalla terra alla luna, e da questa con nuova riflessione ricondotti al nostro occhio, ce la presentano per intero con tutti gli accidenti della sua superficie. Ma comunque noi siamo persuasi che l' una e l' altra porzione appartengano allo stesso globo, noi giudichiamo la falce direttamente illuminata dal sole, siccome pertinente a sfera di diametro molto maggiore di quello della porzione illustrata dalla più debole luce cinerina o secondaria. Questo fenomeno è conosciuto dagli scrittori d'ottica sotto il nome di *irradiazione*, e sembra doversi ripetere da un eccitamento prodotto nella nostra retina dal forte impulso della luce, che si propaghi con forza all' intorno alle parti adjacenti al luogo occupato dalla immagine, e ne amplifichi la dimensione rappresentandocela quasi cinta da un anello egualmente illuminato. Comunque sia del modo con cui si voglia spiegare un fatto di osservazione, egli è certo che l' ampiezza di questo anello fittizio, o, per dirlo nel linguaggio dell' ottica, l' ampiezza della *irradiazione* cresce colla intensità della luce, e rapidamente diminuisce con essa. Nell'esempio della luna testè descritto, la differenza dei diametri del globo illuminato dal sole, e di quello illuminato dalla luce riflessa dalla terra si stima a circa 3 minuti ad occhio nudo; ma se osservasi mediante cannocchiali, questa differenza diminuisce coll' aumentarsi l' ingrandimento dei medesimi, per modo che sotto un ingrandimento di circa cinquanta volte, l' occhio nostro non è più valevole a percepirla.

Dietro ciò è facile comprendere, che i diametri del sole e della luna misurati per lo più col cannocchiale d' ingrandimento medio fra 40 ed 80 comprendono la irradiazione relativa a tali ingrandimenti, e li danno di qualche secondo maggiori del vero. Da ciò deve risultare nel calcolo degli ecclissi solari una differenza nel tempo del principio, dovendosi credere che il contatto avvenga avanti il tempo reale in grazia degli aumentati diametri.

5.° Il sig. du Séjour fu il primo, che mostrò doversi introdurre questa correzione nel calcolo degli ecclissi solari, e trovò doversi diminuire i semidiametri del sole e della luna di circa 3″ ½. Gli ecclissi parziali del sole somministrando soltanto due contatti, conducono a due sole equazioni di condizione per la correzione delle tavole astronomiche; supponendo pertanto le longitudini del sole ben conosciute per non abbisognare di alcuna correzione, ed assumendo le longitudini e latitudini della luna sottoposte a piccolissime correzioni, come anche i semidiametri solare e lunare, non si possono dagli ecclissi parziali di sole determinare tutte queste correzioni. Spesso addiviene, che la correzione della latitudine abbia (in sè stessa già sempre molto piccola) una piccolissima influenza, ed allora da un ecclisse parziale può con vantaggio ottenersi la correzione della longitudine della luna e della somma dei due semidiametri solare e lunare. Ma negli ecclissi totali e negli ecclissi anulari, potendosi osservare quattro contatti, si ottengono da essi quattro equazioni di condizione, mediante le quali si può risolvere completamente il problema, determinando le correzioni della longitudine e della latitudine della luna, ed anco quelle dei semidiametri del sole e della luna, sia che queste si vogliano riguardare come un effetto di una irradiazione, sia come semplici errori nella misura dei medesimi ottenuta da un medio di molte osservazioni.

L' ecclisse anulare del 7 settembre 1820, osservato da me in Padova, ed in molte altri Osservatorii dell' Italia e dell' Europa, mi somministrò opportuna occasione a ritornare su questo argomento, ed in una Memoria inserita nel XIX volume della Società Italiana intrapresi a calcolare le osservazioni fatte in molti luoghi colla vista di determinare accuratamente la correzione media delle tavole lunari, e dei semidiametri solare e lunare. Prendendo la posizione della luna dalle tavole del sig. Burkardt, e quella del sole dalle tavole del sig. Carlini, trovai la correzione media delle longitudini $= - 16'',00$, quella delle latitudini $= - 4'',08$; la diminuzione del diametro solare dato dalle indicate tavole $= - 3'',825$; quella del diametro lunare molto piccola ed $= - 0'',125$.

L' ecclisse solare dell' 8 luglio 1842, che fu presso di noi totale, ed osservato con ogni accuratezza in Padova, Milano ed in molti altri luoghi dell' Italia, Francia e Germania, fu accuratamente discusso con l' ordinaria sua sagacità dal sig. cav. Carlini in una Memoria letta all' Istituto lombardo, e pubblicata in quell' eccellente suo giornale. Facendo egli pure uso delle tavole sopraccitate, trovò la correzione media della longitudine lunare $= - 23'',7$, quella della lati-

tudine $= - 0'',39$; quanto ai semidiametri, trovò una piccola diminuzione nel semidiametro lunare ed $= - 0'',58$, ed una diminuzione pure di circa $2''$ nel semidiametro solare, la cui misura alla distanza media da adoprarsi negli ecclissi a lui risulta $= 15'.59'',78$. La misura poi del semidiametro lunare da impiegarsi pure negli ecclissi risulta per una paralasse equatoriale di $60' = 16'.20'',4$ in luogo di $16'.21'',0$ adottata nelle tavole.

Questi risultati pienamente concordano con le recenti misure prese dal defunto chiarissimo astronomo Bessel, nell' Osservatorio di Königsberg col grande eliometro dotato di un forte ingrandimento stimato $= 290$, giacchè il semidiametro solare dal sig. Bessel misurato con diligenza in occasione del passaggio di Mercurio sul sole, avvenuto nella mattina 5 maggio 1832, e ridotto alla distanza media, risultò $= 15'.59'',832$, che coincidendo quasi perfettamente con quello del sig. Carlini, dimostra al tempo stesso quanto venne di sopra asserito; sparire cioè l' irradiazione nei cannocchiali di forte ingrandimento, nei quali la intensità della luce è molto diminuita; ed in pari tempo ciò si accorda colla piccolezza delle correzioni ottenute pel diametro tavolare della luna, la cui luce è di gran lunga più debole di quella del sole.

6.° Venendo ora a discutere le osservazioni fatte in diversi luoghi dell' ecclisse, di cui ci occupiamo, brevemente riferirò le formule, che ho seguìto per la formazione delle equazioni di condizione dedotte dai tempi del principio e fine dell' ecclisse comunicati agli astronomi dalle notizie astronomiche di Altona, e da altri giornali scientifici, la dimostrazione delle quali potrà vedersi nei miei Elementi di astronomia *(Pad. 1830, Tip. del Seminario, 2ª. ediz.)*.

Sia per un qualunque contatto osservato la longitudine vera della luna calcolata dalle tavole del sig. Burkardt . . . . $= \lambda$

La latitudine vera, supposta boreale . . . . $= \beta$

La differenza fra la paralasse orizzontale della luna, e quella del sole $= \pi$

Il semidiametro orizzontale della luna . . . . $= \delta$

La longitudine del sole calcolata dalle tavole del sig. Carlini . . $= l$

Il suo semidiametro . . . . $= d$

L' AR. del mezzo del cielo . . . . $= \theta$

La latitudine geocentrica del luogo, o in altri termini, la latitudine geografica diminuita dell' angolo della verticale calcolato nell' ipotesi dell' appianamento terrestre $= \frac{1}{320}$ . . . . $= L$

L' obliquità dell' ecclitica . . . . $= \varepsilon$
La longitudine corrispondente all'AR. θ, ed alla declinazione L . . $= g$
La corrispondente latitudine . . . . $= h$.

Sarà primieramente θ il tempo siderale corrispondente al tempo medio del contatto, per cui si calcola; le quantità g, h saranno ciò che chiamasi comunemente *longitudine* e *latitudine del nonagesimo,* le quali si ottengono dalle seguenti equazioni:

$$(1)\ \text{tang.}\ z = \text{sen.}\ \theta\ \text{cot. L}; \qquad (2)\ \text{tang.}\ g = \frac{\text{tang.}\ \theta\ \text{sen}\ (z + \varepsilon)}{\text{sen}\ z}$$

$$(3)\ \text{tang.}\ h = \text{sen}\ g.\ \cot\ (z + \varepsilon)$$

e per riprova del calcolo si avrà . . . $\cos h.\ \cos g = \cos \text{L}\ \cos \theta$.

Indicando ora con λ', β', δ' la longitudine apparente, la latitudine apparente della luna, ed il suo semidiametro aumentato in ragione dell' altezza, si ottengono queste quantità dietro le seguenti equazioni:

$$(4)\ .\ \lambda' = \lambda + \frac{\pi\ \cos h}{\cos \beta}.\ \text{sen}\ (\lambda - g) + \left(\frac{\pi \cos h}{\cos \beta}\right)^2.\ \frac{\text{sen}\ 2(\lambda - g)}{2}\ \text{sen}\ 1'' + \left(\frac{\pi \cos h}{\cos \beta}\right)^3.\ \frac{\text{sen}\ 5\ (\lambda - g)}{5}\ \overline{\text{sen.}}^2\ 1'' + \text{ecc.}$$

$$(5)\ .\ .\ .\ .\ \text{N} = \text{sen}\ h.\ \text{sen}\ \beta + \cos h.\ \cos \beta.\ \cos (\lambda - g)$$

$$(6)\ .\ .\ s = (\pi\ \text{sen}\ 1'').\ \text{N} - \frac{1}{2}\ (\pi\ \text{sen}\ 1'')^2\ (1 - 3\text{N}^2);\ s'' = s.\text{R}''$$

$$(7)\ .\ .\ .\ .\ \beta' = \beta + \frac{s.''\ \text{sen}\ \beta - \pi\ (1 + s)\ \text{sen}\ h}{\cos \frac{1}{2}\ (\beta + \beta')}$$

$$(8)\ .\ .\ .\ .\ \delta' = \delta\ (1 + s).$$

Sia ora e la distanza apparente del centro della luna dal centro del sole calcolata dietro i precedenti elementi per l' istante del primo contatto. Avendo riguardo alla piccolezza dell' arco e, ed alla piccolezza della latitudine apparente β', si potrà questa calcolare mediante l' equazione:

$$(9)\ .\ .\ .\ .\ e^2 = \beta'^2 + (l - \lambda')^2;$$

comodamente poi si otterrà e mediante le due seguenti equazioni:

$$\text{tang}\ \varphi = \frac{\beta'}{(l - \lambda')}; \qquad e = \frac{(l - \lambda')}{\cos \varphi} = \frac{\beta'}{\text{sen}\ \varphi}.$$

Se le tavole fossero esatte, dovrebbe risultare $e = \delta' + d$; supponendo, che le posizioni tavolari abbisognino di una qualche correzione, rappresenteremo per

$d\lambda$, $d\beta$, $d\delta$, dd le correzioni delle quantità λ, β, δ, d, che dovranno nello stato attuale delle tavole riguardarsi come piccolissime, e come veri differenziali; che se anche le tavole solari potessero abbisognare di una qualche correzione, dovrebbe in tal caso riguardarsi $d\lambda$, come la correzione della differenza fra le longitudini della luna e del sole. Dietro ciò, si ha per determinare queste correzioni la seguente equazione, ponendo per brevità . . . $dp = d.\,(d+\delta)$

$$d+\delta' - e = \text{sen}\,\varphi.\,d\beta - \cos\varphi.\,d\lambda - dp,$$

ovvero più comodamente

$$-d\lambda + \text{tang}\,\varphi.\,d\beta = \frac{d+\delta'-e}{\cos\varphi} + \frac{dp}{\cos\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Per l' ultimo contatto invece dovrà porsi

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\beta'}{\lambda'-l}; \quad e = \frac{\lambda'-l}{\cos\varphi} = \frac{\beta'}{\text{sen}\,\varphi},$$

e quindi si avrà la equazione di condizione relativa

$$d\lambda + \text{tang}\,\varphi.\,d\beta = \frac{d+\delta'-e}{\cos\varphi} + \frac{dp}{\cos\varphi}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

In quei luoghi, nei quali l' ecclisse riesce totale, si osservano eziandio gli istanti del principio, e fine dell' ecclisse totale pei quali la distanza dei centri diviene $=\delta' - d$. Cadauno di questi contatti condurrà alla equazione di condizione,

$$\mp d\lambda + \text{tang.}\,\varphi\,d\beta = \frac{\delta'-d-e}{\cos\varphi} + \frac{dq}{\cos\varphi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (c)$$

ove ponesi per brevità $dq = d\,(\delta' - d)$.

7.° Per facilitare il calcolo delle posizioni della luna e del sole pel tempo osservato in ogni contatto, ho calcolato per un tempo arbitrario corrispondente all' incirca alla metà dell' ecclisse la posizione della luna mediante le tavole del sig. Burkardt, e la posizione del sole colle effemeridi di Berlino, che ho eziandio riscontrato essere molto prossimamente coincidente alle tavole del sig. Carlini; e da queste posizioni fondamentali col mezzo del moto orario si sono dedotte le posizioni pei tempi osservati dei contatti tanto esterni che interni della luna e del sole. Il tempo, per cui furono calcolate queste posizioni fondamentali, fu

= 8 Luglio 1852 . . . . $4^h.14'.22'',7$ T. medio in Padova
corrispondente a. . . . . 4.20.28 ,4 T. medio in Berlino
ovvero . . . . 16.36.14 ,6 T. medio delle tavole lunari del sig Burkardt.

Ottenni i seguenti risultati per la luna:

Longitudine vera di luna. . . . . = 125°.20′.12″,6
latitudine . . . . +0. 48′.59″,8

Moto orario in longit.; ora preced. = — 36′.58″,57; seg.ᵉ: = + 36′.59″,89
in lat.; ora preced. = — 3.22,77; seg.ᵉ: = + 3′.22″,43

Paral. equat.ᵉ = — 60′.30″,1; semid. oriz.ᵉ = 16′.29″,2.
variazione oraria + 0″,93 . . . . . + 0,27.
e pel sole:

Longitudine vera = 124°.53′.28″,85; moto orario = 2′.23″,47.
semidiametro di sole = 16′.46″,50; paral. oriz.ᵉ = 8″,45.

Osservazione di Padova.

8.° L' ecclisse in Padova fu parziale e di circa 9,6 digiti come era stato preannunziato in tutte le effemeridi; il giorno fu variabile; al mattino era sereno, indi verso le 6^h antimeridiane si offuscò il cielo per molte nubi, rimanendo tuttavia l' orizzonte all' intorno netto e sereno. Cresciuta l' attività dei raggi solari, disperse le nubi, ritornò limpido il cielo. La temperatura della giornata fu raddolcita da fresco venticello, che, durante l' ecclisse, divenne anche troppo forte, specialmente sul finire, per modo che la violenza del vento facendo oscillare il cannocchiale, di cui io mi serviva, il contatto finale rimase incerto di forse 2″ o 3″.

Al momento della massima oscurazione, la luce solare si trovò molto indebolita; notevole sopra tutto era la tinta dei diversi oggetti sparsi nel lontano orizzonte, difficile a descriversi; essa generava nell' animo un senso di abbattimento e di tristezza, di cui bene rammento averne provato un altro simile all'epoca dell' ecclisse anulare del 7 settembre 1820 da me osservato dal medesimo luogo in questo Osservatorio, ed in cui lo scadimento della luce fu più rimarchevole; la tinta aerea, e degli oggetti più cupa, ma attinente all' indole delle stesse gradazioni. Il senso morale fu per mio sentimento nell' ecclisse totale del 1842 di un' altra indole e di altra natura, sebbene è a dirsi che esso fu molto modificato dalla novità del grandioso spettacolo e degli stupendi fenomeni apparsi inopinatamente agli osservatorii.

Quanto all' indole della tinta aerea sembrava inclinare ad un cupo verde perdentesi nell' azzurro, ed allo stesso modo gli oggetti dell'orizzonte si mostra-

vano in un verde melanconico, sopra cui fosse stata gettata una piccola quantità di azzurro oscuro. Gli uccelli, e soprattutto le rondini, andavano volitando confusamente per l' aria, dimostrando un' insolita inquietudine, come destata in loro dall' aspettativa di un vicino disastro. Questo stato di tristezza, rimarcato e sentito da tutti gli astanti, durò per circa un quarto d'ora intorno al momento della massima oscurazione; dopo di che, rinvigorendosi i raggi solari, visibilmente scorgevasi il ritorno dello stato ordinario, innanzi al quale a gran passi si andavano ritraendo la tristezza ed il languore.

Si tentò di osservare la variazione termometrica dei raggi solari, al quale oggetto si adoperarono tre termometri, due dei quali costruiti dal nostro abile meccanico Paolo Rocchetti, avevano uno il bulbo colorito con nero d' avorio; l' altro in bianco con ossido di piombo; il terzo di vetro naturale costruito dal sig. canonico Bellani di Monza. Furono collocati entro una piccola cassetta di legno, aperta verticalmente da una parte, ed alla stessa distanza dalle pareti della cassetta. Volgevansi alternativamente all'aperta campagna dalla parte opposta ai raggi solari, ed al sole stesso per notare la temperatura dell' aria e quella dei raggi solari, marcando il tempo siderale ed il grado di ciaschedun termometro. Erasi incaricato di queste osservazioni l' egregio mio collega Trettenero; le distrazioni cagionate dai presenti in gran numero alla osservazione dell' ecclisse non permisero d' introdurvi tutta quella regolarità che si sarebbe desiderato.

Ad ogni modo stimo conveniente di riferirle, potendosi da esse argomentare di quanto andasse variando la temperatura nei diversi periodi dell' ecclisse.

Tempo siderale	Termometro con bulbo nero	Termometro con bulbo bianco	Termometro comune	Rivolti al	Stato del cielo
11h.39'.44"	22°,1	21°,5	21,5	ombra	sole velato
40.54	27,6	23,1	25,5	sole	sereno
43.39	32,0	25,6	27,7	sole	sereno
52.19	23,0	21,9	21,6	ombra	sole velato
12. 5. 4	21,6	21,3	21,1	ombra	sole velato
12. 4	28,2	24,4	25,3	sole	sereno
26. 4	28,8	26,4	25,5	sole	sereno
32.30	27,7	25,2	24,8	sole	sereno
40. 0	26,7	25,1	24,2	sole	sole velato
47.30	21,3	20,8	20,3	ombra	sereno
56. 0	25,1	22,7	23,2	sole	sereno
13. 4.30	27,6	24,3	24,6	sole	sereno
19. 0	30,0	26,3	26,0	sole	sereno
27.20	32,0	26,7	27,0	sole	sereno
56.30	32,0	26,9	27,5	sole	sereno

9.° Dopo di avere riferito le circostanze fisiche, nelle quali ebbe luogo presso di noi l' ecclisse, riferiremo i tempi del primo ed ultimo contatto osservati nella nostra specola astronomica. Presero parte a queste osservazioni eziandio i chiarissimi nostri colleghi *Turazza*, *Minich*, *Maggi* e *Bellavitis*, ed i tempi da essi osservati entro ristrettissimi limiti si trovarono coincidenti con quelli osservati da me mediante un eccellente acromatico di Fraunhofer, a cui erasi adattato l' oculare ingrandimento 85 e dal sig. Trettenero, il quale osservò con un eccellente cannocchiale dialittico di Plössl di 34 pollici di distanza focale, usando un oculare astronomico del medio ingrandimento circa 50. I tempi da noi osservati furono i seguenti:

	Tempo siderale		T. medio	
Principio dell' ecclisse . . .	11h.37'.0",0	=	3h.14',22",7	— *Santini*
	11.37.1,5	=	3.14.24,2	*Trettenero*
Fine dell' ecclisse	13h.40'.37,3	=	5.17.39,7	*Santini*
	13.40.40,3	=	5.17.42,7	*Trettenero*

Un forte vento, all' urto del quale trovavasi esposto il mio cannocchiale, rendeva incerto il fine di qualche secondo.

Prendendo il medio dei tempi osservati da me e dal sig. Trettenero, e deducendo dalle posizioni fondamentali del sole e della luna sopra riferite al § 7 le loro posizioni geocentriche ed apparenti per il tempo del principio e del fine, ottenni per il calcolo delle equazioni di condizione i seguenti valori:

	Principio	Fine
$\lambda =$	124°.43'.14",46 —	125°.59'.14",95
$\beta =$	+0.45.37,07	+0.52.33,40
$l =$	124.51. 5,42	124.56. 0,23
L =	45°.12',6	
$\theta =$	174.15,0	205. 9,33
$g =$	153.38,8	179.18,0
$h =$	38.31,9	50.22,8
$\lambda' =$	124.20.10",23	125.28.12",86
$\beta' =$	+ 8.11,19	+ 6.10,01
$\delta'+d =$	32.27,53	32.22,67
$e =$	31.59,10	32.49,36

$$-d\lambda + 0{,}2648.d\beta = +29'',41 + 1{,}0345.dp$$
$$+d\lambda + 0{,}1959.d\beta = -27,20 + 1{,}0190.dp.$$

Osservazione fatta in Bruxelles.

10.° In Bruxelles, l' ecclisse fu parziale ed osservato dai signori Quetelet, Bouvy e Beaufort. Il medio degl' istanti da essi osservati e riferiti nelle *Astr. Nachr.* N. 771 è il seguente:

Principio	3h.27'.24",47	Tempo medio di Bruxelles.
Fine.	4.36.39,73	

La posizione geografica di quell' osservatorio desunta dalle effemeridi di Berlino è la seguente:

Differenza dei meridiani con Berlino . .	= 36'.7",9
Latitudine	= 50°.51'.10",9,

donde deducesi L $=$ 50°.39′,93. Dietro questi elementi si ottiene

	pel principio	pel fine
θ =	162°.29′,78	194°.53′,90
g =	141 .23 ,35	165 .30 ,17
h =	39 .19 ,15	50 .44 ,90
λ =	124°.32′.47″,90	125 .52 .28″,35
l =	124 .50 .24 ,90	124 .55 .33 ,96
β =	+ 44 .39 ,80	+ 51 .56 ,32
λ' =	124 .19 . 7 ,43	125 .27 .57 ,58
β' =	+ 6 .35 ,52	+ 5 .19 ,43
$\delta'+d$ =	32 .28 ,42	32 .24 ,54
e =	31 .58 ,70	32 .49 ,73

$$-\,d\lambda + 0{,}2107.d\beta = +\,30'',37 + 1{,}0220.dp$$
$$+\,d\lambda + 0{,}1643.d\beta = -\,25\,,53 + 1{,}0134.dp.$$

Osservazione di Amburgo.

11.° Venne osservata in Amburgo dai sigg. Rümker e Niebour (*Astr. Nachr.* N. 771). Il medio degl' istanti da essi marcati è il seguente:

Principio	2^h.50′.16″,1	T. medio di Amburgo.
Fine	4 .56 .46 ,7	

La posizione geografica di Amburgo dalle effemeridi di Berlino è la seguente; differenza dei meridiani con Berlino $=$ + 13′.41″,4; latitudine $=$ 53°.33′.5″,0.

Quindi formasi L $=$ 53°.22′,1 ; ed in seguito:

	pel principio	pel fine
θ =	168°.12′,70	199°.55′,55
g =	143 .33 ,54	166 .40 ,26
h =	43 .26 ,65	54 .47 ,80
λ =	124 .33 . 3″,37	125 .51 . 2″,33
l =	124 .50 .25 ,89	124 .55 .28 ,40

$\beta =$	$+\ 44'.41'',22$	$+\ 51'.48'',47$
$\lambda' =$	$124°.18.38\ ,70$	$125°.28.\ 9\ ,64$
$\beta' =$	$+\ \ 3.29\ ,29$	$+\ \ 2.35\ ,99$
$\delta'+d =$	$32.27\ ,47$	$32.23\ ,11$
$e =$	$31.58\ ,64$	$32.47\ ,44$

$$-\ d\lambda + 0,1097.d\beta = +\ 29'',00 + 1,0060.dp$$
$$+\ d\lambda + 0,0795.d\beta = -\ 24\ ,41 + 1,0032.dp$$

Osservazione di Kremsmünster.

12.° In Kremsmünster venne osservato l' ecclisse dai sigg. Resluber, Fellocher e Lettenmayr. Le loro osservazioni bene concordanti danno (preso il medio degl'istanti osservati) i seguenti tempi pel principio e fine (*Astr. Nachr.* N. 772).

Principio.	$3^h.18'.53'',3$	T. medio di Kremsmünster.
Fine	$5\ .23\ .22\ ,4$	

Differenza dei meridiani con Berlino $= -\ 2'.57'',0$

latitudine geografica. . $= 48°.3'.24''$
latitudine geocentrica $= L = 47\ .52\ .0$

Quindi si formano i seguenti valori:

	pel principio	pel fine
$\theta =$	$175°.22',5$	$206°.54',9$
$g =$	$152\ .43\ ,26$	$178\ .33\ ,12$
$h =$	$41\ .12\ ,35$	$53\ .\ 7\ ,15$
$\lambda =$	$124\ .40\ .26'',34$	$125\ .57\ .10'',64$
$l =$	$124\ .50\ .54\ ,54$	$124\ .55\ .52\ ,20$
$\beta =$	$+\ 45\ .21\ ,62$	$+\ 52\ .22\ ,06$
$\lambda' =$	$124\ .18\ .52\ ,88$	$125\ .28\ .15\ ,51$
$\beta' =$	$+\ \ 5\ .44\ ,85$	$+\ \ 4\ .11\ ,18$
$\delta'+d =$	$32\ .27\ ,12$	$32\ .22\ ,17$
$e =$	$32\ .32\ ,37$	$32\ .39\ ,50$

$$-d\lambda + 0{,}1794.d\beta = -\ 5'',33 + 1{,}0160.dp$$
$$+d\lambda + 0{,}1293.d\beta = -17\ ,47 + 1{,}0083.dp.$$

Osservazione di Roma.

13.° Il P. Secchi osservò in Roma l' ecclisse al modo seguente (*Astr. Nachr.* N. 773.):

Principio	$3^h.24'.32'',7$	T. medio di Roma.
Fine	$5.25.\ 7\ ,2$	

La differenza dei meridiani con Berlino è $= + 3'.40'',8$

La longitudine geografica $= 41^\circ.53'.51'',6$

donde si forma $L = 41^\circ.42',45$.

Quindi si ottengono i seguenti valori:

	pel principio	pel fine
$\theta =$	176°.47′,85	207°. 1′,42
$g =$	157 .52 ,25	183 .59 ,02
$h =$	36 .25 ,40	48 .11 ,50
$\lambda =$	124 .48 . 0″,66	126 . 2 .20″,56
$l =$	124 .51 .23 ,91	124 .56 .12 ,23
$\beta =$	+ 46 . 3 ,23	+ 52 .50 ,33
$\lambda' =$	124 .21 .14 ,20	125 .28 . 3 ,80
$\beta' =$	+ 10 .23 ,78	+ 7 .59 ,56
$\delta'+d =$	0 .32 .27 ,34	0 .32 .21 ,24
$e =$	31 .54 ,22	32 .50 ,78

$$-d\lambda + 0{,}3447.d\beta = +35'',03 + 1{,}0578.dp$$
$$+d\lambda + 0{,}2509.d\beta = -30\ ,45 + 1{,}0310.dp.$$

Osservazione fatta in Marburg.

14.° Osservarono l' ecclisse in Marburg i signori *Schönfeld, Lesser, Gerling* e *Nicolai.* Quanto al principio, fuvvi fra il sig. Schönfeld ed i suoi col-

leghi una differenza di 20″ di tempo, senza che si potesse comprendere donde derivasse *(Astron. Nachr.)*

Ho pertanto istituito un calcolo separato per il tempo osservato dal sig. Schönfeld e pel medio osservato dagli altri, da cui sembra risultare non essersi insinuate che leggere differenze di stima nel valutare il tempo del primo contatto. Ecco gli elementi di un tale calcolo.

Differenza dei meridiani con Berlino . . . = + 18′.30″
Latitudine geografica = 50°.48′.40″; L = 50°.37′,42.

Principio secondo Schönfeld	2ʰ.49′. 2″,81	T. medio del luogo.
medio degli altri .	2 .49 .20 ,11	
Fine; medio di tutti . .	4 .56 . 9 ,28	

Quindi i seguenti valori numerici:

	1.° principio	2.° principio	Fine
θ =	167°.54′,5	167°.58′,87	199°.46′,37
g =	145 .17 ,7	145 .20 ,80	169 .28 ,97
h =	41 . 0 ,7	41 . 2 ,20	52 .36 ,80
λ =	124 .35 .15″,69	124 .35 .26″,35	125 .53 .37″,22
l =	124 .50 .34 ,47	124 .50 .35 ,16	124 .55 .38 ,41
β =	+ 44 .53 ,34	+ 44 .54 ,32	+ 52 . 2 ,60
λ' =	124 .18 .59 ,69	124 .19 . 8 ,43	125 .28 .11 ,83
β' =	+ 5 .26 ,28	+ 5 .26 ,02	+ 4 .11 ,95
$\delta+d$ =	32 .27 ,81	32 .27 ,81	32 .23 ,64
e =	32 . 2 ,65	31 .54 ,70	32 .49 ,54

$$(1) \ldots \quad -d\lambda + 0{,}1722.d\beta = +25'',53 + 1{,}0147.dp$$
$$(2) \ldots \quad -d\lambda + 0{,}1728.d\beta = +33\ ,60 + 1{,}0149.dp$$
$$(3) \ldots \quad +d\lambda + 0{,}1290.d\beta = -26\ ,14 + 1{,}0083.dp.$$

donde si fa palese, che il medio delle prime due equazioni è in armonia con le simili equazioni di condizione dedotte dalle osservazioni istituite in altri luoghi.

Osservazioni di Vienna e di Praga.

15.° In Vienna le nubi impedirono di vedere il fine dell' ecclisse, ed in Praga mancò il principio e venne diligentemente osservato il fine dai signori *Jelinek, Safarik* e *Lukus* (Vedansi le *Astron. Nachr.* N. 775 - 780). Si è assunto nel calcolo di queste osservazioni la differenza dei meridiani fra Berlino e Vienna $= -11'.56'',4$; fra Berlino e Praga $= -4'.8'',6$.

La latitudine di Vienna $= 48°.12'.35'',5$; $L = 48°.1',18$
di Praga $= 50.15.18,5$ $L = 50.4,02$,

Principio dell' ecclisse in Vienna $= 3^h.30'.25'',2$.
Fine dell' ecclisse in Praga $= 5.21.15,87$.

Quindi si formano i seguenti valori numerici:

	per Vienna	per Praga
$\theta =$	178°.15',58	206°. 3',1
$g =$	154.48,03	175.22,66
$h =$	42.21,80	54.39,00
$\lambda =$	124.42. 0'',32	125.55. 8'',46
$l =$	124.51. 0,62	124.55.44,30
$\beta =$	45.30,29	52.10,92
$\lambda' =$	124.19.25,97	125.28.28,65
$\beta' =$	+ 4.57,51	+ 3. 3,97
$\delta'+d =$	32.26,69	32.22,59
$e =$	31.57,87	32.52,95

$$-d\lambda + 0,1570.d\beta = +29'',17 + 1,0123.dp$$
$$+d\lambda + 0,0937.d\beta = -30,49 + 1,0044.dp.$$

Osservazione fatta in Milano.

16.° La differenza dei meridiani fra Berlino e Milano è $= +16'.49'',2$; la latitudine geografica di Milano è $= 45°.28'.0'',7$; donde formasi

$$L = 44°.16',53.$$

L' ecclisse fu osservato dai signori *Frisiani*, *Stambucchi*, *Capelli* e *Buzzetti*, e gl' istanti del primo ed ultimo contatto sono riferiti nelle effemeridi di Milano pel 1852 al modo seguente:

Principio dell' ecclisse . .	$= 3^h.1'.31'',0$	T. medio di Milano.
Fine	$= 5.6.0,3$	

Dietro ciò si ottengono i seguenti valori:

	pel principio	pel fine
$\theta =$	171°. 2',02	202°. 14',46
$g =$	151. 7,10	176.37,10
$h =$	37.27,30	49.16,27
$\lambda =$	124.41.55'',02	125.58.39,50
$l =$	124.51. 0,27	124.55.57,94
$\beta =$	+ 45.29,81	+ 52.30,16
$\lambda' =$	124.20.22,23	125.28. 1,49
$\beta' =$	+ 8.58,23	+ 6.55,83
$\delta'+d =$	32.27,99	32.23,26
$e =$	31.55,18	32.48,00

$$-d\lambda + 0{,}2928.d\beta = +34'',19 + 1{,}0420.dp$$
$$+d\lambda + 0{,}2162.d\beta = -25,31 + 1{,}0231.dp.$$

Osservazione di Parigi.

17.° All' osservatorio di Parigi fu osservato l' ecclisse dai signori *Villarceau*, *Butillon*, *Mathieu*; il medio dei tempi notati da ciascheduno riferiti nel *Compte rendu* pel mese di settembre dà

Principio dell' ecclisse. .	$2.^h20'.54'',0$	T. medio di Parigi.
fine	4. 30. 41,47	

Latitudine dell' Osservatorio $= 48°.50'.13'',0$; $L = 48°.38',83$.
Quindi si formano i seguenti valori numerici:

	Principio	Fine
$\theta =$	160°.52′,27	193°.24′,45
$g =$	141 .26,92	166 . 9,96
$h =$	37 . 2,70	48 .33,28
$\lambda =$	124 .33 .46″,82	125 .53 .47″,19
$l =$	124 .50 .28 ,70	124 .55 .39 ,05
$\beta =$	+ 44 .45 ,19	+ 52 . 3 ,51
$\lambda' =$	124 .19 .37 ,59	125 .27 .46 ,17
$\beta' =$	+ 8 .34 ,65	+ 6 .56 ,42
$\delta'+d =$	32 .28 ,86	32 .24 ,85
$e =$	32 . 1 ,35	32 .51 ,60

$$- d\lambda + 0{,}2780.d\beta = + 28'',55 + 1{,}0379.dp$$
$$+ d\lambda + 0{,}2161.d\beta = - 27\ ,37 + 1{,}0231.dp.$$

Osservazione di Königsberg.

18.° In Königsberg l' ecclisse fu totale, e venne osservato dal Sig. *De-Arrest*, il quale porge delle sue osservazioni sì fisiche che astronomiche una interessante relazione nel N. 780 delle Notizie astronomiche di Altona. Divenendo al momento della totale oscurazione molto piccola la distanza dei centri del sole e della luna, l' errore delle tavole avrebbe potuto esercitare una sensibile influenza nei coefficienti delle equazioni di condizione relative ai due contatti interni. Ho stimato pertanto conveniente di correggere, dietro una prossima cognizione dei valori di $d\lambda$, e $d\beta$ ottenuta con un calcolo approssimato, le posizioni della luna date dalle tavole, dopo di che ho proceduto per ogni contatto al calcolo delle equazioni di condizione dietro le formule generali sopra riferite. I valori prossimi impiegati alla correzione delle tavole furono

$$d\lambda = - 29'',24;\ d\beta = - 3'',76.$$

Si è adottato la differenza dei meridiani con Berlino data nelle effemeridi di Berlino ed $= - 28'.25'',0$;

La latitudine $= 54°.42'.50'',4$, donde $L = 54°.32',0$.

I tempi poi dei contatti osservati furono i seguenti :

1.° Contatto = 3^h.38'.11''
2.° Contatto = 4 .38 .58
3.° Contatto = 4 .41 .53
4.° Contatto = 5 .38 .32
} Tempo medio di Königsberg.

Dietro le superiori avvertenze si ottengono i seguenti risultati:

	1.° Contatto	2.° Contatto	3.° Contatto	4.° Contatto
θ = ...	180°.11',67	195°.25',92	195°.54',80	210°.21',86
g = ...	150 .56 ,50	161 .55 ,33	162 .16 ,95	173 .42 ,84
h = ...	48 .24 ,60	53 .57 ,50	54 . 8 ,40	59 .45 ,40
λ = ...	124 .36 . 8'',90	125 .13 .36'',43	125 .15 .24'',28	125 .50 .20',07
l = ...	124 .50 .39 ,78	124 .53 . 5 ,12	124 .53 .12 ,11	124 .55 .27 ,55
β = ...	0 .44 .57 ,11	0 .48 .22 ,50	0 .48 .32 ,36	0 .51 .43 ,52
λ' = ...	124 .18 .13 ,76	124 .52 .15 ,38	124 .53 .59 ,08	125 .27 .41 ,70
β' = ...	— 0 . 4 ,77	— 0 .19 ,55	— 0 .16 ,52	— 0 .19 ,23
$\delta' \pm d$ = ...	32 .25 .86	0 .50 ,96	0 .50 ,94	32 .21 ,89
e = ...	32 .26 ,02	0 .53 ,44	0 .50 ,76	32 .14 ,23

$$(1) \quad . \; . \; . \quad - d\lambda - 0{,}00245.d\beta = - 0'',16 + 1{,}0000.dp$$
$$(2) \quad . \; . \; . \quad - d\lambda - 0{,}39305.d\beta = - 2\,,65 + 1{,}0744.dq$$
$$(3) \quad . \; . \; . \quad + d\lambda - 0{,}34440.d\beta = + 0\,,51 + 1{,}0574.dq$$
$$(4) \quad . \; . \; . \quad + d\lambda - 0{,}00994.d\beta = + 7\,,66 + 1{,}0000.dp.$$

19.° Apparecchiate le equazioni di condizione, si dovrebbe procedere a determinare mediante le medesime i valori delle correzioni $d\lambda$, $d\beta$, dp, dq. Una leggera attenzione tosto mostra la pericolosa influenza, che esercitano i piccoli errori delle osservazioni nei valori di $d\beta$, e quindi in quelli di dp, e di dq, dai quali dipendono le correzioni dei semidiametri solare e lunare.

Oltre a ciò, la sola osservazione di Königsberg potrebbe somministrare una soluzione completa del problema, non essendomi avvenuto d' incontrare altre osservazioni complete dell' ecclisse totale instituite in luoghi di posizione geografica bene conosciuti. Se tentare si volesse di determinare i valori di tutte quattro le correzioni col mezzo delle equazioni di condizione esposte all' articolo precedente, si caderebbe in risultati inammissibili, poichè si troverebbe $d\beta = 92''$

circa; $d\lambda = + 3'',6$; $dp = - 3'',2$; $dq = + 35''$ circa; si deve da ciò concludere, che i piccoli errori delle osservazioni esercitano un' influenza troppo sensibile per la estrema piccolezza dei coefficienti di $d\beta$, e quindi conviene rinunziare a determinare mediante le osservazioni del presente ecclisse i valori di dp, e di dq, i quali opportunamente si potranno assumere dalle discussioni riferite di sopra § 5.° intorno alla misura media dei semidiametri da impiegarsi nel calcolo degli ecclissi.

Da quanto ivi abbiamo detto, la media misura del semidiametro solare risultante dalle misure di Bessel, e dalla determinazione del sig. Carlini, è $= 15'.59'',8$, che ridotto alla distanza solare del 28 luglio (il cui log. era $= 0.006570$) diviene $= 15'.45'',39$. Essendosi assunto superiormente $= 15'.46'',50$, dovrà ammettersi una correzione $= - 1'',11$. Parimenti, il semidiametro lunare pegli ecclissi corrispondente alla paralasse equatoriale $60'$ fu assegnato $= 16'.20'',4$, che ridotto alla paralasse attuale di $60'.30'',1$ diviene $= 16'.28'',60$. Essendosi poi assunto nel calcolo $= 16'.29'',2$, conviene applicarvi una correzione $= - 0'',6$. Dietro ciò si ottiene

$$dp = - 1'',71\,;\quad dq = + 0'',51.$$

Adottando questi valori per dp e dq, otterremo con molta precisione dalle superiori equazioni la correzione della longitudine e della latitudine delle tavole lunari per l' istante del novilunio. Primieramente dovremo risolvere separatamente le equazioni relative alla osservazione di Königsberg, poichè nel loro calcolo abbiamo già introdotto una prossima correzione alle posizioni tavolari. Sostituiti i superiori valori di dp e di dq, esse divengono

$$\begin{aligned}
&(1)\ \ldots\ - d\lambda - 0{,}00245.d\beta = - 1'',87\\
&(2)\ \ldots\ - d\lambda - 0{,}39305.d\beta = - 2\,,10\\
&(3)\ \ldots\ + d\lambda - 0{,}34440.d\beta = + 1\,,05\\
&(4)\ \ldots\ + d\lambda - 0{,}00994.d\beta = + 5\,,95.
\end{aligned}$$

Si prenda la somma di queste equazioni ed otterrassi direttamente $d\beta = + 4'',04$.

Indi si sommino di nuovo dopo di avere reso positivo il coefficiente di $d\lambda$ nelle prime due, e sostituito l'ottenuto valore di $d\beta$, si avrà $d\lambda = + 2'',70$.

Questi valori, sostituiti nelle superiori equazioni, danno per ordine i seguenti piccoli errori:

$$-0'',89\,;\quad -1'',19\,;\quad +0'',26\,;\quad -3'',29 \qquad (1).$$

Sarà pertanto, dietro l' osservazione di Königsberg, l' errore delle tavole lunari del sig. Burkardt

in longitudine . . . . $= -29'',24 + 2'',70 = -26'',54$
ed in latitudine . . . $= -\;3,76 + 4,04 = +\;0,28.$

20.° Si riprendano ora le equazioni di condizione ottenute nei luoghi, ove l' ecclisse fu parziale, ed escludendo l' osservazione di Kremsmünster, che sembra troppo discordare dalle altre, e prendendo il medio delle due equazioni relative al primo contatto per Marburgo, si forma il prospetto seguente:

per Padova . . . . $-d\lambda + 0,2648.d\beta = +29'',41 + 1,0345.dp$
$+d\lambda + 0,1959.d\beta = -27,20 + 1,0190.dp$
Bruxelles . . . $-d\lambda + 0,2107.d\beta = +30,37 + 1,0220.dp$
$+d\lambda + 0,1643.d\beta = -25,53 + 1,0134.dp$
Amburgo . . . $-d\lambda + 0,1097.d\beta = +29,00 + 1,0060.dp$
$+d\lambda + 0,0795.d\beta = -24,41 + 1,0032.dp$
Roma . . . . . $-d\lambda + 0,3447.d\beta = +35,03 + 1,0578.dp$
$+d\lambda + 0,2509.d\beta = -30,45 + 1,0310.dp$
Marburgo . . . $-d\lambda + 0,1725.d\beta = +29,57 + 1,0148.dp$
$+d\lambda + 0,1290.d\beta = -26,14 + 1,0083.dp$
Vienna . . . . $-d\lambda + 0,1570.d\beta = +29,17 + 1,0123.dp$
Praga . . . . . $+d\lambda + 0,0937.d\beta = -30,49 + 1,0044.dp$
Milano. . . . $-d\lambda + 0,2928.d\beta = +34,19 + 1,0420.dp$
$+d\lambda + 0,2162.d\beta = -25,31 + 1,0231.dp$
Parigi . . . . . $-d\lambda + 0,2780.d\beta = +28,55 + 1,0379.dp$
$+d\lambda + 0,2161.d\beta = -27,37 + 1,0231.dp$

La somma di queste equazioni darà

$$3,1758.d\beta = 28'',39 + 16,3528.dp,$$

e quindi . . . $d\beta = 8'',9396 + 5,1493.dp$ . . . . (a)

(1) La condizione degli errori residui non migliorerebbe gran fatto, se si facesse uso, per risolvere le stesse equazioni, del metodo dei minimi quadrati. Si troverebbe in tal guisa $d\lambda = +2'',73$; $d\beta = +1'',09$, i quali valori sostituiti nelle precedenti equazioni lasciano per ordine in luogo di zero al secondo membro i valori seguenti: $-0'',86$; $-0'',20$; $+1'',31$; $-3'',23$. Le somme dei quadrati nei due sistemi $13'',03$; $12'',92$ (l' ultimo appartenendo al sistema dei minimi quadrati).

In seguito, cambiando i segni a tutti i termini delle equazioni relative al primo contatto, e poscia sommando di nuovo, avremo

$$16\, d\lambda - 0{,}4846.d\beta = -462'',19 - 0{,}1018.dp,$$

ovvero (dividendo per 16, e sostituendo il precedente valore di $d\beta$)

$$d\lambda = -28'',616 + 0{,}1497.dp \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Ritenendo ora $dp = -1'',71$, come sopra fu stabilito, avremo per $d\lambda$ e $d\beta$ i valori seguenti:

$$d\lambda = -28'',872\,; \quad d\beta = +0'',134,$$

che molto prossimamente concordano con quelli ottenuti dalla osservazione di Könisberg; che se piacerà di riunire in un solo medio i due risultamenti, osservando che quelli derivano dalla considerazione di quattro contatti, e questi da sedici, avremo

$$d\lambda = \frac{-28'',872 \times 16 - 26'',54 \times 4}{20} = -28'',406\,;$$

$$d\beta = \frac{+0,''134 \times 16 + 0{,}28 \times 4}{20} = +0'',163.$$

Se nelle superiori equazioni si sostituiscono per $d\lambda$, $d\beta$, dp le correzioni medie ottenute, dopo di avere portato nel primo membro i secondi, si ottengono in luogo dello zero i seguenti valori dipendenti dalle piccole incertezze delle osservazioni del principio e fine dell' ecclisse.

Per Padova	$+0'',81$ $+0\;,51$	; per Bruxelles	$-0'',18$ $+1\;,12$
per Amburgo	$+1\;,14$ $-2\;,64$	; per Roma	$-4'',77$ $+3\;,85$
per Marburgo	$+0\;,60$ $-0\;,52$	; per Vienna per Praga	$+0\;,99$ $+3\;,96$
per Milano	$-3\;,96$ $-1\;,31$	; per Parigi	$+1\;,61$ $+0\;,75$.

21.° Assegneremo per ultimo il tempo del novilunio, e la posizione vera della luna per quell' istante al modo seguente:

Tempo medio fondamentale, per cui furono calcolate le posizioni della luna, e del sole, riferito al meridiano di Berlino (sopra §§ 7) $= 4.^h20'.28'',4$

Longitudine della luna calcolata . . .	=	125°.20'.12'',6
correzione sopra ottenuta		— 28 ,41
longitudine di luna corretta	=	125 .19 .44 ,19
longitudine di sole	=	124 .53 .28 ,85
differenza	=	26'.15'',34

Moto orario della luna per l' ora precedente . .	=	36'.58'',57
« « del sole		2 .23 ,47
Moto orario relativo		34 .35 ,10.

Quindi si ottiene il tempo trascorso dopo il novilunio = 45'.32''99.

Dietro ciò si ha il tempo medio del novilunio pel meridiano di Berlino, 28 luglio 1851 = $3^h.34'.55'',41$ essendo la longitudine della luna e del sole rapporto all' equinozio vero. . . . . = 124°.51'.39'',93;
la latitudine della luna . . . . = + 0 .48 .59 ,96.

Osservazione di Danzica.

22.° Porremo fine a queste discussioni intorno all' ecclisse solare del 28 luglio 1851, col riferire eziandio il calcolo delle osservazioni instituite nell' osservatorio della scuola nautica di Danzica, ove l' ecclisse fu totale, ed osservato con molta diligenza dai signori ***Albrecht*** direttore di quell' Instituto, ***Domke***, ***Schütz***, ***Schröter*** e ***Reinbrecht***.

Le osservazioni dei contatti riferite nel N. 788 delle Notizie astronomiche in tempo medio del luogo sono fra loro molto bene d' accordo, e prendendo il medio dei tempi stimati da ciaschedun osservatore, si hanno i seguenti risultamenti. :

1.° Contatto	$3^h.30'.14'',0$	Tempo medio di Danzica.
2.° Contatto	4 .31 .36 ,76	
3.° Contatto	4 .34 .37 ,35	
4.° Contatto	5 .31 .44 ,22	

La posizione geografica di Danzica non mi sembrò così bene determinata da potere far concorrere direttamente questa osservazione colle altre per determinare gli errori delle tavole. In fatti, per la sua longitudine riportata all'osservatorio di Berlino, si hanno le seguenti determinazioni alcun poco fra loro discordanti.

1.° Il sig. Wurm, da un ecclisse solare e da cinque occultazioni in vero fra loro non troppo concordanti (*Monatl. Corresp.* B. XXVI, pag. 180), assegna la differenza con Parigi $= 1^h.5'.11'',3$, locchè dà rapporto a Berlino	$-20'.57'',3$
2.° Il sig. Albrecht dietro l'ecclisse solare del 1842 la trova	$-21.\ 1\ ,5$
3.° Il sig. Hansen, a cui sembra attenersi il sig. Encke nelle sue effemeridi, dà	$-21.\ 9\ ,5$

(Vedansi *Astron. Nachr.* N. 790).

Nel calcolo delle equazioni di condizione, che si possono dedurre dai tempi dei contatti superiormente osservati ho stimato conveniente introdurre una piccola correzione alla longitudine geografica. In generale, se questa venga indicata per τ, e s' indichi la sua correzione per $d\tau$, ritenendola così piccola che non possa introdurre una variazione sensibile nel calcolo delle paralassi in longitudine ed in latitudine, si troverà facilmente, che il termine da aggiungersi al primo membro delle equazioni (*b*) e (*c*) del § 6.° dipendentemente dall'assunta correzione $d\tau$ è $(\pm(\mu - m) + \nu \tan\varphi)\, d\tau$, ove si prenderà il segno $+$, quando $\lambda' > l$; ed il segno $-$ nel caso contrario, e dove μ rappresenta il moto della luna in longitudine per $1''$ di tempo medio; m quello del sole; ν il moto della luna in latitudine parimenti per $1''$; $d\tau$ la cercata correzione espressa in secondi, la quale se è positiva trasporta il luogo verso l' occidente, e se è negativa lo fa scorrere verso l' oriente.

Ciò premesso, ecco gli elementi impiegati nel calcolo delle superiori osservazioni:

Latitudine geografica $= 54°.21'.18'',0$; $L = 54°.10'.25''$; longitudine geografica rapporto a Berlino $= -21'.9'',5$.

La longitudine della luna data dalle tavole fu (come nel calcolo delle osservazioni di Könisberg) diminuita di $29'',24$; la latitudine, diminuita pure di $3'',96$. Si formò così la seguente tabella:

	1.° Contatto	2.° Contatto	3.° Contatto	4.° Contatto
$\theta =$	178°.12',38	193°.35,60	194°.15',87	208°.39',93
$g =$	149.52,14	160.56,50	161.26,55	172.46,03
$h =$	47.26,05	52.59,50	53.14,70	58.49,27
$\lambda =$	124.35.43'',49	125.13,32'',89	125.15.24'',19	125.50.37'',17
$l =$	124.50.40,52	124.53. 4,89	124.53.12,09	124.55.28,66
$\beta =$	0.44,54,75	0.48.22,18	0.48.32,35	0.51.45,08
$\lambda' =$	124.18. 8,83	124.52.11,16	124.53.55,78	125.27.41,71
$\beta' =$	+ 0.34,20	+ 0.17,01	+ 0. 3,67	+ 0.12,63
$\delta' \pm d =$	32.26,16	0.51,25	0.51,17	32.21,96
$e =$	32.32,00	0.56,36	0.43,84	32.13,10

Quindi si formeranno le seguenti equazioni:

$$(1)\quad . \quad -d\lambda + 0{,}0175.d\beta - 0'',5667.d\tau = -5'',84 + dp$$
$$(2)\quad . \quad -d\lambda + 0{,}3166.d\beta - 0{,}5587.d\tau = -5{,}36 + 1{,}0490.dq$$
$$(3)\quad . \quad +d\lambda + 0{,}0840.d\beta + 0{,}5811.d\tau = +7{,}40 + 1{,}0036.dq$$
$$(4)\quad . \quad +d\lambda + 0{,}0065.d\beta + 0{,}5772.d\tau = +8{,}86 + dp.$$

Per determinare $d\tau$, sarà conveniente adottare la correzione media delle posizioni lunari superiormente stabilita in luogo di quella assunta nel calcolo delle osservazioni; in tale ipotesi, facilmente si vedrà doversi porre nelle precedenti equazioni $d\lambda = +0'',83$; $d\beta = +3''.92$; ritenendo inoltre, come sopra fu adottato, $dp = -1'',71$; $dq = +0'',51$, le superiori equazioni danno per $d\tau$ i valori seguenti:

(1) . . . . . . $d\tau =$	+ 11'',98
(2)	+ 9,38
(3)	+ 11,62
(4)	+ 10,90
Medio . . . . =	+ 10'',97

la quale, aggiunta alla assunta differenza con Berlino — 21'.9'',50, darà Danzica all' oriente di Berlino di 20'.58''.53, e quindi all' oriente di Parigi di 1^h.5'.12'',53, la quale prossimamente concorda con la longitudine assegnata dal sig. Wurm.

(*Letta nel giorno 18 gennajo 1852.*)

INTORNO ALCUNE OPERE IDRAULICHE

ALLO SCOPO DI MIGLIORARE LA CONDIZIONE DEL BACINO INTERNO

AL PORTO DI MALAMOCCO

E DI REGOLARE LE CORRENTI DI RIFLUSSO A VANTAGGIO DELLA NUOVA FOCE APERTASI DAVANTI IL PORTO MEDESIMO.

MEMORIA

DEL M. E. ING. GIOVANNI CASONI

Più volte, signori, la mia voce si è fatta sentire in quest' aula toccando del porto di Malamocco, sia per togliere alcuni vecchi pregiudizii, per effetto di mal fondata tradizione, tenacemente radicati nel ceto dei naviganti; sia per raccomandare che vengano sollecitamente portati a compimento que' grandiosi lavori, all' esterior parte di esso porto, i quali suggeriti da insigni idraulici, basati sulle fisico-matematiche dottrine, convalidati da lunghe e continue osservazioni, cementati dalla esperienza e dal fatto, favoriti dalle largizioni della munificenza sovrana, reclamano il comune interessamento, e massimamente il mio, che più d' interessamento egli è per me un dovere per l' arte che professo, pel carico che da quasi 34 anni sostengo, e per l' affetto che porto a quest' illustre città: laonde io spero che anco questa volta in considerazione a questi motivi, la vostra indulgenza, occupandosi dell' importanza dell' argomento, non curerà l' imperizia del dicitore ed io mi avrò benigno compatimento.

Il progetto ideato e proposto nell' anno 1806 dai matematici francesi Prony e Sganzin, coadiuvati dall' ingegnosissimo veneziano Andrea Salvini, colonnello degl' ingegneri navali, per migliorare di condizione il porto di Malamocco, che è il solo nelle nostre lagune capace di dar passaggio a' grossi legni da guerra e da commercio, suggeriva due categorie di opere, una per sistemare la foce esterna, l' altra per regolare l' interno sistema idraulico di quella parte di laguna che dal porto stesso viene inaffiata.

Consisteva il primo genere di lavori in due dighe marmoree disposte in senso ortogonale ai litorali, più lunga quella al nord ossia alla sinistra del porto, minore l' altra al sud di esso.

Uffizio della prima era quello di allontanare la radente litorale che qui percorre dal nord al sud, e liberare con ciò da quell' urto laterale l' altra corrente che in tempo di riflusso sorte dalla laguna; di arrestare le sabbie e le torbide provenienti dagli sbocchi dei fiumi così detti sopravvento, o meglio ancora sopraccorrente, rispetto al porto; per ottenere finalmente una nuova foce, retta, aperta, più profonda, più liberamente navigabile in confronto alla odierna, la quale appunto pe' conati delle due diverse correnti litorale e di riflusso si dilunga in senso quasi paralello alla spiaggia di Pelestrina, ed è circoscritta a ponente da questo lido, e da un immenso banco o scanno alla parte sua di levante.

Colla seconda diga al sud, minore, come dissi dell' altra, dovevasi intercludere la vecchia foce, dovevasi impedire che la corrente di riflusso si disperdesse vagando in leggieri veli sulla vasta superficie del banco foraneo, ed invece astretta a percorrere con tutta la massa in unico alveo procurasse così la massima possibile profondità nella progettata nuova foce.

La seconda categoria di lavori aveva per iscopo di aumentare la massa, il volume d' acqua fluente dalla laguna media, ch' è quella appunto alimentata dal nostro porto di Malamocco dietro all'antico principio proclamato nel XVI secolo dal fra noi celebre Cristoforo Sabbadino che, cioè, *gran laguna fa gran porto*. A conseguire codest' effetto vennero dai ricordati matematici francesi suggeriti due sistemi di dighe a fascinaggio disposti a scaglione sulle paludi e situate in prossimità ai così detti partiacqua, cioè in vicinanza a quelle linee, a que' vertici dove succede il contatto delle acque provenienti dai due porti vicini. Pure un tale ripiego, che al certo potrebbe grandemente influire sulla economia idraulica dell' intiera laguna, non ebbe una trattazione confacente alla sua importanza e quindi venne quasi abbandonato al silenzio.

Ma quello che di virtuale si scorge nell' esposto progetto, fino ad ora forse non seriamente da altri notato, sta nell' aversi combinate quelle operazioni e distribuiti que' provvedimenti in maniera che gl' interni presidii, in quanto ad effetto complessivo, vadano coordinati co' lavori esterni, in un modo rispettivamente e simultaneamente operativo, poichè, fissato il principio di aumentare colla massa delle acque la velocità loro, si è usata l' avvertenza, tanto nel tracciato della grande diga foranea al nord del porto, come nel determinare la posizione

e la inflessione delle altre dighe interne a scaglioni, di tenere alla figura d' *imbuto* verso la bocca del porto, per cui l' acqua della laguna, chiamata dal riflusso, invitata da quell'allargamento presso alla sfocciatura fra i lidi, spinta ed istigata dalle sopravvenienti masse sgorgate da grandi canali Melisson, Fisolo, Spignon e Campana per la via dell'altro canale di Malamocco, riducendosi al varco tra le appendici del forte Alberoni e l' altro di san Pietro, ivi acquistato il massimo relativo grado di velocità, inoltravasi frammezzo le due grandi dighe, più strisciando ridosso quella di nord, e quindi massa e velocità combinate avrebbero potentemente cospirato ad abradere quel fondo ed a solcare quel pericoloso scanno che con tanto danno del porto ne barrica la odierna sortita, tale appunto essendo il problema dato a risolvere.

Quali oppositori e quanto valenti abbia avuti quel progetto, che a buon dritto possiamo chiamare italo-franco, tutti sanno; ma fra questi campeggiarono primi un ingegnere francese Laitheau ed il mio antecessore colonnello del genio Antonio Luigi de Romanò. Quegli con lungo scritto riprovò formalmente la proposizione delle due dighe all' esterno, procurando dimostrare che avrebbero prodotto effetto completamente opposto alle manifestate intenzioni, ma egli era preoccupato dall' idea di poter redimere il vecchio porto di san Nicolò di Lido; l' altro, il Romanò, lo ha seguito nello stesso parere, però sostenendo che con quei mezzi, e malgrado una maggior massa di acqua, non avrebbesi potuto conseguire il solcamento del banco; ma Romanò parlava e scriveva colla fantasia piena d' un suo favorito partito, quello cioè, d' immettere il Brenta in laguna al sito di Lugo e farlo sgorgare nel bacino interno di Malamocco, reputando che senza un grosso nappo d' acqua animato da corrente vivace e costante, mai si otterrebbe di profondare e di mantenere una nuova foce fuori del porto medesimo.

Gli effetti di tali opposizioni, come sempre succede, tornarono a grave danno, ed incepparono l' incominciamento dei progettati lavori. La guerra, che nei primi lustri di questo secolo erasi fatta, dirò così, un ordinario abituale esercizio, le perpetue crociere di legni armati davanti queste spiaggie, la difficoltà che ne conseguiva di avere materiali di pietra dall' Istria, che oltre il golfo ci sta dirimpetto, tutte queste circostanze cooperarono a suscitare chi offrisse nuovi progetti, od introducesse modificazioni al già proposto; il perchè messa da parte la esecuzione dei lavori all' esterno, le autorità allora imperanti vollero che si desse pensiero alla sistemazione delle acque nel bacino interiore e precisamente

allo sbocco del canale di Malamocco, il cui ultimo tronco versa nel bacino in vicinanza al forte Alberoni e forma colà il banco pericoloso denominato della Rocchetta.

Fu allora che nell' intendimento di regolare lo sbocco alla Rocchetta, per abradere quel banco, e per minorare con ciò le difficoltà in quello scabroso passaggio, si è cominciato a metter mano alle prime linee del piano Prony e Sganzin, coll'alterare, anzi col cambiare la inflessione della grande diga di nord, alla sua radice, presso il lembo occidentale del ripetuto forte Alberoni, e, a quanto pare, senza pesar sul riflesso a ciò che da questa manomessione fosse per derivare in seguito al nesso del progetto primario, quasichè cessato che fosse quel-l'orgasmo febbrile di guerra, un'autorità mancasse, volonterosa il bene maggiore di questa Venezia ed il perenne suo lustro.

Circoscritto il pensiero a questo parziale dettaglio, fu primo l' ingegnere in capo Lessan, già mio superiore, allora direttore delle fabbriche civili e lavori idraulici della reale marina, a gettare un primo tracciato curvilineo della diga interna di nord, abbandonando il rettilineo dei matemateci francesi e spingendolo più al largo dalle appendici del forte Alberoni verso il basso fondo o *puntaruolo* che divide lo sbocco del canale di Malamocco da quello del canale di Fisolo, con che venne a restringere d' alquanto la parte dello stesso canale di Malamocco dove ha principio il banco Rocchetta; ma il poco sviluppo dato allora a quella primordiale opera produsse tenui risultati di miglioramento.

Subentrato al Lessan nella stessa carica di direttore il colonnello Romanò, egli, non solamente modificava la forma di quella diga interna coll' assegnarvi un profilo più robusto e gagliardo, ma cambiava altresì l' andamento della curva ideata dal suo antecessore Lessan nella parte estrema, protraendola più verso sud-ovest, dove intendeva terminarla con una specie di nucleo o di piattaforma, diversamente dal Lessan che inflettendola a curve combinate, sporgenti e rientranti, la volea ridossata allo sperone o guardiano N. 66, quello che determina a sinistra la bocca del porto.

In ultima analisi col tracciato *Lessan* rimaneva chiuso tra gli spaldi del forte Alberoni, la nuova diga ed il ridetto sperone N. 66 uno spazio coperto in parte dall'acqua stagnante che avrebbe bisognato interrare per toglierne i tristissimi effetti. *Romanò* invece, lasciando aperto ampio varco tra la estremità della sua diga e lo sperone N. 66, voleva presentare alle sabbie, convogliate dal flusso e spinte dai venti australi nelle grandi commozioni del mare, un'estesissima duna

dove decombere ed impedire così il più inoltrarsi nell' interno bacino, a discapito del banco stesso della Rocchetta.

A più riprese, nel periodo di oltre 30 anni, con grande dispendio, quell' opera venne condotta fino al gruppo N. 147 del segnalamento marginante i grandi canali d' interna navigazione, che dall' arsenale conducono al porto di cui tratto, ed il banco della Rocchetta, che tocca al gruppo medesimo, grado a grado acquistava maggiore profondità, mentre conducevasi già a grande avanzamento la gigantesca diga esterna di nord, i cui felicissimi effetti, com' era preconizzato non andò guari, si sono pienamente manifestati.

Senonchè inopinati movimenti, nuove perturbazioni del mare, la cui origine è quasi sempre a noi presentata col velo delle congetture, o la supponiamo con azzardo d' ipotesi, l' urto delle correnti sensibilmente turbate e divertite, colpa gl' ingombri di barricate, di galleggianti, di annegamenti con che vennero sbarrati i canali della laguna durante l' infausto periodo 1848-1849 delle aberrazioni e de' contro-sensi; l' irruzione delle sabbie in tempo di flusso, per ogni verso, per ogni direzione introdotte nel porto prima ancora di aver colmata quella duna che ho poco fa descritta, inoltrarono a piombare sul fatale banco Rocchetta, e ne ridussero il passaggio, se non difettoso come lo era prima che fosse continuata quella diga interna, almeno a tale da chiamar l' attenzione e le cure dei piloti e dei naviganti che sono costretti a varcarlo.

Tale è lo stato odierno di quel banco, unico ostacolo che si presenta al transito, nel totale sviluppo dei canali a partir da Venezia, e che io stesso ho localmente verificato nei giorni prossimi al solstizio di giugno decorso, in occasione alla sortita in mare della fregata di Sua Maestà *Novara.* Allora ebbi parte alla rilevazione di regolari fondazioni, e la massima profondità rinvenuta sul banco medesimo, seguendo una traccia prossimamente equidistante da' suoi margini, si fu di metri 5,06 a metri 5,50, cioè piedi di Francia 15:8 a 16:11, pollici profondità che saltuariamente si scostano da quella traccia, ora a destra ora a manca volgendo, lo che rende ancor più malagevole il praticarlo con bastimenti di forte portata.

Codeste verificazioni destarono in me il desiderio di più estese e più accurate investigazioni: volli indagare le profondità dei grandi canali versanti in quel bacino e volli avere elementi atti a determinare una graduazione riguardo alle rispettive velocità delle loro correnti.

In quanto alle profondità di quei canali, esse generalmente ed anche indi-

vidualmente sono maggiori alle massime da me osservate sul banco Rocchetta, laonde mi è gioco forza concludere che l' innalzamento di quel banco e la sua manutenzione sieno l' effetto di due cause: la prima delle quali penso si manifesti nei momenti di stanca, allora cioè che sta per succedere il cambiamento del moto di flusso in quello di riflusso, poichè appunto allora attenuandosi la vivacità delle correnti, quella proveniente dal mare rintuzza l'altra che discende dai canali, e prima che si risolvano in uno solo i due corsi, v'è un periodo d' inerzia, durante il quale le sabbie convogliate dal mare liberamente e quasi senza contrasto decombono colà dove ha luogo la sosta, il che accade appunto al sito del banco, il quale trovandosi in vicinanza alla bocca del porto, prova gli urti del mare da una parte, quando dall' altra soffre per l' insistenza delle correnti che discendono dai grandi canali di Fisolo, Melisson e Spignon da me ancora ricordati.

La seconda causa che credo influisca pur anco e con maggior efficacia a mantenere e ad accrescere quell' ingombro, trovo abbia luogo e si sviluppi con grande potenza in quelle circostanze in cui ne' periodi di riflusso, il mare fattosi tumido, agitato da gagliardi venti australi e da quelli di levante, che qui diciamo venti di *traversìa,* si solleva in grosse onde, scalza i bassi fondi che costeggiano i nostri lidi, ne commuove le sabbie e le spinge entro il porto, quando appunto le acque interne con moto contrario vorrebbero sortire dal porto stesso. Ecco succedere allora un violento conato, un contrasto vorticoso di contrarie azioni che però decresce in ragione duplicata delle profondità, durante il quale e pel reciproco rintuzzo accadono nuovi decubiti, nuove deposizioni su quel banco malaugurato.

Portati i miei studii alla conoscenza delle correnti interne per determinarne, come dissi, la rispettiva velocità nel periodo del riflusso, avvertii che doveva limimitarmi a precipuamente osservare fra tutte quella del canal *Fisolo,* che nel suo tronco superiore riceve un canale denominato dei *mulini,* più sotto l'altro detto il *Melisson,* per cui anzi dir si potrebbe *Fisolo,* trarre la sua origine da quei due canali che pur sono vene massime della laguna media e dal traversante *Re di Fisolo,* che lo pone in comunicazione coll'altro canale primario di nome *Campana.*

Secondariamente era invitata la mia attenzione dalla corrente del canale *Spignon,* che pure immette nel tronco inferiore dello stesso *Fisolo,* non lunge dal bacino del porto, e per ultima notai la corrente al canale di Malamocco, il quale termina agli *Alberoni* sul banco della Rocchetta, tralasciando del canale

san Pietro e Pelestrina che internamente passa dal bacino di Malamocco al bacino interno dell' altro porto di Chioggia, canale questo di poca importanza al sistema idraulico di questa parte di laguna, ma indispensabile per le reciproche comunicazioni.

Tra queste tre, la corrente di *Fisolo* prepondera sulle altre e rigogliosa scorre al bacino del porto. Urtata nel suo cammino dall' acqua di *Spignon,* che vi si unisce a destra, lunge dal deviare sensibilmente dalla sua direzione iniziale, aumenta invece ed accresce di vivacità tendendo col maggior filone verso l' ottagono fortificato, detto di san Pietro, sito a destra del bacino medesimo dove pure riscontrasi la maggior profondità.

L' acqua del canale di Malamocco, che nell' ultimo suo tronco dicesi anco degli Alberoni, corre con alquanto minore velocità, abbenchè ingrossata pel concorso di quella che vi si aggiunge, proveniente dal grande canale *Campana,* ma arrivata al bacino trova poderoso ostacolo al suo proseguimento nella grande massa delle acque unite di *Fisolo* e *Spignon,* le quali avendo, come dissi, maggior forza, ed una direzione alla prima quasi ortogonale, rallentano di molto quel suo corso, ed influenzate dalla anormale posizione e dalla sporgenza dello sperone o molo N. 1 detto delle ceppe, alle appendici del forte san Pietro, la fanno sovente retrocedere, vi fanno barriera e la costringono a versarsi in parte ed a distendersi sui bassi fondi e sulle vaste paludi verso ponente, da che ne derivano altri decubiti, e perciò non esito punto ad ascrivere anco questa combinazione di circostanze fra le più efficaci cause che contribuiscono a mantenere il descritto *banco Rocchetta.*

Prima di toccare al suggerimento, che presta tema a questa Memoria, credo opportuno prevenire una domanda che mi sarà fatta da chi vuol prendere interesse all' argomento che tratto, ed è se, nella vasta estensione di queste lagune, altra via non vi fosse per passare da Venezia al porto di Malamocco se non quell' unica che finisce alla Rocchetta? E qui accennerò esservene altre due, una delle quali sarebbe dall' isola di *Poveglia* per quel canale contumaciale, pel canal traversante *Perarolo* passando in canale *Campana,* quindi per l'altro traversante *Re di Fisolo* in canale Fisolo e per questo al bacino del porto.—L'altra via sarebbe dal canal di Malamocco ascendendo pel ridetto *Campana* passare per *Re di Fisolo* in *Fisolo* e ridursi, come prima, al bacino, ma queste vie, che farebbero evitare *Rocchetta,* oltrechè assai più lunghe, oltrechè dispendiose per enormi escavi da farsi nei due canali traversanti Perarolo e Re di Fisolo, che sono di fondo sab-

bioso, e che perciò esigerebbero costante manutenzione, oltre al bisogno di pali, di gruppi e di fari di segnalamento, indispensabili al *gegomo,* al *toneggio* per le *conversioni* dei bastimenti, presenterebbero disagi e pericoli ai quali i grossi legni da guerra e da commercio andrebbero esposti, costretti essendo a navigare e percorrere frammezzo bassi fondi passando pei due indicati traversanti che hanno l' andamento alquanto tortuoso, quando, al contrario, l'odierno tragitto, mercè alcuni rettifili opportunemente praticati ai tronchi dei canali dall' isola di *san Clemente* all' altra di *Poveglia,* divenne facile, spedito, e così svanirono per quel tratto le antiche difficoltà, ed è perciò da tenersi preferibile ad ogni altro cammino quello pei canali, che partendo da Venezia passano presso le isole san Clemente, Santo Spirito, Poveglia in canale di Malamocco, per gli Alberoni al bacino del porto.

Ho pensato esser cosa molto opportuna premettere tutte queste notizie storiche e locali, perchè chi mi onora di ascolto e si compiaccia osservare l' iconografia che presento, possa agevolmente seguirmi nello sviluppo dei suggerimenti che propongo, e possa rettificare le mie idee, se la vostra sapienza, o signori, le trovasse meritevoli di censura o di rettificazione.

I cambiamenti portati al piano originario dagl' ingegneri *Lessan* e *Romanò,* come procurai dimostrare, hanno cagionate sensibili alterazioni tanto riguardo agli effetti utili che si contemplavano dapprima riguardo alla sistemazione del *bacino esterno* ed all' apertura della nuova foce, quanto, e più ne conseguirono, ai ripieghi ed agli avvedimenti avutisi per regolare le acque del *bacino interno,* poichè andò interrotta e slegata quella magistrale coordinazione fra le due sistemazioni, per cui l' una sull' altra influendo, e l' azione dell' una prestandosi a vantaggio dell' altra, anco gli effetti parziali, quantunque in senso diverso, pure andavano a combinare in un pieno e completo risultamento.

Ora parmi dover circoscrivere le mie proposizioni a ciò che riguarda il bacino interno; e questo crederei poter migliorare in confronto all' attuale sua condizione, se le acque che vi fluiscono tanto ne' periodi della *marea montante,* come in quelli della *decrescente,* fossero regolate da apposite opere idrauliche colle quali intenderei munire gli sbocchi dei grandi canali *Spignon, Fisolo* e di Malamocco ai rispettivi loro *puntaroli,* cioè colà dove il *basso fondo* sporge tra l' uno e l' altro di essi; verrei così a trattare queste acque quasi come gl' idraulici governano quelle dei fiumi, ma però non con l' impiego di *pennelli* o di archette, ma con rivestimenti murali e con una paratoja parimenti murale

presso l' ottagono san Pietro convergente le acque stesse verso la diga interna curvilinea, e più esattamente verso la bocca del porto a sinistra, e ciò con la massima circospezione, trattandosi nientemeno, che di allontanare, anzichè avvicinare i corsi di queste acque di Fisolo e di Spignon dalla bocca del canale Rocchetta, i cui difetti naturali ho poco fa accennati; a togliere od a minorare i quali difetti, se fossi invitato a suggerire un partito, non esiterei di proporre che fosse convenientemente ristretta, con robusta opera, continuata, o a scaglioni, la sezione all' ultimo tronco del canale di Malamocco a destra, cominciando dal canale Campana, fino al puntarolo di Fisolo, coll' intendimento di minorare la dispersione laterale delle acque sui paludi, tenerle incassate ed aumentare conseguentemente il volume e la velocità dello scarico nel bacino del porto, affinchè meno soggiacia alla preponderanza delle altre correnti, e valesse per sè ad escavare ed a mantenere escavato quel suo alveo.

Dovendo però provvedere all' azione di due correnti, le quali benchè in periodi diversi pure sono completamente contrarie, mi trovo alla necessità di ordinare le opere che propongo in maniera che servir possano e si prestino all'uno ed all' altro uffizio, senza contrastare o pregiudicare la corrente di flusso.

Scabroso assunto per me egli è questo che procurerei superare adattando le inflessioni e volgendo i vertici o le curve delle opere stesse per modo che nel riflusso quelle acque percorrano possibilmente unite verso il mare, e nel flusso s'inoltrino ripartitamente ascendendo i canali meno gravi di sabbia, e meno torbide al confronto di quelle che odiernamente pervengono nell' interno del porto; e nella coordinazione di queste opere vorrei comprendere e porre con esse in relazione d'uffizio, per quanto fosse possibile, anco il potente sperone N. 1, detto delle ceppe, che sporge dalle appendici del forte san Pietro, al cui vertice avvi la profondità di oltre 40 metri.

Ella è cosa evidente che la depurazione delle acque dalla sabbia marina non potrebbesi attendere quale effetto dei soli rivestimenti e dei soli presidii da me ideati, e neppure tanto ardirei ripromettermi; ma codeste opere, se male non scorgo, sarebbero per dare favorevoli risultamenti qualora andasse eseguita la seconda diga foranea al *sud* del porto, della quale un uffizio, come dissi da prima, consiste nel ripulsare e sostenere le sabbie cacciate verso terra dai venti meridionali. Allora anderà a minorare grandemente quell'assedio di sabbie; allora si potrà sperare stabilità nei fondi e costanza nelle rispettive profondità del *bacino interno*; allora anco il *banco della Rocchetta* andrà migliorando, e final-

mente col procurato incanalamento delle acque di riflusso, come propongo, la nuova *foce*, lungo la gran diga di nord, toccherà forse senza bisogno di escavi meccanici, *alla profondità* di piedi 25, misura necessaria al libero passaggio dei grossi navigli da guerra e da commercio, compresi i vascelli, appunto come fin dall' anno 1806 erasi avvertito dai valenti autori dell' originale progetto.

Quei manufatti, che propongo, crederei contessere a fascinaggio con *volpare* e *gabbioni* riempiuti di minuto sasso, fissati ed imbrigliati a mezzo di tolpi ossieno fusti di quercia e rivestiti alla loro superficie con sassaja, che a minorare la spesa basterebbe fosse di masegna ossia *trachite dei colli Euganei*. Tale modo di costruzione penso adattato al bisogno di renderli capaci e validi a sostenere non tanto l' impressione delle correnti quanto l' urto delle ondate nei tempi burrascosi. Inoltre, dalla loro configurazione vorrei fossero prescritti i limiti dei *puntaroli* nelle rispettive loro sporgenze, e prevenuto il pericolo che le opere ed i *puntaroli* sieno presi a rovescio dalle correnti, ciocchè mi studierei conseguire coll'accurata scelta del sito dove fondarle, in che sarebbemi guida la conoscenza dei corsi minori delle acque che dagli specchi, dai laghi, pei canali minori e pei *ghebbi* pervengono nei grandi canali prossimi al porto.

Questo in concreto è il piano che in massima proporrei per regolare le acque del porto di Malamocco, nel dettagliare il quale e prima di condurmi a determinare la figura da darsi a quelle opere moderatrici, prima di stabilirne la posizione, le dimensioni, mi sarà d' uopo rinnovare le osservazioni, ripetere gli esami, adocchiare ancora la mossa e le direzioni delle varie correnti, come dissi, anco le più discoste dal porto; ma sopra tutto niente azzarderei intraprendere, nulla formalmente proporre senza il consiglio di altri ingegneri esperti nelle cose della nostra laguna e senza prima conoscere i risultati di un esame tecnico a' miei suggerimenti che provocherei da questo consesso, convinto intimamente, come sono, che in argomento tanto grave ed importante posso (certo involontariamente come in altri succede) o veder mascherata una verità o dissimulare e negligere alcuni principii, o mal interpetrare alcuni fatti, illuso dal desiderio di secondare un' idea che mi si è presentata alla mente, e che ha trovato favore e conforto nelle mie elucubrazioni.

Poche parole ancora ed ho terminato: Nel piano idrografico che avete sott' occhio, ed è un fac-simile dell' originale annesso alla Memoria di Prony e Sganzin, sono delineate con tinta *rossa* le opere da essi proposte nell'anno 1806, cioè la grande diga di nord ABC e la minore al sud DE oltre un' altra piccola

diga interna FG interposta tra il canale Fisolo e quello che proviene da Malamocco, ciocchè svela la idea da que' sommi concepita di accorciare con essa l'allora lungo puntarolo che colà esisteva.

E quel manufatto FG diventava allo scopo efficacissimo se si fosse conservata la posizione della diga ABC alla sua radice nell' interno del porto: utile effetto che, e il dissi ancora, convenne abbandonare quando se n' è cambiato il punto di partenza e l' andamento della parte AB presso il Forte Alberoni.

Con tinta verde ho aggiunta la modificazione *Lessan,* dietro l' andamento curvilineo HAIB, e mi sono servito del colore ocreo per indicare il tracciato *Romanò* IK, in forza al quale, e per seguitar la diga interna da K a B, cioè fino allo sperone o guardiano N. 66, con curve il meno possibile risentite, bisognò allungare lo sperone stesso, da dove parte la diga foranea di metri 17; e con ciò la bocca del porto, che prima allargavasi a metri 516, ora è portata a metri 499 circa, che corrisponde a gomine 2 $\frac{1}{3}$ misura de' marini.

Finalmente adoperai la tinta gialla per segnare i siti e le approssimative figure dei lavori che crederei proporre in LMNO, i quali si limiterebbero a brevi misure, il più, come ancora dissi, consistendo nella posizione loro e nella configurazione da darvisi, in che, a mio avviso, meglio si presterebbero le curve combinate ad angoli più o meno ottusi, più o meno acuti, secondo la esigenza del sito. M' astengo dal toccare di più alla necessaria sistemazione dell' ultimo tronco del canale di Malamocco alla Rocchetta, giacchè colle opere, che ora propongo, crederei averne presidiato lo sbocco: quella sistemazione sarà poi regolata secondo le circostanze e nel modo come poco fa accennava.

Confesso, signori, che merito taccia di ardito per aver osato por mente ad argomento tra quelli trattati e discussi da uomini celebri per dottrina, distinti per versatilità d' ingegno pronto e svegliato. Pure, lo spero, non mi negherete compatimento, ove vogliate considerare al posto che ho l' onor di coprire nell'I. R. Marina di guerra, alla pratica da me acquistata in tanti anni su quel porto, ed al dovere, che incombe ad ogni onest' uomo, di manifestare le proprie idee, se le crede tendenti al pubblico vantaggio, ciocchè maggiormente importa nell'odierna condizione di quest' illustre città, richiamata a novella vita e prosperità dalle largizioni della *Sovrana Munificenza;* e veicolo di vita e di prosperità per questa patria è appunto il porto di Malamocco.

(*Letta nel giorno* 21 *luglio* 1851.)

SUL

CREDITO FONDIARIO

MEMORIA PRIMA

DEL M. E. PROF. BALDASSARE POLI

Della nuova legge francese per le associazioni di credito fondiario.

Nel momento che si disputa anco tra noi con calore vivissimo sulle banche o società di credito fondiario, ad esempio di quelle già attuate in altri paesi, non parrà inopportuno il tenere proposito circa alla loro applicazione anche al nostro che ne è pure bisognevolissimo, e che come eminentemente agricola, mentre può farne tutto il suo pro, è più ch' ogni altro disposto a ricevere una istituzione così benefica e salutevolissima.

Io, fino dall' anno 1841, nell' opera intitolata *Saggi di scienza politico-legale,* alla teorica del credito sì pubblico che privato, lamentava il danno della presente sua organizzazione, specialmente perchè il credito privato non si facesse soccorritore dell' agricoltura; ed ivi nell' atto che dichiarava per indispensabile al suo rinnovellamento l' aggiunta delle banche agrarie o fondiarie, le veniva a tratti delineando; ma la mia voce era troppo debole e fioca per non andarne disfatta e smarrita (1). Ora però ch' essa rivive per mezzo dell' altrui assai più chiara e sempre accetta, allorchè si tratta del vero e dell' utile comune; ora che si pensa seriamente ad istudiare nella grave quistione del credito fondiario, onde facciano di guadagno le nostre provincie, e che gittasi già l' occhio sul de-

(1) V. *Saggi di scienza politico-legale.* Milano, presso Perelli e Mariani editori. Vol. unico, 1841, pag. 617.

creto di Francia 28 febbrajo 1852, qual ultimo risultamento della sua teorica e pratica dottrina, io mi farò con alcune rapide osservazioni a mettere in chiaro gli ostacoli alla pratica di quel decreto e di quella forma di associazioni fondiarie per noi; giacchè e quella legge e quelle associazioni, quanto savie e provvidenti possono essere per la Francia, altrettanto mi pajono qui d' assai malagevole effettuazione. E tanto più volentieri mi fo a discorrerne, in quanto che il prendere alla prima una falsa via è lo stesso che fallire allo scopo, e in quanto che la pubblica opinione abbisogna d' essere ben illuminata e chiarita innanzi di venire al partito.

Che il disagio o la jattura della proprietà in generale nel Veneto, non già per assoluta scarsità di danaro, ma per le gravezze del mutuo, e per la inevitabile pressura dell' espropriazione forzata come funesta conseguenza di quello, sia un fatto patente ed incontrastabile, basta a convincersene il guardare alle cifre dei libri ipotecarj, agli avvisi di pubblica asta, agli atti di giudiciale esecuzione contra ai morosi e agli impotenti al pagamento dei prestiti assicurati sui fondi. Quindi, se c' è paese cui s'attagli moltissimo il credito fondiario, egli è per mio avviso il nostro. Ma potrà il credito fondiario atteggiarsi tra noi sull' esemplare recentissimo di quello di Francia? Si potranno accogliere per noi le associazioni fondiarie al modo con cui vengono dal decreto 28 febbrajo colà stabilite? Io ne dubito forte, allorchè ci facciamo ad esaminare senza prevenzione e quella legge e quelle società e in una le particolari condizioni delle nostre provincie. Egli fu perciò savio consiglio del veneto Ateneo quello di deputare una Commissione alla disamina del credito fondiario per riuscire ad un progetto confacente alle nostre circostanze, e che possa essere preso in considerazione. D' altra parte, anche in queste cose è sempre meglio correre sulle orme proprie che sulle altrui. Chè se dall' esempio alieno devesi pigliare animo al fare, il fatto dev' essere nostro.

Il grande problema del credito fondiario si compendia tutto in questa formola semplicissima: « Fornire degli occorrenti capitali l' agricoltura al minimo » degl' interessi, e sotto la doppia condizione del facile e comodo loro rimborso, » e della maggior sicurezza della loro realizzazione. » Al minimo dell' interesse fa guerra l' usura. Al facile e comodo rimborso il troppo breve termine alla restituzione integrale dei mutui. Alla sicurezza di realizzazione la cattiva volontà de' debitori, o il difetto della legislazione. Se non che la soluzione di questo problema sembrerebbe ad alcuni omai raggiunta colle associazioni territoriali o

fondiarie della Prussia, della Sassonia, del Würtemberg, dell' Annover, della Gallizia, della Baviera, del Belgio e di Francia, le quali studiate nel loro storico sviluppo, e ne' punti più consimiglianti di analogia, presentano a quest' ora una triplice forma, per la quale si stima potersi naturarle e trapiantarle dovunque; tanto ch' ei pare la scienza non possa andare più in procaccio, ed essere ogni ulteriore suo procedimento omai inutile e finito. La prima e la più antica forma di queste società ella è di quelle unioni di proprietarj d' una provincia che con o senza danaro emettono proprie obbligazioni sotto il nome di *lettere di pègno* fruttifere al 3 o al 4 per $^0/_0$, e da negoziarsi alla Borsa, le quali o si estinguono ne' creditori o presentatori a richiesta solo delle associazioni o con un anticipato avviso, o dai debitori si ammortizzano con piccole annualità da pagarsi alle associazioni medesime colla regola dell' interesse composto. Queste sono le società di credito fondiario od ipotecario veramente primitive della Prussia (1770), cui rassomigliano quelle del Würtemberg, della Sassonia e dell' Annover, salvo che in queste la estinzione od ammortizzazione graduale de' capitali e dei loro interessi fu sempre obbligatoria, laddove in quelle era già da tempo ad arbitrio o facoltativa. Esse a buon diritto si denominano società di credito fondiario, sì perchè vi primeggia l'elemento o l' interesse della proprietà fondiaria, sì perchè con esse si ha di mira di non distrarre o scindere la possidenza, e di migliorare l' agricoltura. Laonde tali società vestono ad un tempo il carattere doppio di società di mutuanti e di mutuatarj, sono come tante agenzie intermedie tra i sovventori dei capitali, e quelli che ne abbisognano. La seconda forma e di origine più fresca, è quella di associazioni che, con un fondo di riserva in contante costituito da tante azioni, danno fuori soltanto cedole di valore determinato e fisso coll'obbligo da un canto di estinguere le cedole stesse coll' estrazione a sorte e con un premio detto *prima,* e col diritto dall' altro di conseguirne il rimborso a piccole annualità e colla misura dell' interesse composto. Tali sono la banca *ipotecaria* di Monaco, la cassa de' *proprietarii* e la cassa *ipotecaria* di Bruxelles. Ondechè giustamente si considerano queste per vere *banche* in quanto vi si fa prevalere l' elemento ad interesse mercantile e bancario, e sono istituite più a vantaggio de' prestatori che dei possidenti o debitori (1). Perlocchè la differenza più rimarchevole tra le associazioni del credito fondiario di quasi tutta l' Alle-

(1) V. *Des institutions de crédit foncier en Allemagne et en Belgique par M. Royer. Paris* 1846, pag. 4-403. — *Des institutions de crédit foncier et agricole dans les divers états de l'Europe par M. J. B. Josseau. Paris* 1851.

magna, e quelle della Baviera e del Belgio sta in questo : che le prime hanno di mira e più direttamente l' interesse pubblico qual è quello della possidenza e dell'agricoltura, e le seconde l'interesse privato o quello de' prestatori. La terza ed ultima forma di tali associazioni è di quelle che con un fondo di riserva e coll' emissione di lettere di pegno proporzionate al valore dei fondi o delle terre sulle quali cade il mutuo, offrono sempre il rimborso in contante a' loro presentatori o possessori, e ricevono dai mutuatarj o debitori un'annualità complessiva degl' interessi, e d' una particella capitale, il quale viene così ammortizzandosi in un lungo periodo d' anni. Questa forma s' addice singolarmente alle associazioni del credito fondiario introdotte in Francia col decreto 28 febbrajo 1852, e che possono chiamarsi associazioni fondiarie *miste*, appunto perchè in esse si fondono e si frammischiano tanto l' elemento od interesse fondiario, quanto il mercantile o bancario (1). Egli è su questa terza ed ultima forma di associazioni fondiarie che preme di fermare al presente la nostra attenzione per vedere se essendo essa così buona ed opportuna alla Francia, s' acconci, oppure sia inadattabile a noi per rispetto alla sua pratica esecuzione.

E qui entrando io nell'esame di un'estera legge tanto desiderata ed applaudita, gli è mestieri di dichiarare sino da bel principio che non intendo già di considerarla nell'intrinseco suo merito, oppure in quello de' suoi principj, chè non è dato più omai a chicchessia di disconoscere, o di biasimare l' uno e gli altri sì per la prova che già fanno di sè stessi, sì per la universalità e necessità della scienza alla quale s' appoggiano, e che non può mai falseggiare o disdirsi ; ma sì bene nella sua semplice impraticabilità a nostro riguardo almeno nelle guise con che venne foggiata dal suo datore : impraticabilità che si renderà palese a chiunque ascolti la voce della realtà e della ragione. Al qual uopo l' ordine delle idee esige ch' io richiami alla mente ed innanzi tratto i capi o punti principali d' una così fatta legge, acciocchè possa applicarvi successivamente le mie qualunque osservazioni.

In Francia, da un' inchiesta aperta nel 1850 dal Consiglio di stato, risultò come cosa comprovata costare in via media i prestiti ipotecarj ad interesse non mai meno dell' otto per % all' anno, compresa la somma di tutte le tasse e di tutti gli onorarj ; ed aumentarsi la cifra sempre crescente di questi prestiti di

(1) Si dicono anche *miste* le associazioni di credito fondiario, allorchè prestano tanto col credito fondiario, quanto col personale. Sotto tale punto di vista la banca bavarese può essere considerata come un' associazione di credito fondiario *mista*.

annui milioni 600, che è appunto la somma degl'interessi, cui già ammontano i molti milliardi del debito ipotecario generale. A tanta distretta e così minaccevole per la fortuna territoriale o de' possidenti di quella nazione, il Governo pensò di ovviare bentosto col citato decreto 28 febbrajo autoritativo delle associazioni di credito fondiario.

Questo decreto, che ha per base e per principio l' elemento promiscuo del credito fondiario e bancario, e per iscopo il soccorso dei proprietarj aggravati da ipoteche e dall' eccessivo interesse dei capitali, ammette indifferentemente e ad un' ora tanto le società de' capitalisti o prestatori, quanto quelle dei possidenti o mutuatarj. Concede loro il diritto, o privilegio esclusivo, di far girare lettere di pegno fruttifere e guarentite da ipoteca nell' estensione circoscritta di più dipartimenti, e limitatamente alla somma di ogni prestito da esse conchiuso. Il prestito non può esser fatto che sulla prima ipoteca, onde la necessità della preventiva purgazione e radiazione delle preesistenti iscrizioni, e dell' autenticazione per mano dei notai delle stesse lettere di pegno messe in circolazione.

Le lettere di pegno sono nominative od al presentatore, si trasmettono colla sola girata, non sono mai inferiori alla somma di 100 franchi, e vengono rimborsate col fondo di riserva e colle annualità che pagano i debitori. I capitali, che dà la società a mutuo ipotecario, si estinguono assieme agli interessi con piccole annualità non eccedenti il 5 per % d' interesse, e l'uno o il due per % della sorte principale. Alla riscossione forzata o giudiziaria non si aggiungono proroghe; basta un decreto del presidente del Tribunale di prima Istanza al sequestro, si procede sempre in via sommaria ed inappellabile sino all' atto di finale espropriazione. A far prosperare queste associazioni sino dal loro nascere, lo stato, oltre alla parte indiretta che piglia nella loro amministrazione e nel loro buon andamento, vi partecipa assai più direttamente coll' annuo acquisto d' una porzione delle lettere di pegno, coll'applicarvi una quota di 10 milioni del proprio, coll' acconsentire che vi s' impieghino i beni eziandio degli interdetti e dei comuni, ed i capitali disponibili degl' istituti di pubblica beneficenza. Talchè con tutti questi ajuti ed incoraggiamenti non è più meraviglia, che poco appresso e quasi per incanto sorgesse in Parigi una Società di credito fondiario con un capitale di 25 milioni (1). Ora che ho esposto in succinto e per sommi capi tutto il tenore di quella legge, veggiamo quali siano gli ostacoli che possono fare im-

(1) V. *Moniteur universel*, il decreto 28 febbrajo 1852 del presidente della repubblica francese.

pedimento tra noi alla sua effettiva applicazione. Questi ostacoli per me si riducono ai seguenti:

1.° Poco spirito di associazione.

2.° Disfavore per le carte e pei segni bancarj o di credito.

3.° Concessione contemporanea di due specie di società fondiarie di scopo e di natura affatto diverse.

4.° Soverchi privilegi e troppo essenziali cangiamenti di legislazione.

5.° Sopraccarico della circolazione con nuove carte.

6.° Mancanza dello scopo immediato qual è quello delle migliorie dei fondi o dell' agricoltura.

7.° Soccorso alla sola classe dei proprietarj, e non degli agricoltori.

8.° Differenza tra la rendita dei fondi e le annualità da pagarsi alle associazioni fondiarie.

9.° Il credito limitato o deficiente nella sua più grande funzione economica, qual è quella di creare od anticipare valori o capitali non ancora esistenti, ossia ideali. — Ognuno di questi oggetti fa più o meno contrasto all'attuazione tra noi delle società fondiarie francesi, almeno nella forma stabilita dalla nuova legge 28 febbrajo. Ed è codesto ch'io credo facile a dimostrare spendendovi parole anco brevissime.

Il poco spirito d' associazione da qualunque causa venga prodotto, è un fatto innegabile nelle nostre provincie. L' associazione, già antica tra noi negli oggetti di carità e di beneficenza, è appena all' infanzia per riguardo agl' interessi economici ed agrarj. Questa mancanza in noi dello spirito di associazione si manifesta anche più chiaramente nelle due classi dei proprietarj e dei capitalisti. La proprietà molto divisa e suddivisa, e l' individualismo o l' isolamento delle famiglie, se possono essere sotto certi aspetti il segnale della prosperità pubblica e di una certa forza di carattere e di confidenza in sè stessi, sono peraltro gravi impedimenti all' aggregazione da cui dipendono gli stessi grandi intraprendimenti dell'agricoltura. Se si eccettuano i comprensorj o consorzi delle acque, che sono frequenti nel Veneto, ogni altra traccia di società disparisce tra possidenti delle nostre contrade. I capitalisti ridotti a pochi, onde la necessità del monopolio e del caro prezzo del danaro, desiderano l' individualità e non la comunanza, non so se per timore o per speranza od anco per semplice abitudine.

Nessuna banca propriamente detta aduna nel Veneto una massa di capitali rifluenti come sangue a vivificare il commercio e l' industria. Tutte le opera-

zioni del cambio o del credito privato sono affidate alla solerzia o alla condiscendenza dell' individuo. Ed è appena adesso che esiste tanto avventurosamente uno stabilimento *mercantile* in Venezia, che possa riparare al danno di una sì perniciosa noncuranza. Infine, le stesse case o ditte di commercio, o sotto ragione sociale o per accomandita raccolgono sempre i capitali di ben pochi contributori. In tanta penuria pertanto di associazioni tra noi, tra così poca inclinazione a formarne delle nuove, e sotto il prepotente dominio dell' isolamento o dell' individualismo sì radicato nei sentimenti e nei costumi, non so se possa riuscire, nè così facile, nè così pronta la istituzione delle associazioni fondiarie di Francia, le quali suppongono lo spirito di associazione esteso ed operativo al massimo grado di attività e di potenza.

Il disfavore per le carte e pei segni bancarj, è tra noi notorio, e niuno può rivocarlo in dubbio. Le carte ed i segni bancarj ispirano in generale poca fiducia. La nostra abitudine secolare al numerario, il pregiudizio economico che non la carta, ma il danaro sia indizio di ricchezza, anzi esso solo vera ricchezza, la niuna pratica e la dissuetudine alle grandiose imprese dell' industria e del commercio ci fanno restii più che mai, e tuttochè irragionevolmente, a quelle istituzioni che abbisognano delle carte di credito per ben piantarsi, ed operare in grande ed alla libera. Quindi siccome le assicurazioni fondiarie francesi devono da un canto produrre lettere di pegno in ragione dei prestiti, e dall' altro mettere in giro le loro azioni siccome effetti pubblici o di borsa, così non si accoglierà nè sì presto, nè da tutti il progetto, quantunque utilissimo, di coteste associazioni. E posto che il disfavore genera l' antipatia, e l' antipatia è sempre cieca e pertinace, non varranno a vincerlo ed a rimoverlo nè l'idea che le lettere di pegno sono tutt' altro che i soliti simboli o segni del credito o delle banche; nè il vedere ch'esse si sostengono a fronte di tutte le oscillazioni della borsa per essere guarentite e proporzionate sempre al valore già avverato ed il più sicuro dell' ipoteca; nè il dover essere indeffettibile ed in contante il loro rimborso col fondo di riserva, cogli introiti periodici delle annualità, coll' azione di reversibilità collettiva e solidale eziandio contro tutti i membri che costituiscono quelle associazioni.

La concessione contemporanea e promiscua delle associazioni tanto di capitalisti o sovventori, quanto di proprietarj necessitosi di danaro, oltrechè rende incerto ed equivoco il vero scopo del legislatore, può nuocere alle associazioni stesse in quanto i mutui interessi si contrariano e si collidono fra di loro. D'altra parte,

o i capitali rigurgitano per abbondanza, ed allora abbisognano le società dei prestatori o capitalisti e non quelle dei proprietarj; o i proprietarj sono oppressi dalla quantità de' gravosi mutui, e giova loro di liberarsene, ed allora occorrono le associazioni de' proprietarj, e non quelle dei capitalisti. Se non che questa doppia specie di associazioni fondiarie così diverse disconviene alle nostre presenti condizioni, o almeno non può stare se non colla eletta dell' una o dell' altra. Al reale e proficuo soccorrimento della nostra possidenza così frastagliata e divisa, soggiacente al peso delle ipoteche, ed impotente ai bonificamenti dell' agricoltura perchè disprovveduta affatto di capitali, è da andarsi in cerca dei capitalisti o prestatori: il che non può farsi se non in un solo modo, o coll' unione in società di proprietarj richiedenti danaro con ipoteca, o coll' unione di capitalisti che vogliano sovvenirlo a buon patto ed in onta dell' avido usureggiamento. All' ultimo essendo principio di scienza sì teorica che pratica che le società di credito fondiario debbano circoscrivere la loro azione ad un territorio limitato e ristretto; tanto meno sarebbe da approvarsi il promiscuare col loro accumulamento.

Con tre sorta di privilegi il decreto francese 28 febbrajo si fa a proteggere le associazioni di credito fondiario: — Privilegio dell' esclusiva. — Privilegi di sussidj del Governo. — Privilegi di legislazione. — Per il primo, l'associazione già istituita in Parigi esclude per 25 anni qualunque altra nell' estensione di sette dipartimenti vastissimi. — Per i secondi, tanto lo stato, quanto i dipartimenti acquistano ogni anno una data quantità di lettere di pegno; e si assegna a ciascheduna società una porzione dei 10 milioni già assoggettati ad incameramento, ed i corpi morali e gl' incapaci possono convertire capitali nella compera di quelle lettere. Pegli ultimi, le associazioni, però soltanto verso i loro debitori o mutuatarj, non possono essere costrette dal giudice a proroghe di pagamento, possono proseguire gli atti esecutivi ad onta di qualsiasi opposizione, esigono *ipso-facto* il frutto delle annualità già scadute, e dopo 15 giorni dalla costituzione in mora entrano in possesso a titolo di sequestro degl' immobili ipotecati a tutto rischio ed a spesa del proprietario, sono privilegiate pei loro crediti immediatamente dopo le spese di conservazione, fanno decidere della vendita del fondo e delle quistioni relative in via sommaria e senza appello, e in pochi giorni dopo l' eseguimento di alcuni rapidissimi atti di esecuzione parata riescono al conseguimento dei loro capitali colla definitiva aggiudicazione. Io non so se tali e tanti privilegi siano tutti necessarj al prosperamento delle asso-

ciazioni di credito fondiario. Non so neppure se sia buono che con questi si gratifichi solamente alle associazioni verso i loro debitori, e si lascino in dimenticanza affatto i possessori delle lettere di pegno od i loro creditori, i quali non hanno altra azione verso di loro che quella che il codice riserva direttamente contro una società qualunque. Quello che so si è ch' essi sono soverchi e che il loro soperchievole può pregiudicare agli altri creditori isolati ed estranei alle associazioni medesime. D' altro canto, il privilegio dell'esclusiva offende al principio della concorrenza, nè è sempre approvevole, come quelli dei sussidj del governo, che oltre ad essere leciti ed opportuni, sono più che mai conducenti al fine. Quelli poi della legislazione, altri eccedono, ed altri non appariscono interamente conformi a giustizia, massime riguardo all' inappellabilità de' giudicati. Se non che ammessi tutti questi privilegi come ugualmente indispensabili a dar vita ed anima a coteste associazioni, è incerto assai se eglino saranno tra noi ottenibili, e poi a quanti essenziali e subiti cangiamenti di civile legislazione non dovrebbero sottoporsi i nostri codici per poterli aggiustare e conseguire? Se per noi non è difficile un decreto di privilegio esclusivo, non possiamo essere ugualmente sicuri dei sussidj pecuniarii dello stato, e molto meno d' un mutamento sì radicale e sì spedito di legislazione. L' economia è ingiunta in tutti i rami di pubblica amministrazione. Gli stati non sogliono aggravarsi sì tosto di pesi per società, le quali alla fin fine non conferiscono immediatamente al pubblico bene. La esenzione o diminuzione della recente tassa sui capitali, che porterebbe anche quella dei loro interessi, mentre si oppone al principio dell' eguaglianza o di equa distribuzione nelle imposte, è un tanto di meno ai bisogni più urgenti dell' erario. Certo che il governo, persuaso dell' utilità delle associazioni di credito fondiario anco tra noi, non mancherà di proteggerle e di favorirle, e fors' anco di prenderne la iniziativa; ma i suoi sussidj andranno al di là dei mediati o indiretti? Ma fossero pur anco immediati e diretti, ed io lo auguro e lo desidero, chi può farsi mai promettitore di tutti gli essenziali ed istantanei mutamenti che occorrerebbero alla nostra legislazione per metterci sulle vie di Francia, ed accettare la posta? Sebbene il nostro sistema ipotecario primeggi in perfezione, e sia molto adatto preparamento alle società fondiarie per il triplice principio della pubblicità, della specialità, e dell'esclusione del privilegio reale, cionnonostante si desiderano ancora i libri di pubblica intavolazione, che raccertino dell'acquisto nel dominio; sono ancor troppo solenni e tardive le ordinarie formalità per ottenere la effettiva iscrizione e la prenotazione dei titoli ipotecarj; il sequestro e la ese-

cuzione procedono troppo lenti prima di arrivare alla vendita od all' espropriazione ad onta dei termini brevissimi della nuova procedura sommaria e cambiaria, e quel ch' è più, sta ferma ed inconcussa la massima dell' appellabilità dei giudicati e della triplice istanza alla loro validità assoluta o definitiva. Quindi supposto che anco tra noi si volesse emulare alla Francia in far tanto favore alle associazioni di credito fondiario, si converrebbe sempre rivolgere e mutare ad un tratto in alcuni punti cardinali tutta la vigente legislazione. E poi dato anche come possibile e prontissimo questo mutamento e rivolgimento di legislazione, sarebbe ancora controvertibile se ed in qual modo e fin a qual punto convenga privilegiare simili associazioni.

Quantunque nel regno lombardo-veneto non circoli altro che numerario, cionnondimeno vi affluiscono carte di ogni specie anche per il legame degl' interessi economici e politici coll' impero. Quindi se va ad essere sempre più sopraccaricata la circolazione, in ragione che crescono e la quantità e le specie della carta entrante in quella, certamente diverrà maggiore il suo ingombro colle azioni e colle lettere di pegno delle associazioni fondiarie. E di vero, sì le une che le altre, quali effetti girabili e da negoziarsi alla borsa, non possono a meno di non accrescere la massa dei segni circolanti, ed influire colle proprie oscillazioni del cambio in quelle eziandio di tutte le altre. L'associazione stabilita testè in Francia con 25 milioni di franchi, oltre che può emettere in giro tutta questa massa di nuove carte, ha diritto di aggiungervi molti altri milioni di lettere di pegno secondo la quantità dei mutui ipotecarj che andrà di mano in mano formando e conchiudendo. Perlochè istituendosi tra noi le associazioni fondiarie a quel modo, oltrechè si cagionerebbe un nuovo impaccio di carte alla circolazione, che ne è quasi pura ed immune, si andrebbe forse a rischio di crescerne il disfavore e la diffidenza per il loro soverchio moltiplicarsi. Ma poste da un canto anche tutte queste ragioni, qualora le associazioni fondiarie s' impiantassero su quelle di Francia, come sarebbe egli mai raggiunto il vero e diretto scopo di quelle? Questo scopo non è già di conservare integra la proprietà dei possessori nobili, siccome si prefissero già in origine le associazioni fondiarie o territoriali della Slesia prussiana, e meno poi di farne un oggetto di speculazione bancaria, come avvenne di certune nel Belgio. Questo scopo è e dev' essere altissimo e nobilissimo; tutto di utilità pubblica e non privata, e sta nell' anticipare capitali al miglioramento dei fondi, e che possa la terra restituire a piccole e lente annualità, come sono piccoli e lenti i prodotti della sua

forza miglioratrice. Ora, chi dirà mai che ad un tale scopo risponda il piano di quelle associazioni fatte per sovvenire indistintamente tanto i semplici possessori di case in città, quanto tutti quelli che porgono a sicurtà un' ipoteca qualunque con beni-fondi di campagna? Chi potrà impedire che di questi capitali non facciasi sciupìo, o che non si destinino all' ingrandimento delle spese domestiche ed al lusso delle famiglie, al pagamento delle doti, all'estinzione di passività incontrate con tutt' altra intenzione fuori che quella di avvantaggiarne l' agricoltura, alla prodigalità ed a tutta perdita degli agricoltori? Nè si replichi che questi capitali diffusi nella classe de' proprietarj trapassano e colano ben presto in quella dei semplici agricoltori per il vincolo necessario tra la terra ed il lavoro; che se questo è vero altrove, per noi non è che un desiderio od una menzogna. È una fatalità, ma bisogna pur confessarlo che non ci ha vincolo, ma disaccordo e talvolta conflitto tra l' una e l' altro o per le nostre male abitudini ovvero per il sistema in generale della nostra agricoltura. Quindi i capitali a mutuo, arrestandosi nelle mani dei proprietarj, verranno sottratti al bisogno della classe più utile e necessitosa, qual è quella degli agricoltori.

Ma più che questi ostacoli v' ha degli altri che contrastano potentemente al trapiantamento tra noi delle associazioni fondiarie francesi. L' ajuto di queste associazioni si ristringe alla sola classe dei proprietarj, perchè non si dà mutuo senza ipoteca, e perchè seguitano il principio delle altre società primogenite che il credito fondiario è fatto per soccorrere ai soli possidenti, e per impedire la vendita o la distrazione della proprietà immobiliare. Che se un tale ajuto estendasi a pro eziandio dei cercatori di rendita, che vogliano impiegare all' acquisto delle lettere di pegno le piccole somme di avanzo o di risparmio, anche per una tale estensione il fine principale già notato rimarrebbe deluso, e andrebbesi a beneficare persone che non hanno nemmeno l' occasione di poter ridurre a meglio l' agricoltura. E questo inconveniente riesce più ovvio, ove si venga a considerarlo in relazione delle nostre provincie. Quivi in fatto due sono le classi principali agricole, e tra loro assai ben distinte e divise, quella di possessori o proprietarj, e quella degli affittajuoli o coloni, che sono i lavoratori della terra, ossia i veri agricoltori. Tra proprietarj pochi sono quelli che lavorino i campi in casa o per economia. Il sistema più generale è quello dell'affitto, ossia della divisione della terra dal lavoro. I fittajuoli o coloni sono d'ordinario non abbienti, e vanno sforniti del capitale sì di lavoro, come di corredo. Perciò eglino pongono tutto lo studio nel ricavo dell' affitto, nè si curano gran fatto delle migliorìe, ed anco

curandosene non potrebbero nè intraprenderle, nè eseguirle. Non è raro ch'essi debbano ricorrere a terze persone per avere persino le sementi oppure gli animali da lavoro, pagandone l'interesse ad usura; e quantunque per contratto stiano a loro carico e la buona coltura e le migliorìe che ammettono sempre compenso, pure eglino non possono tenere il patto, a meno che qualche solerte e facoltoso padrone non intervenga a dividerlo od a rimetterlo. Per la qual cosa io sono d'avviso non essere nè intera, nè quale è per noi desiderabile, tutta la utilità delle associazioni fondiarie, finchè esse non vengano modellate e costituite in guisa da soccorrere eziandio alla classe tanto numerosa dei nostri coloni od agricoltori. Io non so precisamente a quanto ascenda la rendita netta o spendibile dei fondi in Francia; ma ad ogni modo parmi eccedente l'annualità commisurata a quella, e che debbono pagare i debitori delle associazioni fondiarie in ragione del 5 per % d'interessi, del ½ per l'amministrazione e del 1 o 2 per % di capitale. E tanto più mi confermo in questa opinione, in quanto che le associazioni d'Alemagna se prosperano, vi prosperano perchè hanno tenuta sempre in basso la misura di questa annualità non recandola mai al di là del 5 per % tutto compreso (1). Egli è questo il punto più importante e decisivo della bontà o dell'utilità delle associazioni fondiarie. Se la rendita dei fondi ipotecati non istà in ragguaglio alla tassa o misura delle annualità da pagarsi dai debitori, esse non sono più proficue dei prestiti o mutui ordinarj, ed anzi tornano di quelle assai più rovinose. Ora, s'egli è vero che la rendita netta dei fondi del Veneto a tempi ordinarii oscilla tra il 3 ½ e il 5 per % come punti estremi; come potranno mai i nostri proprietarj pagare annualmente il 6 ½ od il 7 ½ per % a titolo di annualità alle associazioni prestatrici dei capitali? Come sarà mai fattibile un avanzo, se questa tenue rendita è anche aggravata delle spese straordinarie di famiglia e da quelle dell'educazione e del collocamento de' figliuoli? Come potrà mai il nostro piccolo proprietario o possidente, per quanto frugale e previdente si voglia figurarlo; come potrà mai risparmiare un due o tre per cento all'anno e più, se non giunge con tutto quello che già risparmia, a pagare puntualmente nemmeno gl'interessi correnti dei mutui che gravitano già sulla sua terra? Egli pertanto o sarebbe impossibilitato ad approfittare del beneficio delle associazioni fondiarie, od approfittandone dovrebbe ad ogni semestre vedersi minacciato di sequestro o di oppignorazione, e poi dell'espropriazione, ossia dell'ultima sua

(1) V. La citata opera del *Royer: Institutions de crédit, etc.*, pag. 1-80.

ruina. In somma la conclusione in punto ella è questa: Che se i nostri proprietarj non arrivano ora a pagare gli annui interessi del cinque per % dei capitali passivi ordinarii, tanto meno saranno atti a sostenere il peso del 6 ½ e del 7 ½ per % del credito fondiario, allorchè fossero stabilite le società fondiarie sul piede della legislazione francese. Talchè e queste ed altre associazioni di tal fatta tra noi non potranno far fortuna, se non quando si trovi modo a diminuire la tariffa delle annualità già statuite. E dove si ritenga ciò per indispensabile a farle fiorire e vigoreggiare in queste provincie, tutti vedranno addoppiarsi gli ostacoli anche nell' abbassamento di questa tariffa, avuto riguardo alla tassa del danaro, che corre tra noi di presente (1).

Finalmente, se è dettato dell'economia politica, che il credito altro non sia che l' anticipazione dell' avvenire, la conversione dei capitali fissi in liberi o circolanti, la creazione di capitali o valori ideali, il cambio stesso elevato a seconda potenza, chi lo stimerà già venuto a tale colle associazioni fondiarie tratteggiate nel decreto 28 febbrajo del governo francese? Le lettere di pegno, che sono i veri simboli o segni circolanti del credito fondiario, non rappresentano che valori reali, e già consunti; perchè si limitano al solo importo o valore dei prestiti conchiusi con ipoteca.

Il loro giro stesso ripetuto, se aumenta la rapidità della circolazione e non iscema la sicurezza o fiducia nella realizzazione, non accresce però la massa dei valori, e meno poi ne anticipa o produce de' nuovi, e quali sarebbero necessarj alle grandi e vaste intraprese dell' agricoltura. Dunque con queste lettere non si mobilitano, nè si accrescono i valori tutti della terra, ond' è impossibile che in tal guisa soprabbondino i capitali in quella massa che è richiesta per migliorarla e ad accrescere quei tanti tesori dei quali essa è sì larga dispensatrice. Per la qual cosa parmi ci sia un altro ostacolo non lieve, non che nelle associazioni fondiarie di Francia, ma ben anco in tutte le altre, nel non rallargare la potenza del credito, e nello spogliarlo della massima sua funzione economica, riposta nell' anticipare e creare i valori ideali, onde l' agricoltura al pari dell' industria possa ingrandire e maggioreggiare come primo elemento della nostra nazionale

(1) Ciò è tanto vero che leggesi nel *Moniteur* una notizia rapportata dal *Journal des Débats* 20 novembre 1852 la quale conforta questa conclusione. La notizia è che venne stipulata una convenzione tra il ministro dell' interno e la società del credito fondiario di Parigi, colla quale questa società a correspettività della sovvenzione dei 10 milioni impromessale dal Governo, si obbliga ad istituire società fondiarie succursali per tutta la Francia, a far mutui fino alle somme di 200 milioni colla sola annualità per parte dei mutuatarj del 5 per % tutto compreso, e quindi a riscuotere l' importo de' suoi capitali ipotecarj dentro il periodo di 50 anni.

ricchezza. Nè per sì franco asseverare potrei avermi la taccia di contraddizione, avendo io già asserito esserci tra noi disfavore, se non contrarietà, all' uso delle carte o dei segni del credito, senza dei quali assolutamente è impossibile di ampliare la potenza del credito, e di farlo non che giratore dei valori esistenti, ma creatore di nuovi ed ideali; giacchè un tale disfavore si può vincerlo e domarlo coll' abitudine e coll' interesse, e col far toccare con mano essere più lente, ma meno rischiose e più sicure le imprese agrarie e le migliorìe dei fondi in grande delle industriali o manifattrici. Che se un tanto sviluppo di credito non si può sperare così subito, non è però men vero che la legge, la quale non sappia prepararlo e favorirlo, mette per sè già un ostacolo di più al fortunato suo avvenire.

Dopo aver accennati tutti gli ostacoli che si affacciano nella nuova legge francese sulle associazioni di credito fondiario, ponendola a riscontro nella sua effettuazione collo stato delle venete provincie, io spero non si vorrà inferire che io sia poco propenso a queste associazioni, oppure men che persuaso della loro accessibilità alle nostre popolazioni; chè questa sarebbe, a dir vero, una illazione assai precipitata, e contraria del tutto a quanto ho già espresso e sulla loro utilità, e sulla possibilità d'introdurle tra di noi in una data forma più conveniente. Così non vorrei, per quanto ho detto della nuova legge francese sulle associazioni di credito fondiario, che si confondesse la sua applicazione con i suoi principj. L' una è particolare e mutevole. Gli altri sono universali ed immutabili come la scienza. Da questi noi potremo e dovremo prender norma, tuttavolta che si voglia introdurre anco tra noi simili associazioni. Da quella dovremo discostarci, qualora si ami di renderle per noi praticabili ed opportune. Perlochè gli ostacoli da me indicati accennano non ai principj di quella legge, ma soltanto alla sua opportunità o convenienza, alla sua possibilità o realtà avuto riguardo alla presente nostra situazione.

Se non che a qual pro tornano mai queste mie osservazioni che sentono la critica, che sono vuote di scienza dogmatica e scompagnate da un progetto concreto che miri alla pratica delle associazioni fondiarie nelle nostre provincie? A difendermi da questa spontanea accusa è facile la risposta.

Sebbene a certuni potrebbe parere assai più bello e fruttevole di queste osservazioni il venire di botto ad un progetto delle associazioni fondiarie per le venete provincie; cionnondimeno parmi e più utile e più prudente lo stare sull' avviso e l' andare un po' a rilento e ponderati sopra un tale argomento che è pur soggetto di gravi e lunghe ricerche e di moltissime disquisizioni. Il perchè

io entro in lusinga che tali osservazioni, tuttochè rudi e digiune di alte vedute, siano per produrre un qualche vantaggio alla stessa quistione pratica di un simile progetto per i seguenti motivi. Queste osservazioni primieramente mirano a dare un buon indirizzo per noi alla quistione sulle società fondiarie col portarla a dirittura sul vero suo campo, su quello cioè della pratica e della realtà, ossia dell' immediata loro applicazione alle condizioni reali e concrete delle nostre provincie, e col mostrare le sue difficoltà e complicazioni nascenti da ragioni di luogo, di costumi, di stato economico e di legislazione; insinuandosi per tal modo la necessità di bene studiarla ed approfondirla in sè stessa e nelle sue relazioni, e di attenersi alla grande massima di politica legislativa : che bisogna adattare non il luogo ai principj o alle leggi, ma i principj o le leggi al luogo. E cotesto buon indirizzo è quello soltanto che può dare un' anticipata malleveria della bontà del progetto qualunque che verrà a proporsi, della sua ben ideata applicazione e del suo felice riuscimento.

Secondariamente, per tali osservazioni mettendosi in palese tutti gli ostacoli dell' esperienza altrui applicata a noi, si addita la via a prevenirli ed a rimuoverli. Questi ostacoli non sono tutti nè della stessa indole o forza, nè della stessa origine o provenienza. Altri possono essere combattuti, attenuati, oppure prevenuti e rimossi. Gli uni derivano da noi, gli altri sono da noi indipendenti. Una volta che si sappia valutarli od apprezzarli giustamente, si può dire ch' essi sono antivenuti, o vinti per la metà, e che viene a fortificarsi l' idea tanto saggia che in tal bisogna è savio di agognare non all' ideale ed al fantastico, ma solo al reale ed al possibile. In terzo luogo, fissata la massima che in quanto alla pratica applicazione delle società fondiarie al nostro paese siamo in necessità di allontanarci assolutamente dal fatto od esempio altrui, per quantunque seducente e splendido ei ci paja, mutasi per alcun poco il mal vezzo dell' imitare, si eccita il talento dei nostri a pensare e meditare da sè, a trovare ed a proporre alcun che di proprio o di originale; e questo talento non può mancare agli eredi della veneta legislazione, ai figli di quei saggi che fino dalla metà del secolo XVI seppero ideare i *retratti* o consorzii col sistema del credito, non dissimili, dall'oggetto in fuori, dalle associazioni fondiarie tanto decantate a' nostri giorni (1). In quarto luogo, una notizia esatta di tutti gli ostacoli che si frappongono all'applicazione delle associazioni fondiarie francesi al Veneto, non è nè inutile, nè

(1) V. Studj economici sulle condizioni naturali e civili della provincia di Padova, di Ferdinando Cavalli. Padova 1851, pag. 57.

fuori di luogo, dacchè si va bucinando da taluni essere desse non che un esempio, ma il tipo più perfetto di tutte le associazioni future. La legge francese al pari di quelle della stessa Alemagna, prima promovitrice delle associazioni fondiarie dev'essere studiata e discussa tra noi come un fatto già avverato di civile sapienza, come un nuovo sperimento laudabilissimo dell'altrui senno legislativo; ma non mai assunta a norma d' un progetto effettuabile e da applicarsi immediatamente al nostro paese. Colle associazioni fondiarie di Francia si provvede ai soli proprietarj, e noi dobbiamo pensare soprattutto alla classe dei coloni od agricoltori. Con quelle associazioni si può favorire anche l' ozio e la spensierataggine e lo spirito di speculazione; e noi colle nostre dobbiamo fecondare la terra veramente operosa, ed avvantaggiare di capitali l' agricoltura quale prima nostra benefattrice. Finalmente queste osservazioni non saranno prive d' ogni utilità, se potranno essere di sprone a maturare un progetto di associazioni fondiarie, che sappia vincere ed atterrare tutti gli ostacoli fin qui annoverati, e che possa dirsi un progetto veramente veneto per la sua origine, pei suoi principj e per la sua applicazione. Ed anch' io, tenero e caldo propugnatore d' un tale progetto, non ho voluto ristare o per coscienza di manchevoli forze, o per timore d' insuperabili difficoltà, dal cimentare la prova. Perciò quando avrò data in altre letture un' idea abbastanza chiara e compiuta delle varie istituzioni di credito fondiario che vanno per le più rinomate in Europa, mi farò volenteroso a sottoporre all' I. R. Istituto anche il mio progetto, non qual opera finita e da soddisfare, ma quale un tentativo del mio buon volere, quale un voto sempre onesto del bene comune. E così potrà dirsi che anche nella difficile materia del credito fondiario venne fatto presso il nostro Istituto il doppio sperimento del distruggere e dell' edificare, della scienza e della pratica, degli studj sì di utilità comune, come di quelli che volgonsi più direttamente alla prosperità delle nostre provincie.

(Letta il giorno 28 novembre 1852).

SUL CALCOLO APPROSSIMATO

DEGLI

INTEGRALI D' ORDINE SUPERIORE,

NOTA

DEL M. E. PROF. GIUSTO BELLAVITIS

Le applicazioni delle matematiche richieggono bene spesso che si calcolino numericamente alcuni valori, i quali non si possono ridurre a funzioni già conosciute; sarebbe laborioso ed imbarazzante il formar tavole, che unite a quelle utilissime dei logaritmi e delle funzioni circolari, ed alle altre, di minor uso, delle trascendenti ellittiche, del fattoriale $[1]^x$, e degl' integrali $\int e^{-x^2} \mathrm{d}x$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\log x}$, ec., dessero modo di calcolare parecchie altre funzioni. Siccome molte volte le funzioni incognite dipendono dall' integrazione, così tornano opportuni i metodi per calcolare numericamente gl' integrali dei varii ordini. In questa nota espongo le formule che a tal uopo mi sembrano di più generale e comodo uso.

1.° Dati alquanti valori $(y_0, y_1, y_2 \ldots y_n)$ che io suppongo corrispondere ad intervalli eguali della variabile indipendente (x), si vogliono determinare gl' integrali primo, secondo, terzo, ec., della funzione (y), cui quei valori appartengono. Si scrivano le differenze prime dei dati valori $(y_0, y_1, \ldots)$, ed accanto ad esse le differenze seconde, poi le terze, ec.: questi calcoli facilissimi giovano eziandio a scoprire qualche errore che fosse occorso nella determinazione dei dati valori. Per avere l' integrale primo, piuttostochè moltiplicare quei valori $(y_0, y_1 \ldots)$ per appositi coefficienti (i quali cangerebbero col numero di essi valori), giova meglio prendere in ciascun ordine di differenze le somme, o le differenze, alternativamente, delle due differenze estreme, e quelle somme, o differenze, moltiplicarle poi per coefficienti costanti: così il valore dell' integrale viene

espresso da una serie, della cui convergenza, od almeno semiconvergenza, è facile formarsi idea sufficiente ad apprezzare il grado di approssimazione che per tal modo si ottiene.

2.° Gl' integrali secondo, terzo, ec. ($\int^2 y\,dx^2$, $\int^3 y\,dx^3$, ec.) richieggono oltre i predetti valori ($y_0, y_1, \ldots$), insieme colle serie delle loro differenze, anche altri numeri, che si ottengono con egual facilità procedendo in verso opposto a prendere le somme, anzichè le differenze. Vale a dire, si scriverà una serie di numeri, le cui differenze sono appunto i valori ($y_0, y_1 \ldots$) primitivamente dati; poscia altra serie di numeri, che avranno per differenze quelli già trovati, e così in seguito. Ciascun integrale è poi determinato da una speciale serie infinita non molto dissimile da quella, che dà l' integrale primo. Soltanto bisogna preventivamente determinare i primi termini di quelle serie di numeri, che sono le sommatorie dei dati valori: a tale scopo, se si stabilisca che all' origine ($x = 0$) debba svanire, oltrechè l' integrale secondo, anche il suo differenziale, ed oltrechè l' integrale terzo anche i suoi due differenziali primo e secondo, e così in seguito, bisogna con apposita serie infinita determinare la prima di ciascuna sommatoria.

3.° Ecco il prospetto dei valori della funzione y, e delle sue differenze e sommatorie: colla caratteristica V indico i valori variati corrispondenti ad $x = 1, 2, \ldots . n$.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & & & y=y_0 & & & \\
 & & & V\Sigma y & & \Delta y=Vy-y & & \\
 & & V^2\Sigma^2 y & & Vy=y_1 & & \Delta^2 y=V\Delta y-\Delta y & \\
 & V^3\Sigma^3 y & & V^2\Sigma y=V\Sigma y+Vy & & V\Delta y=V^2 y-Vy & & \ldots \\
\ldots & V^3\Sigma^2 y=V^2\Sigma^2 y+V^2\Sigma y & & & V^2 y=y_2 & & V\Delta^2 y=V^2\Delta y-V\Delta y & \\
\ldots & . & . & . & . & . & . & \ldots \\
\ldots & . & . & . & . & . & . & \ldots \\
\ldots & . & . & . & . & . & . & \ldots \\
\ldots & V^n\Sigma^3 y & . & . & . & . & V^{n-2}\Delta^2 y & \ldots \\
 & & V^n\Sigma^2 y & V^n\Sigma y & . & V^{n-1}\Delta y & & \\
 & & & & V^n y=y_n & & &
\end{array}
$$

4.° Sono note le relazioni tra queste differenze e sommatorie ed i differenziali, ossia le derivate rispetto alla variabile indipendente x, che segneremo colla caratteristica d. Tali relazioni possono esprimersi simbolicamente così:

$$\Delta = V - V^0, \quad \Sigma = \frac{1}{\Delta}, \quad \Delta = e^d - 1, \quad d = \log(1+\Delta), \quad \int = \frac{1}{d} = \frac{1}{\log(1+\Delta)}.$$

Con V^0, così pure con Δ^0 oppure d^0 viene espressa la funzione primitiva.

5.° Cominciando dall' integrale primo, abbiamo:

$$(1) \qquad \Delta\int = \frac{\Delta}{\log(1+\Delta)} = \Delta^0 + \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{12}\Delta^2 + \frac{1}{24}\Delta^3 - \text{ec.}$$

Questo $\Delta\int$ è l' integrale esteso da $x=0$ ad $x=1$; per avere quello esteso da $x=0$ ad $x=n$, che segneremo con ${}^0\int_n$, bisogna moltiplicare $\Delta\int$ per $1+V+V^2\ldots+V^{n-1}=\frac{V^n-1}{V-1}=\frac{V^n-1}{\Delta}$; perciò

$$(2) \qquad {}^0\int_n = \frac{V^n-1}{\log(1+\Delta)} = (V^n-1)\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{2}(V^n - V^0) - \frac{1}{12}(V^n-1)\Delta + \frac{1}{24}(V^n-1)\Delta^2 - \text{ec.}$$

Questa formola non è al nostro caso, perchè contiene le $V^n\Delta$, $V^n\Delta^2$, ec. che non sono comprese nel precedente (§ 3) prospetto: noi possiamo eliminarle osservando che $V^n\Delta = V^{n-1}\Delta + V^{n-2}\Delta^2 + V^{n-3}\Delta^3 + \text{ec.}$, ed in generale $V^i = \frac{1}{(1-\Delta V^{-1})^i}$. Ma possiamo fare immediatamente la sostituzione nella formula simbolica (2) separandola in due parti $\frac{V^n}{\log(1+\Delta)}$, $\frac{-1}{\log(1+\Delta)}$ e nella prima parte ponendo $-\log\left(1-\frac{\Delta}{1+\Delta}\right) = -\log(1-V^{-1}\Delta)$ in luogo di $\log(1+\Delta)$; così si ha

$$(3) \qquad \frac{1}{\alpha}\,{}^0\int_n = \frac{-V^n}{\log(1-V^{-1}\Delta)} - \frac{1}{\log(1+\Delta)} = (V^{n+1}-1)\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{2}(V^n+V^0)$$
$$- \frac{1}{12}(V^{n-1}-1)\Delta - \frac{1}{24}(V^{n-2}+1)\Delta^2 - \frac{19}{720}(V^{n-3}-1)\Delta^3$$
$$- \frac{3}{160}(V^{n-4}+1)\Delta^4 - 0{,}0142692\,(V^{n-5}-1)\Delta^5$$
$$- 0{,}0113674\,(V^{n-6}+1)\Delta^6 - \text{ec.}$$

Al primo membro abbiamo dato il coefficiente $\frac{1}{\alpha}$ pel caso che i valori y, Vy, ... $V^n y$ corrispondessero ad $x=0, \alpha, 2\alpha, \ldots\ldots n\alpha$, anzichè ad $x=0, 1, \ldots n$. Il primo termine dell' ultimo membro è

$$\frac{V^{n+}-1}{V-1} = V^0 + V + \ldots + V^n.$$

6.° L' uso di questa (3) si renderà palese col seguente esempio numerico, nel quale $y = \frac{1}{x+1}$, $\alpha = \frac{1}{5}$, $n = 5$; sicchè vuol determinarsi $\int \frac{dx}{x+1}$ da $x = 0$ ad $x = 1$, vale a dire il log 2. Ridotte in decimali le frazioni $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{5}{10}$ se ne scriveranno come segue tutte le differenze:

Σ^2	Σ	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
		1,0000000					
	0,4833987		— 1666667				
0,4003925				476191			
		0,8333333			— 178572		
	1,3167320		— 1190476			79366	
1,7171245				297619			— 39685
		0,7142857			— 99206		
	2,0310177		— 892857			39681	
3,7481422				198413			
		0,625			— 59525		
	2,6560177		— 694444				
6,4041599				138888			
		0,5555556					
	3,2115733		— 555556				
		0,5					
6,8045524	2,7281746	1,5	1111111	615079	119047	119047	00000
6,0037674	3,6949720	—0,5		—337303	—238097	—39685	—79370

Dopo ciò si formano le somme 1,5, 0,0615079, 0,0119047 dei termini primo ed ultimo delle colonne y, Δ^2, Δ^4; e nelle colonne intermedie dei Δ, Δ^3, Δ^5 sottraendo il primo numero dall' ultimo si ottengono le differenze 0,1111111, 0,0119047. Questi numeri moltiplicati pei coefficienti della formula (3) ed uniti colla somma 4,2281746 dei cinque valori di y danno 3,46 ... che moltiplicato per $\alpha = 0,2$ offre il valore di log 2 = 0,6931472 con un errore di + 0,0000158, che è minore di quanto avrebbesi sperato osservando la grandezza degli ultimi termini della serie.

	4,2281746
—	0,75
—	0092593
—	25628
—	3142
—	2232
	3,4658151
	0,6931630

7.° Veniamo all' integrale secondo. Collo stesso ragionamento che ci servì pel primo troveremo:

$$(4)\qquad \frac{1}{\alpha^2}\,{}^0\!\!\int_n {}^0\!\!\int = \frac{V^n-1}{(\log(1+\Delta))^2} = \frac{V^n}{(\log(1-V^{-1}\Delta))^2} - \frac{1}{(\log(1+\Delta))^2}$$

$$= (V^{n+2}-1)\frac{1}{\Delta^2} - (V^{n+1}+1)\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{12}(V^n - V^0)$$

$$-\frac{1}{240}(V^{n-2}-1)\Delta^2 - \frac{1}{240}(V^{n-3}+1)\Delta^3 - 0{,}0036541\,(V^{n-4}-1)\Delta^4$$

$$-\,0{,}0031415\,(V^{n-5}+1)\Delta^5 - 0{,}0027086\,(V^{n-6}-1)\Delta^6 - \text{ec.}$$

I due primi termini dell' ultimo membro sono:

$$\frac{V^{n+2}-1}{V-1}\,\Sigma - V^{n+1}\,\Sigma - \Sigma = (V + V^2 \ldots + V^n)\,\Sigma.$$

8.° Ci resta da determinare $V\Sigma$ (dal quale dipendono i successivi $V^2\Sigma$, $V^3\Sigma$, ec.) in guisa che il differenziale dell' integrale secondo $\iint$ svanisca esso pure colla x. Serve a tal uopo la formula

$$(5)\qquad V\Sigma = \frac{1}{e^{d}-1} - \frac{1}{d} + d^0 = \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\log(1+\Delta)} + \Delta^0.$$

Se si conoscano i valori delle derivate dy, d^2y, ec. corrispondenti ad $x=0$, si adoprerà la

$$(6)\qquad V\Sigma = \frac{1}{2}d^0 + \frac{1}{12}\alpha d - \frac{1}{6.120}\alpha^3 d^3 + \frac{1}{120.252}\alpha^5 d^5$$
$$-\frac{1}{5040.240}\alpha^7 d^7 + \text{ec.}$$

Altrimenti si sostituiranno i già calcolati valori di y, Δy, $\Delta^2 y$, ec. nell' altro sviluppo della (5)

$$(7)\qquad V\Sigma = \frac{1}{2}\Delta^0 + \frac{1}{12}\Delta - \frac{1}{24}\Delta^2 + \frac{19}{720}\Delta^3 - \frac{3}{160}\Delta^4 + \text{ec.}$$

i cui coefficienti numerici sono quelli stessi della (3).

9.° Applichiamo queste formule al precedente esempio, e cerchiamo $\iint\frac{dx^2}{x+1}$. Nel presente caso per $x=0$ si ha $y=1$, $dy=-1$, $d^2y=2$, $d^3y=-6$, $d^4y=24$, ec.; sostituendo nella (6) si trova $V\Sigma=0{,}4833987$, che è il valore adoperato nel calcolo scritto superiormente. La serie sem-

	+ 0,5000000
	— 0,0166667
	+ 667
	— 13
$V\Sigma =$	0,4833987

bra convergentissima, ma in fatti è soltanto semiconvergente, cioè ha i termini coi segni alternativi, che in sulle prime vanno rapidamente diminuendo per poscia crescere infinitamente. La serie (7) ci avrebbe dato invece $V\Sigma = 0,4834504$ valore meno approssimato.

	0,5000000
—	0,0138889
—	19841
—	4712
—	1488
—	566
$V\Sigma =$	0,4834504

10.° Per continuare il calcolo dell'integrale secondo, dopo aver calcolata la colonna delle Σ alla loro somma 9,6987394, uniremo, come lo indica la (4), le differenze $-0,5$, $-0,0337303$, $-0,0039685$ e le somme $-0,0238097$, $-0,0079370$ dei numeri estremi di ciascuna colonna moltiplicate rispettivamente per $\frac{1}{12}$, $-\frac{1}{240}$, ec. La somma moltiplicata per α^2 dà il valore di $\int_1^0\int^0 \frac{1}{x+1} = 2\log 2 - 1 = 0,3862944$ con leggerissimo errore.

	9,6987394
—	0,0416667
	9,6570727
+	1405
+	992
+	145
+	249
	9,6573518
	0,3862941

11.° Anche per l'integrale terzo opereremo nello stesso modo ed avremo:

$$\int_n^0\int^0\int^0 = \frac{V^n - 1}{(\log(1+\Delta))^3} = \frac{-V^n}{(\log(1-V^{-1}\Delta))^3} - \frac{1}{(\log(1+\Delta))^3}$$

$$= (V^{n+3}-1)\frac{1}{\Delta^3} - \frac{5}{2}(V^{n+2}+1)\frac{1}{\Delta^2} + \frac{1}{2}(V^{n+1}-1)\frac{1}{\Delta}$$

$$+ \frac{1}{240}(V^{n-1}-1)\Delta + \frac{1}{480}(V^{n-2}+1)\Delta^2 + \text{ec.}$$

I tre primi termini si riducono, mediante la $V = 1 + \Delta$, ad altra forma più opportuna ai nostri calcoli. Troveremo tal forma sviluppando i primi termini di $\frac{V^n}{(\log(1+\Delta))^3} + \frac{1}{(\log(1-V^{-1}\Delta))^3}$, i quali sono

$$(V^n - V^3)\Sigma^3 + \frac{5}{2}(V^n + V^2)\Sigma^2 + \frac{1}{2}(V^n - V)\Sigma;$$

e siccome $(V^n - V^3)\Sigma^3 = (V^3 + V^4 \ldots + V^{n-1})\Sigma^2$; così finalmente

$$(8)\qquad \frac{1}{a^3}\,{}^0\!\!\int_n {}^0\!\!\int {}^0\!\!\int = (V^2+V^3+V^4\ldots+V^n)\,\Sigma^2 + \frac{1}{2}(V^n+V^2)\,\Sigma^2$$
$$+\frac{1}{2}(V^n-V)\,\Sigma + \frac{1}{240}(V^{n-1}-1)\,\Delta + \frac{1}{480}(V^{n-2}+1)\,\Delta^2$$
$$+\frac{1}{945}(V^{n-3}-1)\,\Delta^3 + 0{,}0005456\,(V^{n-4}+1)\,\Delta^4$$
$$+0{,}0002720\,(V^{n-5}-1)\,\Delta^5 + \text{ec.}$$

12.° Perchè l'integrale terzo e i suoi differenziali primo e secondo svaniscano quando $x=0$ bisogna che la $V\Sigma$ siasi determinata come al § 8; e che inoltre la $V^2\Sigma^2$ si determini colle $V^2\Sigma^2 = \frac{1}{(e^{-d}-1)^2} - \frac{1}{d^2} - \frac{1}{d}$

$$= \frac{e^{2d}}{(e^d-1)^2} - \frac{1}{d^2} - \frac{1}{d} = \frac{1+2\Delta+\Delta^2}{\Delta^2} - \frac{1}{(\log(1+\Delta))^2} - \frac{1}{\log(1+\Delta)},$$

che si sviluppa nella

$$(9)\qquad V^2\Sigma^2 = \frac{5}{12}d^0 + \frac{ad}{12} + \frac{a^2d^2}{240} - \frac{a^3d^3}{720} - \frac{a^4d^4}{6048} + \frac{a^5d^5}{30240} + \text{ec.}$$

oppure nella

$$(10)\qquad V^2\Sigma^2 = \frac{5}{12}\Delta^0 + \frac{\Delta}{12} - \frac{5}{80}\Delta^2 + \frac{1}{45}\Delta^3 - \frac{915}{60480}\Delta^4$$
$$+0{,}0111276\,\Delta^5 - 0{,}0086588\,\Delta^6 + \text{ec.}$$

13.° Nel nostro solito esempio troveremo mediante la (9) $V^2\Sigma^2 = 0{,}4003925$, e mediante la (10) $V^2\Sigma^2 = 0{,}4004313$; il primo valore come più esatto fu adoperato a formare la colonna Σ^2 del calcolo del § 6. Poscia per ottenere l'integrale terzo si formarono la somma $(V^n+V^2)\Sigma^2 = 6{,}8045524$ e la differenza $(V^n-V)\,\Sigma = 2{,}7281746$, questi e gli altri numeri già calcolati (§ 6) per formare l'integrale primo, sostituiti nella (8) danno ${}^0\!\int_1 {}^0\!\int {}^0\!\int \frac{1}{x+1} = 0{,}13629434$, che è inferiore al giusto di appena 2 delle ottave decimali.

$(V^2+V^3+\ldots+V^n)\,\Sigma^2 =$	12,2698191
+	3,4022762
+	1,3640873
+	4630
+	1281
+	126
+	65
	17,0367928
	0,13629434

14.° Per istabilire la legge con cui procedono le serie relative agl' integrali d' ordine superiore, trovo opportuno presentare qui di seguito una tavola di

coefficienti numerici che ho già pubblicato negli *Annali delle scienze del regno lombardo-veneto* 1.° bimestre 1834, e che in molte circostanze riesce vantaggioso avere sott' occhio.

TAVOLA DEI COEFFICIENTI $(n)_r$

I valori di n sono scritti nella prima colonna, e quelli di r (sempre positivi) nella prima riga.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
—4	10	65	350	1701	7770	34105	145750	611501	2532530	
—3	6	25	90	301	966	3025	9330	28501	86526	261625
—2	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047
—1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{-1}{120}$	0	$\frac{1}{252}$	0	$\frac{-1}{240}$	0	$\frac{1}{132}$
1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{-1}{120}$	0	$\frac{1}{252}$	0	$\frac{-1}{240}$	0	$\frac{1}{132}$
2	1	$\frac{-5}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{-1}{120}$	$\frac{-1}{120}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{1}{252}$	$\frac{-1}{240}$	$\frac{-1}{240}$	$\frac{1}{132}$
3	3	2	$\frac{-3}{4}$	$\frac{19}{120}$	$\frac{-1}{40}$	$\frac{-4}{315}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{19}{5040}$	$\frac{-1}{80}$	$\frac{-1}{1320}$
4	6	11	6	$\frac{-251}{120}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{-221}{2520}$	$\frac{-11}{420}$	$\frac{199}{5040}$	$\frac{-1}{840}$	$\frac{-101}{2640}$
5	10	35	50	24	$\frac{-95}{12}$	$\frac{863}{504}$	$\frac{-95}{252}$	$\frac{-47}{720}$	$\frac{79}{504}$	$\frac{-53}{1232}$
6	15	85	225	274	120	$\frac{-19087}{504}$	$\frac{1375}{168}$	$\frac{-9829}{5040}$	$\frac{-19}{112}$	$\frac{8213}{11088}$
7	21	175	735	1624	1764	720	$\frac{-5257}{24}$	$\frac{33953}{720}$	$\frac{-2849}{240}$	$\frac{-439}{1584}$
8	28	322	1960	6769	13132	13068	5040	$\frac{-1070017}{720}$	$\frac{57281}{180}$	$\frac{-330157}{3960}$

15.° I numeri che nella tavola stanno fuori delle righe più grosse, e che sono tutti interi, sono i coefficienti degli sviluppi dei fattoriali in potenze e di queste in quelli. Così

$$[a]^4 = a(a+1)(a+2)(a+3) = a^4 + (4)_1 a^3 + (4)_2 a^2 + (4)_3 a,$$
$$[a]^{-3} = \frac{1}{(a-1)(a-2)(a-3)} = a^{-3} + (-3)_1 a^{-4} + (-3)_2 a^{-5} + (-3)_3 a^{-6} + \text{ec.},$$
$$a^4 = [a]^4 - (-3)_1 [a]^3 + (-2)_2 [a]^2 - (-1)_3 a,$$
$$a^{-4} = [a]^{-4} - (-5)_1 [a]^{-5} + (-6)_2 [a]^{-6} - (-7)_3 [a]^{-7} + \text{ec.}$$

16.° Le espressioni generali dei numeri $(n)_r$ sono di forma piuttosto complicata:

$$(n)_1 = \frac{(-n)(1-n)}{2}, \quad (n)_2 = \frac{(1-3n)(-n)(1-n)(2-n)}{24},$$
$$(n)_3 = \frac{(-n)^2(1-n)^2(2-n)(3-n)}{48}, \quad \text{ecc.}$$

Essi tutti si annullano quando $r+1>n>-1$: togliendo dalle predette espressioni quel fattore che le fa annullare, si hanno altri numeri frazionarii, che io segno con $\frac{1}{0}(n)_r$, e che sono quelli posti nella tavola tra le righe grosse; così $\frac{1}{0}(0)_1 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{0}(0)_2 = \frac{1.1.2}{24}$, $\frac{1}{0}(0)_3 = \frac{0.1.2.3}{48}$, ec., $\frac{1}{0}(1)_1 = \frac{-1}{2}$,
$\frac{1}{0}(1)_2 = \frac{-2.-1.1}{24}$, $\frac{1}{0}(1)_3 = \frac{1.0.1.2}{48}$, ec. $\frac{1}{0}(2)_2 = \frac{-3.-2.-1}{24}$,
$\frac{1}{0}(2)_3 = \frac{2^2.1.1}{48}$, $\frac{1}{0}(3)_3 = \frac{9.4.-1}{48}$, ec. ec.

17.° I coefficienti della tavola si calcolano mediante la relazione $(n+1)_r = (n)_r + n(n)_{r-1}$, essendo inoltre

$$(n)_0 = 1, \quad (-1)_r = 1, \quad (r+1)_r = 1.2.3\ldots.r.$$

Pei coefficienti frazionarii serve la stessa relazione, purchè si determinino quelli della prima riga mediante le formule, che danno i numeri Bernulliani, giacchè $\frac{1}{0}(0)_2 = \frac{1}{2}B_1$, $\frac{1}{0}(0)_4 = -\frac{1}{4}B_3$, $\frac{1}{0}(0)_6 = \frac{1}{6}B_5$, ec. Per sapere come procedano questi $\frac{1}{0}(0)_{2r}$ giova aver presente la formula

$$\mp \frac{1}{0}(0)_{2r} = \frac{2.1.2.3\ldots.(2r-1)}{(2\pi)^{2r}}\left(1 + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{4^{2r}} + \text{ec.}\right)$$

18.° Ora coi coefficienti $(n)_r$ e coi fattoriali dell' unità 1, 2, 6, 24, 120, ec. si ha

$$(11)\quad \left(\frac{\Delta}{\log(1+\Delta)}\right)^{r+1} = 1 + \frac{(-r)_1}{r}\Delta + \frac{(1-r)_2}{(r-1)r}\Delta^2 \ldots$$

$$+ \frac{(0)_{r+1}}{0.1.2.\ldots.r}\Delta^{r+1} - \frac{(1)_{r+2}}{1.0.1.2\ldots r}\Delta^{r+2} + \frac{(1)_{r+3}}{2.0.1.2\ldots r}\Delta^{r+3}$$

$$- \frac{(5)_{r+4}}{6.0.1.2\ldots r}\Delta^{r+4} + \text{ec.}$$

$$(12)\quad \left(\frac{d}{e^d-1}\right)^r = 1 + \frac{(r)_1}{1-r}d + \frac{(r)_2}{(1-r)(2-r)}d^2 \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(r)_r}{(1-r)(2-r)\ldots.(-1)\,0}d^r + \frac{(r)_{r+1}}{(1-r)(2-r)\ldots(-1)0.1}d^{r+1}$$

$$+ \frac{(r)_{r+2}}{(1-r)\ldots(-1)\,0.1.2}d^{r+2} + \text{ ec.}$$

19.° Risulta dalla (11) e dalle considerazioni fatte ai § 5. 7. 11 che

$$\int^{r+1} = (V^n - V^{r+1})\,\Sigma^{r+1} + \frac{(-r)_1}{r}(V^n + V^r)\;\Sigma^r$$

$$+ \frac{(1-r)_2}{(r-1)r}(V^n - V^{r-1})\;\Sigma^{r-1} + \text{ec.}$$

e siccome $(V^n - V^{r+1})\;\Sigma^{r+1} = (V^{r+1} + V^{r+2} \ldots + V^{n-1})\;\Sigma^r$; così avremo la formula, che comprende come casi particolari le (3) (4) (5) .

$$(13)\quad \frac{1}{\alpha^{r+1}}\int_n^0\!\!\int^{0\;r} = (V^r + V^{r+1} \ldots + V^n)\;\Sigma^r$$

$$+ \frac{(-r)_1 - r}{r}(V^n + V^r)\;\Sigma^r + \frac{(1-r)_2}{(1-r)r}(V^n - V^{r-1})\;\Sigma^{r-1}$$

$$+ \frac{(2-r)_3}{(r-2)(r-1)r}(V^n + V^{r-2})\;\Sigma^{r-2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)_r}{1.2\ldots r}(V^n \mp V)\;\Sigma \mp \frac{(0)_{r+1}}{0.1.2\ldots r}(V^n \pm V^0)$$

$$\mp (V^{n-1} \mp V^1)\,\Delta \mp \frac{(2)_{r+3}}{2.0.1.2\ldots.r}(V^{n-2} \pm 1)\,\Delta^2$$

$$\mp \frac{(5)_{r+4}}{6.0.1.2.\ldots r}(V^{n-3} \mp 1)\,\Delta^3 \mp \text{ec.}$$

i segni superiori valendo per r pari e gli inferiori per r dispari. Ciascun

delle $V\Sigma$, $V^2\Sigma^2$, ... dev'essere determinata mediante la formula, che comprende come casi particolari le (6) (9),

$$(14)\qquad V^r\Sigma^r = \frac{1}{0.1.2\ldots(r-1)}\Big\{-(r)_r d^0 + \frac{1}{1}(r)_{r+1}\alpha d - \frac{1}{2}(r)_{r+2}\alpha^2 d^2 + \frac{1}{6}(r)_{r+3}\alpha d^r - \text{ec.}\Big\};$$

che se non si conoscano i differenziali, si ridurrà questa formula a contenere invece le differenze, osservando che $\alpha d = \log(1+\Delta)$, e si avranno le formule (7) (10) e la generale

$$(15)\qquad V^r\Sigma^r = \frac{1}{0.1.2\ldots(r-1)}\Big\{-(r)_r\Delta^0 + \frac{1}{1}(r)_{r+1}\Delta - \frac{1}{2}\Big((r)_{r+1}(2)_1 + (r)_{r+2}\Big)\Delta^2 + \frac{1}{6}\Big((r)_{r+1}(3)_2 + (r)_{r+2}(3)_1 + (r)_{r+3}\Big)\Delta^3 - \frac{1}{24}\Big((r)_{r+1}(4)_3 + (r)_{r+2}(4)_2 + (r)_{r+3}(4)_1 + (r)_{r+4}\Big)\Delta^4 + \text{ec.}\Big\}.$$

20.° Nell'esempio del § 6 trovai mediante le (14), $V^3\Sigma^3 = 0{,}3597074$, $V^4\Sigma^4 = 0{,}3342202$, $V^5\Sigma^5 = 0{,}3162325$; e col loro mezzo calcolai l'integrale quarto $= 0{,}03530735$, il quinto $= 0{,}007237008$, ed il sesto $= 0{,}0012281368$, i cui errori giungono appena a due unità delle ultime decimali.

21.° Potrebbero cercarsi altre formule, che dessero gli integrali tra $x = 0$ ed $x = n$ conoscendo i valori di y corrispondenti ad $x = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ... $\left(n - \frac{1}{2}\right)$: gioverebbe pure determinare direttamente le differenze degli integrali quando x riceve un dato accrescimento. D'altronde, se si supponessero conosciuti non solamente i valori delle derivate corrispondenti ad $x = 0$, ma eziandio quelli corrispondenti ad $x = n$, si potrebbe fare a meno di calcolare (§ 1) le differenze, ed adoperare le formule

$$\frac{1}{\alpha}{}^0\!\!\int_n = \frac{1}{2}V^0 + V^1 + V^2\ldots + V^{n-1} + \frac{1}{2}V^n + (V^n - 1)\left(\frac{\alpha d}{12} - \frac{\alpha^3 d^3}{6.120} + \frac{\alpha^5 d^5}{120.252} - \frac{\alpha^7 d^7}{5040.240} + \text{ec.}\right),$$

$$\frac{1}{\alpha^2}\,{}^0\!\!\int_n{}^0\!\!\int = (\mathrm{V}+\mathrm{V}^2\ldots+\mathrm{V}^n)\,\Sigma+\frac{1}{12}(\mathrm{V}^n-\mathrm{V}^0)$$

$$+(\mathrm{V}^n-1)\left(\frac{\alpha^2\mathrm{d}^2}{2.120}-\frac{\alpha^4\mathrm{d}^4}{24.252}+\frac{\alpha^6\mathrm{d}^6}{720.240}-\text{ec.}\right),$$

$$\frac{1}{\alpha^3}\,{}^0\!\!\int_n{}^0\!\!\int{}^0\!\!\int = (\mathrm{V}^2+\mathrm{V}^3\ldots+\mathrm{V}^n)\,\Sigma^2+\frac{1}{2}(\mathrm{V}^n+\mathrm{V}^2)\,\Sigma^2+\frac{1}{2}(\mathrm{V}^n-\mathrm{V})\,\Sigma$$

$$+(\mathrm{V}^n-1)\left\{\frac{\alpha\mathrm{d}}{240}-\frac{\alpha^3\mathrm{d}^3}{6.504}+\frac{\alpha^5\mathrm{d}^5}{120.480}-\frac{\alpha^7\mathrm{d}^7}{5040.264}+\text{ec.}\right\}.$$

Ma pel calcolo di un integrale isolato mi sembrano di un uso più generale le formule date precedentemente, le quali non richieggono alcuna conoscenza intorno alla funzione, di cui sono dati gli $n+1$ valori $y_0, \ldots y_n$. Applicando quelle formule al caso di $y=e^x$, posto $\alpha=\frac{1}{5}$, $n=5$, e calcolando con sei decimali ottenni gl' integrali da $x=0$ ad $x=1$ primo, secondo, terzo, quarto, quinto e sesto rispettivamente esatti fino alle decimali 6.ª, 6.ª, 6.ª, 7.ª, 8.ª, 9.ª

Aggiunta alla suddetta Memoria.

Nel Giornale astronomico intitolato *Berliner Astr. Jahrbuch für* 1837, l' Encke diede alcune formule, che sono comodissime per calcolare molti valori successivi degli integrali di una funzione data mediante i suoi valori corrispondenti ad $x=0, 1, 2, \ldots$. Spero che a qualche lettore piaccia di trovare qui esposte brevemente tali formule, alle quali aggiungo quelle che danno i valori delle derivate, che in alcune occasioni possono occorrere non meno degli integrali.

Supponiamo che si conoscano tutte le differenze apparenti dal seguente prospetto

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & \vdots & & & & & \\
\mathrm{V}\Sigma^3 & \mathrm{V}\Sigma^2 & \Sigma & \mathrm{V}^0=y_0 & \mathrm{V}^{-1}\Delta & \mathrm{V}^{-1}\Delta^2 & \mathrm{V}^{-2}\Delta^3 & \mathrm{V}^{-2}\Delta^4 & \mathrm{V}^{-3}\Delta^5 \\
\mathrm{V}^2\Sigma^3 & \mathrm{V}^2\Sigma^2 & \mathrm{V}\Sigma & \mathrm{V}^1=y_1 & \Delta & \Delta^2 & \mathrm{V}^{-1}\Delta^3 & \mathrm{V}^{-1}\Delta^4 & \mathrm{V}^{-2}\Delta^5 \\
\mathrm{V}^3\Sigma^3 & \mathrm{V}^3\Sigma^2 & \mathrm{V}^2\Sigma & \mathrm{V}^2=y_2 & \mathrm{V}\Delta & \mathrm{V}\Delta^2 & \Delta^3 & \Delta^4 & \mathrm{V}^{-1}\Delta^5 \\
\mathrm{V}^4\Sigma^4 & & \mathrm{V}^3\Sigma & & \mathrm{V}^2\Delta & & \mathrm{V}\Delta^3 & & \Delta^5 \\
 & & & \vdots & & & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

perlochè converrà calcolare altri valori della y prima e dopo dei due confini y_0 y_n, il che è quanto io volli evitare nella precedente memoria. Del resto anche colla sola conoscenza dei $y_0, y_1 \ldots y_n$, se supporremo che le Δ^n sieno costanti potremo estendere la tavola come nel precedente prospetto, e come è richiesto dalle formule dell' Encke.

Il valore della prima derivata d, che simbolicamente è espresso da $\mathrm{d} = \log(1 + \Delta)$, viene dato da una serie molto semplice, quando si segni con M il medio aritmetico tra un valore ed il suo variato successivo, cioè si ponga $M V^i = \frac{1}{2}(V^i + V^{i+1})$; questa serie è

$$\text{(I)} \qquad \alpha \mathrm{d} = M\Big(V^{-1}\Delta - \frac{1}{6}V^{-2}\Delta^3 + \frac{1}{30}V^{-3}\Delta^5 - \frac{1}{140}V^{-4}\Delta^7 + \frac{1}{630}V^{-5}\Delta^9 - \frac{1}{2772}V^{-6}\Delta^{11} + \text{ec.}\Big).$$

Si vede che la formula contiene le sole differenze prima, terza, quinta, ec., e che i termini $V^{-1}\Delta$, Δ; $V^{-2}\Delta^3$, $V^{-1}\Delta^3$; $V^{-3}\Delta^5$, $V^{-2}\Delta^5$; ec., dei quali deggiono calcolarsi le medie aritmetiche, sono nella precedente tavola in due righe orizzontali l'una sopra, l'altra sotto, del termine y_0, cui appartiene la derivata che vuol calcolarsi, e che è segnata con d. Vi si è aggiunto il coefficiente α pel caso che i valori della x, cui corrispondono $y_1, y_2, y_3 \ldots$ sieno α, 2α, $3\alpha \ldots$

Per la derivata seconda non occorre alcun medio e si ha

$$\text{(I)} \qquad \alpha^2\mathrm{d}^2 = V^{-1}\Delta^2 - \frac{1}{12}V^{-2}\Delta^4 + \frac{1}{90}V^{-3}\Delta^6 - \frac{1}{560}V^{-4}\Delta^8 + \frac{1}{3150}V^{-5}\Delta^{10} - \frac{1}{16632}V^{-6}\Delta^{12} + \text{ec.}$$

i cui termini sono sulla riga orizzontale corrispondente ad y_0.

Similmente

$$\text{(I)} \qquad \alpha^3\mathrm{d}^3 = M\Big(V^{-2}\Delta^3 - \frac{1}{4}V^{-3}\Delta^5 + \frac{7}{120}V^{-4}\Delta^7 - \frac{41}{3024}V^{-5}\Delta^9 + \frac{479}{151200}V^{-6}\Delta^{11} - \text{ec.}\Big)$$

$$\alpha^4\mathrm{d}^4 = V^{-2}\Delta^4 - \frac{1}{6}V^{-3}\Delta^6 + \frac{7}{240}V^{-4}\Delta^8 - \frac{41}{7560}V^{-5}\Delta^{10} + \frac{479}{453600}V^{-6}\Delta^{12} - \text{ec.}$$

Che se si vogliano i valori corrispondenti ad $x=\frac{\alpha}{2}$, (anzichè ad $x=0$), valori che noi segneremo con $V^{\frac{1}{2}}$, serviranno le serie

$$V^{\frac{1}{2}}=M\Big(V^0-\frac{1}{8}V^{-1}\Delta^2+\frac{3}{128}V^{-2}\Delta^4-\frac{5}{1024}V^{-3}\Delta^6+\frac{35}{32768}V^{-4}\Delta^8-\text{ec.}\Big)$$

(II) $$\alpha V^{\frac{1}{2}}d=\Delta-\frac{1}{24}V^{-1}\Delta^3+\frac{3}{640}V^{-2}\Delta^5-\frac{5}{7168}V^{-3}\Delta^7+\frac{35}{294912}V^{-4}\Delta^9-\text{ec.}$$

$$\alpha^2V^{\frac{1}{2}}d^2=M\Big(V^{-1}\Delta^2-\frac{5}{24}V^{-2}\Delta^4+\frac{7.37}{128.45}V^{-3}\Delta^6-\frac{3229}{1024.45.7}V^{-4}\Delta^8+\text{ec.}\Big)$$

$$\alpha^3V^{\frac{1}{2}}d^3=V^{-1}\Delta^3-\frac{1}{8}V^{-2}\Delta^5+\frac{37}{1920}V^{-3}\Delta^7-\frac{3229}{1024.135.7}V^{-4}\Delta^9+\frac{59.181}{32768.21.25}V^{-5}\Delta^{11}-\text{ec.}$$

Per calcolare gl' integrali presi tutti da $x=0$ bisognerà da prima determinare le sommatorie Σ, Σ^2, ec. col mezzo delle formule

$$\frac{1}{\alpha}\int=M\Big(\Sigma-\frac{1}{12}V^{-1}\Delta+\frac{11}{720}V^{-2}\Delta^3-\frac{191}{60480}V^{-3}\Delta^5+\frac{2497}{3628800}V^{-4}\nabla^7-\text{ec.}\Big)$$

(III) $$\frac{1}{\alpha^2}\int^2=V\Sigma^2+\frac{1}{4.3}V^0-\frac{1}{16.15}V^{-1}\Delta^2+\frac{31}{64.27.35}V^{-2}\Delta^4-\frac{289}{256.81.175}V^{-3}\Delta^6+\frac{317}{1024.81.275}V^{-4}\Delta^8-\text{ec.}$$

$$\frac{1}{\alpha^3}\int^3=M\Big(V\Sigma^3+\frac{1}{240}V^{-1}\Delta-\frac{31}{30240}V^{-2}\Delta^3+\frac{289}{1209600}V^{-3}\Delta^5-\text{ec.}\Big)$$

$$\frac{1}{\alpha^4}\int^4=V^2\Sigma^4+\frac{1}{6}V^{-1}\Sigma^2-\frac{1}{720}V^0+\frac{1}{3024}V^{-1}\Delta^2-\frac{41}{725760}V^{-2}\Delta^4+\frac{491}{512.243.385}V^{-3}\Delta^6-\text{ec.}$$

ponendone i primi membri eguali a zero: così la seconda darà

$$V\Sigma^2 = -\frac{1}{12}V^0 + \frac{1}{240}V^{-1}\Delta^2 - \frac{51}{60480}V^{-2}\Delta^4 + \text{ec.};$$

la prima non dà Σ, bensì $M\Sigma = \frac{1}{2}(\Sigma + V\Sigma)$, ma sapendosi che $V\Sigma = \Sigma + y_0$, se ne dedurrà tosto il valore di $\Sigma = -\frac{1}{2}V^0 + M(\frac{1}{12}V^{-1}\Delta - \text{ec.})$, il quale sostituito nella terza darà $MV\Sigma^3 = \frac{1}{2}(V\Sigma^3 + V^2\Sigma^3) = V\Sigma^3 + \frac{1}{2}V\Sigma^2 = M\left(-\frac{1}{240}V^{-1}\Delta + \text{ec.}\right)$. Coi trovati valori di Σ, $V\Sigma^2$, $V\Sigma^3$, $V^2\Sigma^4$, ec. si calcoleranno mediante successive sommazioni quante occorrano delle prime colonne della precedente tabella; dopo di che le medesime serie (III) ci daranno i valori degl' integrali estesi da $x = 0$ fino ad $x = n\alpha$, bastando a tal uopo di aggiungere a ciascun termine il fattore V^n. Così, per esempio, l' integrale secondo, che si annulla insieme col suo differenziale quando $x = 0$, esteso fino ad $x = 2\alpha$ avrà il valore $V^2\int^2$ dato dalla

$$\frac{1}{\alpha^2}V^2\int^2 = V^3\Sigma^2 + \frac{1}{12}V^2 - \frac{1}{240}V\Delta^2 + \frac{51}{60480}V^{-2}\Delta^4 - \text{ec.}$$

Si ponga mente che ogni formula contiene i termini che nella tabella sono posti su righe orizzontali.

Con eguale facilità possono calcolarsi i predetti integrali da $x = 0$ fino ad $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha$, servendo a ciò le serie:

$$\frac{1}{\alpha}V^{\frac{1}{2}}\int = V\Sigma + \frac{1}{24}\Delta - \frac{17}{5760}V^{-1}\Delta^3 + \frac{567}{967680}V^{-2}\Delta^5$$
$$- \frac{15.2145}{464486400}V^{-3}\Delta^7 - \text{ec.}$$

$$\text{(IV)} \quad \frac{1}{\alpha^2}V^{\frac{1}{2}}\int^2 = M\left(V\Sigma^2 - \frac{1}{24}V^0 + \frac{17}{1920}V^{-1}\Delta^2 - \frac{567}{193536}V^{-2}\Delta^4 + \text{ec.}\right)$$

$$\frac{1}{\alpha^3}V^{\frac{1}{2}}\int^3 = V^2\Sigma^3 + \frac{1}{8}V\Sigma - \frac{7}{1920}\Delta + \frac{457}{967680}V^{-1}\Delta^3 - \text{ec.}$$

aggiungendo a ciascun termine il fattore V^n. Così l' integrale primo esteso da $x = 0$ ad $x = \frac{5}{2}\alpha$ è dato da

$$\frac{1}{\alpha}V^{\frac{5}{2}}\int = V^3\Sigma + \frac{1}{24}V^2\Delta - \frac{17}{5760}V\Delta^3 - \text{ec.}$$

Che se tutti gl' integrali si vogliano prendere da $x = \frac{1}{2}\alpha$, bisognerà

calcolare le Σ, $V\Sigma^2$, ec. non più mediante le (III), bensì col mezzo delle (IV) ponendone i primi membri eguali a zero. Dopo ciò le stesse (IV) aggiuntovi il fattore V^n daranno gl' integrali da

$x = \frac{1}{2}\alpha$ ad $x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha$: e similmente le (III) daranno gl'integrali da $x = \frac{1}{2}\alpha$, ad $x = n\alpha$.

Applichiamo le precedenti formole all' esempio del § 6 ; e per non calcolare alcun altro valore della funzione $y = \frac{1}{x+1}$ fuori dei due limiti $x = 0$, $x = 1$, supponiamo che le differenze quinte sieno costanti, e compiamo in tal modo la seguente tabella

Σ^2	Σ	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5
	—0,3165496		—2440481		—456359		
—0,0830190		1,0000000		773814		158736	
	0,4834504		—1666667		—297623		
0,4004314		0,8333333		476191		119051	
	1,3167837		—1190476		—178572		
1,7172151		0,7142857		297619		79366	
	2,0310694		— 892857		— 99206		—39685
3,7482845		0,625		198413		39681	
	2,6560694		— 694444		— 59525		
6,4043539		0,5555556		138888		— 4	
	3,2116250		— 555556		— 59529		
9,6159789		0,5		79359		—39689	
	3,7116250		— 476197		— 99218		

La prima delle (I) ci dà per la derivata di y corrispondente ad $x = 0$ $d = -0,996032$, che è lo stesso valore che si otterrebbe dalla formula $\alpha d = \log(1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \text{ec.}$

$$MV^{-1}\Delta = -0,2053574$$
$$-\frac{1}{6}MV^{-2}\Delta^3 = +\quad 62832$$
$$\frac{1}{30}MV^{-3}\Delta^5 = -\quad 1323$$
$$\alpha d = -0,1992065$$

La seconda delle (I) dà $d^2 = 1,901465$ invece del valore esatto $d^2 = 2$. Per la stessa seconda derivata corrispondente ad $x = 1$, cioè ad $n = 5$ si troverebbe $V^5 d^2 = 0,20666$ invece di 0,25.

$$V^{-1}\Delta^2 = 0,0773815$$
$$-\frac{1}{12}V^{-2}\Delta^4 = -\quad 13228$$
$$\alpha^2 d^2 = 0,0760586$$

$$V^4\Delta^2 = \quad 79359$$
$$-\frac{1}{12}V^3\Delta^4 = +\quad 3307$$
$$\alpha^2 V^5 d^2 = \quad 82666$$

La prima delle (II) dà $V^{\frac{1}{2}} = 0,90918$, come si sarebbe egualmente ottenuto dalla $V^{\frac{1}{2}} = (1 + \Delta)^{\frac{1}{2}} = \Delta^0 + \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{8}\Delta^2 +$ ec. Il valore esatto è $\frac{10}{11}$.

$$\begin{aligned} MV^0 &= \quad 0,9166667 \\ -\frac{1}{8}MV^{-1}\Delta^2 &= - \quad 78125 \\ \frac{5}{128}MV^{-2}\Delta^4 &= \quad 3255 \\ V^{\frac{1}{2}} &= \quad 0,9091797 \end{aligned}$$

Perchè gl' integrali comincino da $x = 0$ porremo lo zero in luogo dei primi membri delle (III) ed avremo $\Sigma = -0,5165496$, $V\Sigma^2 = -0,0830190$, che pienamente si accordano coi valori trovati ai §§ 9, 13 mediante le (7) (10).

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}V^0 &= -0,5 \\ \frac{1}{12}MV^{-1}\Delta &= - \quad 0171131 \\ -\frac{11}{720}MV^{-2}\Delta^3 &= + \quad 5760 \\ &- \quad 125 \\ \Sigma &= -0,5165496 \end{aligned}$$

Dopo ciò gl' integrali estesi da $x = 0$ fino ad $x = 5\alpha = 1$ saranno $V^5\int = 0,6931630$, $V^5\int^2 = 0,3863044$. L' integrale esteso da $x = 0$ ad $x = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{10}$ è dato dalla prima delle (IV) $V^{\frac{1}{2}}\int = 0,095318$, coll'errore di $+ 0,000008$.

$$\begin{aligned} V\Sigma &= +0,4834504 \\ \frac{1}{24}\Delta &= - \quad 69444 \\ -\frac{17}{5760}V^{-1}\Delta^3 &= + \quad 878 \\ &- \quad 16 \\ \frac{1}{\alpha}V^{\frac{1}{2}}\int &= \quad 0,4765922 \end{aligned}$$

I coefficienti delle predette serie possono, seguendo l' Encke, facilmente calcolarsi nel seguente modo. Suppongasi che sia $y = e^{\alpha x}$, e che x prenda successivamente i valori 0, 1, 2, 3, ec. sarà

$$V = e^\alpha, \quad \Delta = e^\alpha - 1, \quad d = \alpha, \quad \int = \frac{1}{\alpha}, \; M = \frac{V^0 + V'}{2} = \frac{1}{2}(1 + e^\alpha)$$

e ad ogni moltiplicazione simbolica tra i primi membri corrisponderà una moltiplicazione effettiva tra i secondi membri; pongasi pure, per brevità,

$$\delta^2 = V^{-1}\Delta =^2 e^{-\alpha}(e^\alpha - 1)^2$$

Nella teoria già esposta da V. Riccati, e della quale ora finalmente si apprezzano i vantaggi (1), sarà

$$MV^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(e^{\frac{\alpha}{2}} + e^{-\frac{\alpha}{2}}) \quad \text{il } \textit{coseno iperbolico,} \text{ e}$$

$$\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}(e^{\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha}{2}}) \quad \text{il } \textit{seno iperbolico} \text{ di } \frac{\alpha}{2};$$

perciò α sviluppato secondo le potenze di δ darà

$$\alpha = 2 \operatorname{Asnh} \frac{\delta}{2} = \delta - \frac{\delta^3}{3.8} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\delta^5}{5.32} - \frac{3.5}{4.6} \cdot \frac{\delta^7}{7.128} + \text{ec.}$$

È egualmente semplice, ma forse meno conosciuto, lo sviluppo di α^2 che è

$$\alpha^2 = \delta^2 - \frac{\delta^4}{2.2.3} + \frac{2\delta^6}{3.3.4.5} - \frac{2.3\delta^8}{4.4.5.6.7} + \frac{2.3.4\delta^{10}}{5.5.6.7.8.9} - \text{ec.}$$

Le varie potenze dello sviluppo di α, e la formula

$$D\alpha = \frac{1}{\operatorname{csh}\frac{\alpha}{2}} = \frac{2e^{\frac{\alpha}{2}}}{e^{\alpha}+1} = \frac{V^{\frac{1}{2}}}{M} = \frac{\Delta}{M\delta}$$

(1) Se AMBA, sia un semicircolo col centro C, AKL ne sia la tangente nel punto A, il raggio qualunque CM si prolunghi fino ad incontrare quella tangente in L, e si tirino perpendicolari alla medesima tangente la MK, e la indefinita LM', la quale sia tagliata in M' dalla prolungazione della CK; tutti i punti M' così determinati costituiranno un' iperbola equilatera AM' omologa del circolo AM (mia Geometria descrittiva, § 108). Ora se il raggio CA prendasi per unità di lunghezza, e dai punti M, M' si abbassino su di esso le perpendicolari MP, M'P' è noto che PM=AK, CP, ed AL sono il *seno*, il *coseno* e la *tangente* dell' arco AM, o, quel che è lo stesso, del *doppio del settore circolare* CAM. Analogamente a ciò P'M' = AL, CP' ed AK sono il *seno*, il *coseno* e la *tangente iperbolici del doppio del settore iperbolico* CAM'.

Chiamati A, α questi doppii settori circolare ed iperbolico si ha $\operatorname{sen} A = \operatorname{tgh} \alpha$, $\operatorname{tg} A = \operatorname{snh} \alpha$, $\cos A . \operatorname{csh} \alpha = 1$, e facilmente si trova $\operatorname{snh}\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} - e^{-\alpha}\right)$, $\operatorname{csh}\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} + e^{-\alpha}\right)$, ec. La relazione tra A ed α può esprimersi con

$$\alpha = \operatorname{dig}_1 A = A + \frac{1}{6} A^3 + \frac{1}{24} A^5 + \text{ec.}$$

$$A = \operatorname{amp}_1 \alpha = \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3 + \frac{1}{24}\alpha^5 - \text{ec.}$$

giacchè nella teoria della prima trascendente ellittica quando il modulo è eguale all' unità, α è il *digamma* dell' *amplitudine* A.

che si deduce dalla $\delta = 2 \operatorname{snh} \frac{\alpha}{2}$ prendendone la derivata rispetto a δ, danno con molta facilità tutte le formule che vogliamo dimostrare.

Così la seconda delle (I) è subito data da

$$d^2 = \alpha^2 = \delta^2 - \frac{1}{12}\delta^4 + \text{ec.} \quad = V^{-1}\Delta^2 - \frac{1}{12}V^{-2}\Delta^4 + \text{ec.}$$

La terza $d^3 = \alpha^3 = \delta^3 - \frac{1}{8}\delta^5 + \text{ec.}$ conterrebbe le potenze dispari di δ; ma aggiungendo al secondo membro il fattore

$$\frac{M\delta}{\Delta} D\alpha = 1$$

si ha
$$d^3 = M\frac{\delta}{\Delta}\alpha^3 D\alpha = \frac{1}{4}M\frac{\delta}{\Delta}D(\alpha^4) = M\frac{\delta}{\Delta}\left(\delta^3 - \frac{\delta^5}{4} + \text{ec.}\right)$$
$$= M\left(V^{-2}\Delta^3 - \frac{1}{4}V^{-3}\Delta^5 + \text{ec.}\right)$$

cioè basta prendere la derivata rispetto a δ della $\alpha^4 = \delta^4 - \frac{1}{6}\delta^6 + \text{ec.}$

La prima delle (IV) è data da

$$V^{\frac{1}{2}}\int = V^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\alpha} = V^{\frac{1}{2}}\left(\delta^{-1} + \frac{1}{24}\delta - \text{ec.}\right) = V\Sigma + \frac{1}{24}\Delta - \text{ec.}$$

La seconda delle (IV) è

$$V^{\frac{1}{2}}\int^2 = V^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\alpha^2} = M\frac{D\alpha}{\alpha^2} = -MD\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

e quindi si ottiene prendendo la derivata rispetto a δ della precedente. La prima delle (III) $\int = M\frac{\delta}{\Delta}\frac{D\alpha}{\alpha}$ richiede che si calcoli il prodotto delle due serie

$$\frac{1}{\alpha} = \delta^{-1} + \frac{1}{24}\delta - \text{ec.}, \qquad D\alpha = 1 - \frac{1}{8}\delta^2 + \frac{3}{128}\delta^4 - \text{ec. ec.}$$

Il prof. Fedele Amante pubblicò fino dal 1843 (Napoli) una tavola per l' interpolazione che si fonda sulla formula, che è media aritmetica tra le due seguenti

$$\text{(A)} \quad V^t = V^0 + t\left\{\Delta + \frac{t-1}{2}\left[V^{-1}\Delta^2 + \frac{t+1}{3}\left(V^{-1}\Delta^3 + \frac{t-2}{4}[V^{-2}\Delta^4 + \frac{t+2}{5}V^{-2}\Delta^5 + \text{ec.}]\right)\right]\right\}$$

$$(B)\quad V^t = V^0 + t\left\{\Delta + \frac{t-1}{2}\left[\Delta^2 + \frac{t-2}{3}\left(V^{-1}\Delta^3 + \frac{t+1}{4}\left[V^{-1}\Delta^4 + \frac{t-3}{5}V^{-2}\Delta^5 + \text{ec.}\right]\right)\right]\right\};$$

ed egli mostra come per $0<t<1$ essa sia più comoda di ciascuna delle (A) (B).

Moltiplicando una di queste formule per le (III) e per V^n si ottengono le serie che danno gl' integrali fino al limite $(n+t)\alpha$ essendo t frazionario. Così pel secondo integrale basterà moltiplicare la (A) per la seconda delle (III), e si otterrà

$$\frac{1}{\alpha^2}V^t\int^2 = V\Sigma^2 + tV\Sigma + \frac{6t^2-6t+1}{12}V^0 + \frac{2t^3-t}{12}\Delta + \frac{t^4-2t^3+t^2-0,1}{24}V^{-1}\Delta^2 + \text{ec.}$$

Pel primo integrale possiamo dare alla prima delle (III) le due forme

$$\frac{1}{\alpha}\int = \Sigma + \frac{1}{2}V^0 - \frac{1}{12}V^{-1}\Delta - \frac{1}{24}V^{-1}\Delta^2 + \text{ec.} = V\Sigma - \frac{1}{2}V^0 - \frac{1}{12}\Delta + \frac{1}{24}V^{-1}\Delta^2 + \text{ec.}$$

e moltiplicandole rispettivamente per le due parti della (A) si ottiene

$$\frac{1}{\alpha}V^t\int = V\Sigma + \frac{2t-1}{2}V^0 + \frac{6t^2-1}{12}\Delta + \frac{4t^3-6t^2+1}{24}V^{-1}\Delta^2$$
$$+\left(\frac{t^4-2t^2}{24} + \frac{11}{720}\right)V^{-1}\Delta^3 + \text{ec.}$$

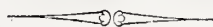
(*Letta nei giorni 25 gennajo e 14 marzo 1855*).

SULLE CONICHE OSCULATRICI

DELLE CURVE PIANE

E SOPRA UN PROBLEMA DELLA GEOMETRIA DI POSIZIONE DEL CARNOT

MEMORIA

DEL M. E. PROF. S. R. MINICH

Allorchè si voglia rappresentare la curvatura in un dato punto di curva piana con una approssimazione maggiore di quella che viene esibita dal circolo osculatore, non havvi mezzo più ovvio del paragone dell' arco di detta curva intorno al punto dato con quello della parabola osculatrice, o più prossimamente ed in generale coll'arco della conica osculatrice che ha un contatto del 4.° ordine colla curva proposta.

Ma sebbene la teoria delle coniche osculatrici delle curve piane sia una facile applicazione della dottrina generale de' contatti delle curve fra loro, purchè si riferisca la conica osculatrice alla tangente comune colla data curva ed al diametro delle corde di questa conica parallele alla stessa tangente, non si suole fare alcun cenno di questa elementare teorica ne' trattati di calcolo differenziale applicato alla geometria, e non venne finora esaurito questo argomento in veruna Memoria speciale. Parecchie delle principali questioni di detta teorica furono per altro trattate e risolte con un metodo indiretto e con peculiari considerazioni dal ch.^{mo} sig. A. Transon nelle sue ricerche intorno alla curvatura delle linee e delle superficie (*Liouville, Journal de Mathématiques,* T. VI, maggio 1841). Le relative indagini di quella Memoria riguardano la lunghezza e la posizione del diametro della conica osculatrice, il modo di riconoscere se

questa conica sia una parabola, e se il punto di contatto sia un vertice di detta conica, la determinazione del punto di tragitto della normale sull'asse della parabola osculatrice, una proprietà comune a tutte le parabole che hanno un contatto del 2.° ordine colla data curva, ed una grafica determinazione degli assi della conica osculatrice, comunque sia questa un' iperbola od una ellisse.

Anteriormente al sig. Transon il chiarissimo prof. G. Bellavitis, mio onorevole collega ed amico, nel saggio di applicazione d' un nuovo metodo di geometria analitica (*Annali delle scienze del regno lombardo-veneto,* ultimo quadrimestre 1835) risolvendo un problema della geometria di posizione del Carnot, avea dedotto una formula determinante la direzione del diametro della conica osculatrice, ed in altra più estesa Memoria sul metodo delle equipollenze (*Annali* citati, 2.° e 3.° bimestre 1838) espose la condizione atta a riconoscere se la conica osculatrice d' una curva piana sia parabolica, ellittica od iperbolica.

Siccome questo egregio geometra bramava di comprovare i vantaggi del nuovo suo metodo paragonando le soluzioni che prontamente ne risultano di parecchi problemi con quelle che si possono ottenere da' metodi consueti, io pure dedussi allora la condizione predetta coll' ordinario metodo delle coordinate rettilinee sotto una forma, che dal prof. Bellavitis (aprile 1836) fu trovata corrispondere a quella ch' egli avea facilmente desunto dal nuovo suo metodo delle equipollenze. A questo cortese invito ed a' cenni ond' egli ebbe testè a richiamare la mia attenzione sulla citata Memoria del sig. Transon, e sul problema già mentovato della geometria di posizione del Carnot, debbo l'occasione di aver esteso la presente Memoria, in cui mi propongo di porgere il sistema delle formule che servono a risolvere le varie questioni spettanti alla teoria delle coniche osculatrici d'una curva piana, esprimendo queste formule, mercè le coordinate rettilinee ad angolo qualunque, ed anco in funzione de' raggi delle successive evolute della data curva.

Forma parte principale di questa Memoria un commentario sopra la formula esibita dal Carnot onde risolvere il problema LXXVI ed ultimo (sezione VI, n.° 433) della sua Geometria di posizione. Per comprendere la generale significazione e la conveniente applicazione di detta formula, non sarà inutile di riassumere in brevi termini ciò che può servire d' illustrazione a quel passo della geometria di posizione del Carnot (n.i 433, 434) in cui si prende a risolvere il problema dianzi accennato.

Trattasi in questo problema di assegnare l' ultima posizione della retta,

che partendo da un dato punto di curva piana divide per metà la corda infinitamente prossima e parallela alla tangente, ovvero secondo i concetti e il linguaggio del calcolo infinitesimale trattasi di determinare la retta che divide per mezzo l' elemento d' una curva piana e la corda infinitesima ch' è prossima e parallela a questo elemento. È manifesto che questa retta coincide col diametro della conica osculatrice di detta curva. Ora l'espressione trovata dal Carnot della cotangente dell' angolo formato dalla retta richiesta colla tangente alla data curva non contenendo che le differenziali di 1.° e 2.° ordine delle coordinate ortogonali e dell' arco della curva proposta, si potrebbe a primo tratto riputare fallace, poichè la cotangente dell' angolo compreso dal diametro della conica osculatrice colla tangente alla curva racchiude nella sua espressione anco la derivata terza dell'ordinata. Simile opinione non sarebbe smentita dal modo onde quel celebre autore enuncia e risolve il proposto problema senza attenersi esclusivamente alle convenzioni del metodo infinitesimale, cosicchè laddove è mestieri co' principj di questo metodo introdurre nella presente quistione tre elementi consecutivi della data curva, l' autore sopprime invece l' elemento intermedio riducendolo ad un punto, e vi sostituisce la tangente considerata nella sua assoluta definizione, anzichè secondo i principj del calcolo infinitesimale applicato alla geometria.

Prescindendo dal dubbio che può sorgere pegli addotti motivi intorno all' esattezza della formula del Carnot, s' incontra una più grave ed essenziale obbiezione circa al modo di applicarla nell' osservare, che questa formula non guida al medesimo risultato, qualunque sia l' ipotesi assunta circa all' elemento della quantità che vi si considera come indipendente, e non ha quindi una precisa significazione, se non qualora si stabilisca una particolare supposizione a questo riguardo, ovvero si assuma una determinata relazione fra le differenziali delle quantità che vi si contengono. Simile relazione non può risultare che dalla condizione del richiesto parallelismo della corda col prossimo elemento della data curva. Ma non sarebbe possibile di dedurla dalla figura e dall' analisi adoperate dal Carnot attesochè quella relazione contiene in generale, e dee contenere qualche differenziale di terz' ordine altrimenti per le ragioni sopraindicate la formula di Carnot non potrebb' essere esatta. È vero che l' illustre autore della Geometria di posizione applica la sua formula al circolo ritenendo costante l' elemento ds dell' arco della curva, ma questa supposizione non è conciliabile col parallelismo tra la corda ed il prossimo elemento della curva, se non

nell' unico caso in cui questa curva sia un cerchio. Conviene da tutto ciò argomentare che la formula del Carnot, benchè esente, come vedremo, da errore, non è sufficiente a risolvere il problema da lui proposto se non qualora vi s' introduca quella condizione del parallelismo che non è possibile di conseguire coll' analisi e colla figura da quell' autore adoprate. Ed infatti, se si cerca di ricavarla dalla medesima analisi, si scuopre che un terzo punto a considerarsi nella detta figura dee giacere sulla tangente guidata pel secondo de' successivi tre punti, e si riconosce il motivo dell' imperfezione dianzi avvertita dell' analisi adottata dal Carnot nella soluzione del proposto problema.

Per togliere ogni dubbio sull' esattezza di detta formula, e per assegnare la condizione, mercè la quale si ottiene la soluzione richiesta, viene trattato nel § 13 della presente Memoria il problema generale in cui si cerca la retta che divide per metà l' elemento d' una curva piana e la corda estremamente prossima a questo elemento, senza fissare alcun'altra condizione circa alla posizione di quella corda, cioè senza stabilire la legge in cui si succedono i quattro punti prossimi fra loro della data curva, i medii de' quali sono gli estremi dell' elemento della curva medesima. Cogli ovvii principj del calcolo infinitesimale applicato alla geometria si trova che la formula del Carnot è appunto quella che serve a risolvere in generale la presente questione. Imperocchè la cotangente dell' angolo compreso dalla retta richiesta colla tangente curva viene espressa in funzione del raggio ρ di curvatura, e dell' arco s della curva, mercè la formula $\rho\frac{d^2s}{ds^2}$, che si riduce a quella del Carnot, colla sostituzione de' valori di ρ, e del ds espressi per le differenziali variabili delle coordinate ortogonali. Ma se si voglia in particolare che la corda sia parallela al prossimo elemento della curva è d' uopo stabilire la relazione che si deduce dall' eguagliare fra loro le distanze de' punti estremi di detta corda dalla direzione dell' elemento medesimo ossia dalla tangente alla curva, e che si trova avere per espressione $\frac{d^2s}{ds}=\frac{1}{3}\,\frac{d\rho}{\rho}$. Per simile condizione del parallelismo la formula generale anzidetta $\rho\frac{d^2s}{ds^2}$ si riduce ad $\frac{1}{3}\,\frac{d\rho}{ds}$, e poichè il raggio ρ_1 della seconda evoluta d' una curva piana equivale a $\rho\,\frac{d\rho}{ds}$, essa si cangia nell' espressione $\frac{1}{3}\,\frac{\rho_1}{\rho}$ trovata dal sig. Transon per le sezioni coniche, e da lui estesa ad ogni curva piana in quanto i valori di ρ, ρ_1 sono comuni ad una

curva piana qualunque ed alle coniche che hanno con essa un contatto del terz' ordine.

Così rimane provato che la formula del Carnot, malgrado una falsa apparenza di erroneità, non è difettiva se non in quanto ha mestieri d'esser associata alla relazione esprimente il parallelismo della corda infinitesima col prossimo elemento della curva, ed anzi è quella che serve ad assegnare in generale la posizione della retta che divide per metà l' elemento e la prossima corda d'ogni curva piana, qualunque sia la legge con cui si succedono i quattro punti prossimi l' uno all'altro, de' quali i due medii sono le estremità dell' elemento della data curva. Fissata questa legge, mediante una speciale supposizione intorno ad alcuna delle quantità differenziali che si contengono in quella formula, ovvero mercè una determinata relazione fra le differenziali medesime, la formula generale acquista allora una precisa significazione, e determina a cagion d' esempio la retta richiesta dal problema del Carnot, se la relazione ausiliaria esprime il parallelismo della corda col prossimo elemento della curva nel modo che si è poc' anzi accennato. Se invece si supponga costante l' elemento d'una coordinata, si trova, com' è d' altronde evidente, che la retta richiesta è parallela all' asse dell' altra coordinata, e se si assuma costante l' elemento dell' arco della data curva, la retta cercata risulta normale alla curva medesima, come ha trovato il Carnot pel solo caso del circolo, attesochè in questo caso soltanto l' ipotesi del ds costante s' accorda col parallelismo tra la corda ed il prossimo elemento della curva proposta.

Questi pochi cenni dimostrati ne' due ultimi articoli della presente Memoria costituiscono un breve commentario o supplemento che forse sarà sufficiente a chiarire la dimostrazione e il significato della formula proposta nel § 433 ed applicata nel § 434 della Geometria di posizione. Era prezzo d'opera interpretare accuratamente quel passo abbastanza enigmatico d' un' opera accreditata, che insieme alle insigni produzioni del Monge preluse ed aperse il sentiero a' recenti meravigliosi progressi della geometria, tanto più che il problema del Carnot ha lo scopo essenziale di fissare una delle coordinate, mercè le quali quel celebre autore intendeva rappresentare ogni curva piana senza riferirla ad oggetti estrinseci, ed indipendentemente da qualsiasi convenzione accessoria.

Viene annessa a questa Memoria la sola figura che serve alla generale soluzione ed alla illustrazione del problema del Carnot. Alcune semplici convenzioni stabilite nell'articolo 1.° rendono inutile il corredo d' ogni altra figura.

Si ommette l' indicazione speciale delle varie questioni trattate negli altri articoli della presente Memoria. Per rilevarne il soggetto, e l' ordine in cui si succedono, basterà la lettura de' titoli premessi a' 14 articoli, in cui è divisa questa elementare teoria delle coniche osculatrici.

§. 1.

Convenzioni preliminari sul modo di considerare e di denotare l' angolo di due rette. Condizioni del contatto di 4.° ordine d' una conica con una curva piana desunte dal riferire la conica al relativo suo diametro ed alla tangente della curva proposta.

Sieno x, y le coordinate rettilinee d' un dato punto di curva piana riferita ad un sistema qualunque di assi e rappresentata dall'equazione $\varphi(x,y)=0$. La conica osculatrice che ha colla data curva nel punto (x, y) un contatto non inferiore al 4.° ordine, abbia per coordinate correnti x_1, y_1. Immaginando riferita questa conica a due nuovi assi delle coordinate x_2, y_2, il primo dei quali sia il diametro di detta conica che ha per origine il punto (x, y), e l'altro sia la tangente comune ad essa e alla data curva, si avrà per equazione generale della conica osculatrice

$$(1) \qquad y_2^2 = 2hx_2 + kx_2^2.$$

Conveniamo ora di denotare con $\{\pm x, \pm y\}$ l' angolo della retta $\pm y$, colla retta $\pm x$, intendendo per esso l' angolo o l' arco descritto da un raggio eguale all' unità, che girando intorno ad un punto fisso qualunque in un dato verso, cioè per esempio da destra a sinistra, si trasporta da una posizione parallela a $\pm x$, e diretta nel medesimo verso positivo o negativo, ad una posizione parallela a $\pm y$ e rivolta nel medesimo senso di quest' ultima retta. Siccome un angolo si può aumentare o diminuire d' un numero intero di circonferenze descritte col raggio $=1$, ed espresse in parti di raggio da 2π, essendo π il rapporto della circonferenza al diametro, senza alterarne il seno ed il coseno, possiamo evidentemente stabilire le eguaglianze seguenti

$$(2) \qquad \{y, x\} = -\{x, y\}, \qquad \{x, -y\} = \{x, y\} + \pi,$$
$$\{-x, y\} = \{x, y\} + \pi, \qquad \{-x, -y\} = \{x, y\},$$

donde si avrebbe

$$\text{sen}\{y,x\} = -\text{sen}\{x,y\}, \qquad \cos\{y,x\} = \cos\{x,y\},$$
$$\text{sen}\{x,-y\} = -\text{sen}\{x,y\}, \qquad \text{ec.}$$

Per simile convenzione, se in un triangolo formato dal concorso di due rette x, y con una terza u l' origine delle due rette x, y sia nel punto di loro intersezione, oppure se le origini di queste due rette sieno le rispettive loro intersezioni con u, si avrà la proporzione

$$(3) \qquad \frac{y}{x} = \frac{\text{sen}\{x,u\}}{\text{sen}\{y,u\}}.$$

Ma se invece una sola delle due rette x, y abbia per origine la mutua loro intersezione, e l'altra retta abbia l'origine nella sua intersezione con u, risulta l' eguaglianza

$$(4) \qquad \frac{y}{x} = -\frac{\text{sen}\{x,u\}}{\text{sen}\{y,u\}}.$$

Queste due proporzioni hanno sempre luogo nelle rispettive condizioni testè indicate, qualunque sieno i segni o le direzioni di x, y, u, attesochè al cangiar di segno d' una di queste rette mutano simultaneamente di segno (2) nelle proporzioni (3) (4) entrambi i medii, o gli estremi, od ambo i termini del secondo rapporto.

Fra le coordinate x_2, y_2 di qualsivoglia punto della conica osculatrice, e le coordinate $x_1 - x$, $y_1 - y$ dello stesso punto riferito a due assi guidati pel punto (x, y) parallelamente a' due assi primitivi dovendo sussistere le relazioni di 1.° grado

$$x_2 = A(x_1 - x) + B(y_1 - y), \qquad y_2 = C(x_1 - x) + E(y_1 - y),$$

per determinare la costante A porremo $y_1 = y$, cioè supporremo che il punto (x_2, y_2) cada sull' asse parallelo a quello delle x ed avremo (3)

$$A = \frac{x_2}{x_1 - x} = \frac{\text{sen}\{x, y_2\}}{\text{sen}\{x_2, y_2\}}.$$

Parimenti col porre $x_1 = x$ otterremo

$$B = \frac{x_2}{y_1 - y} = \frac{\text{sen}\{y, y_2\}}{\text{sen}\{x_2, y_2\}}.$$

In simil guisa si avrebbe, a cagione dell' ultima delle eguaglianze (2),

$$C = \frac{\text{sen}\,\{x,\ x_2\}}{\text{sen}\,\{y_2,\ x_2\}} = -\frac{\text{sen}\,\{x,\ x_2\}}{\text{sen}\,\{x_2,\ y_2\}},$$

$$E = \frac{\text{sen}\,\{y,\ x_2\}}{\text{sen}\,\{y_2,\ x_2\}} = -\frac{\text{sen}\,\{y,\ x_2\}}{\text{sen}\,\{x_2,\ y_2\}},$$

e conseguentemente si ottiene

$$(5)\qquad \begin{aligned} x_2\,\text{sen}\,\{x_2, y_2\} &= (x_1 - x)\,\text{sen}\,\{x, y_2\} + (y_1 - y)\,\text{sen}\,\{y, y_2\}, \\ -y_2\,\text{sen}\,\{x_2, y_2\} &= (x_1 - x)\,\text{sen}\,\{x, x_2\} + (y_1 - y)\,\text{sen}\,\{y, x_2\}. \end{aligned}$$

La derivazione di queste equazioni rapporto alla variabile indipendente x, di cui y_1, x_2, y_2 sono funzioni, esibisce le derivate di x_2, y_2 espresse per quelle di y_1. Ma poichè le condizioni del contatto di 4.° ordine della proposta curva colla conica osculatrice nel punto (x, y) inducono per $x_1 = x$ l' eguaglianza rispettiva di y_1, e delle sue derivate, colla y, e colle derivate di y fino al 4.° ordine inclusivamente, e poichè dal supporre l' asse delle y_2 tangente alla data curva si deduce (4)

$$(6)\qquad y' = -\frac{\text{sen}\,\{x, y_2\}}{\text{sen}\,\{y, y_2\}};$$

avremo in conseguenza per $x_1 = x$, ossia nel punto di contatto (x, y) della data curva colla conica osculatrice

$$(7)\qquad x_2 = 0, \qquad x_2' = 0, \qquad -x_2'' = \frac{y''}{y'}\,\frac{\text{sen}\,\{x,\ y_2\}}{\text{sen}\,\{x_2,\ y_2\}},$$

$$-x_2''' = \frac{y'''}{y'}\,\frac{\text{sen}\,\{x,\ y_2\}}{\text{sen}\,\{x_2, y_2\}}, \qquad -x_2^{(4)} = \frac{y^{(4)}}{y'}\,\frac{\text{sen}\,\{x,\ y_2\}}{\text{sen}\,\{x_2, y_2\}},$$

$$y_2 = 0, \qquad -y_2' = \frac{\text{sen}\,\{x, x_2\} + y'\,\text{sen}\,\{y, x_2\}}{\text{sen}\,\{x_2, y_2\}},$$

$$-y_2'' = y''\,\frac{\text{sen}\,\{y,\ x_2\}}{\text{sen}\,\{x_2, y_2\}}, \quad -y_2''' = y'''\,\frac{\text{sen}\,\{y,\ x_2\}}{\text{sen}\,\{x_2, y_2\}}, \quad -y_2^{(4)} = y^{(4)}\,\frac{\text{sen}\,\{y,\ x_2\}}{\text{sen}\,\{x_2, y_2\}}.$$

§. 2.

Determinazione delle costanti h, k *comprese nell' equazione della conica osculatrice. Posizione del diametro che ha per origine il punto di contatto.*

Ciò posto, per l'annullarsi di x_2, y_2, x_2' (7) l'equazione (1) e la sua prima derivata si trovano identiche. Si ricava poi dalle derivate 2.ª, 3.ª e 4.ª della (1)

$$h = \frac{y_2'^2}{x_2''}, \qquad x_2''' y_2' - 3\, x_2'' y_2'' = 0, \qquad k = \frac{x_2''\,(3y_2''^2 + 4y_2'\, y_2''') - x_2^{(4)}\, y_2'^2}{3\, x_2''^3}.$$

Colla sostituzione de' valori (7) nella 2.ª di queste equazioni si deduce

$$(8) \qquad \operatorname{sen}\{x, x_2\} = \left(\frac{3y''^2 - y'\, y'''}{y'''}\right) \operatorname{sen}\{y, x_2\},$$

e poichè dall' introdurre questo valore nella espressione (7) di y_2' risulta

$$-y_2' = 3\, \frac{y''^2}{y'''}\, \frac{\operatorname{sen}\{y, x_2\}}{\operatorname{sen}\{x_2, y_2\}};$$

si otterrà dalla 1.ª e dalla 3.ª delle predette equazioni

$$(9) \qquad \begin{aligned} h &= -9\, \frac{y'\, y''^3}{y'''^2}\, \frac{\operatorname{sen}^2\{y, x_2\}}{\operatorname{sen}\{x, y_2\}\operatorname{sen}\{x_2, y_2\}}, \\ k &= \frac{y'^2}{y'''^2}\,(5y'''^2 - 3y''\, y'''')\, \frac{\operatorname{sen}^2\{y, x_2\}}{\operatorname{sen}^2\{x, y_2\}}. \end{aligned}$$

Di più, siccome risulta per le convenzioni già stabilite (§ 1) riguardo agli angoli

$$(10) \qquad \begin{aligned} \{y, x_2\} &= \{x, x_2\} - \{x, y\}, \qquad \{y, y_2\} = \{x, y_2\} - \{x, y\}, \\ \{x_2, y_2\} &= \{x, y_2\} - \{x, x_2\}, \end{aligned}$$

introducendo il valore di $\operatorname{sen}\{y, y_2\}$ desunto dalla 2.ª delle (10) nella (6) si rinviene la nota formula

$$(11) \qquad \operatorname{tang}\{x, y_2\} = \frac{y' \operatorname{sen}\{x, y\}}{1 + y' \cos\{x, y\}},$$

e siccome la derivata dell' arco s della data curva ha per espressione

$$(12)\qquad s' = \sqrt{(1 + 2y' \cos\{x, y\} + y'^2)}\,,$$

si avrà pure

$$(13)\qquad \operatorname{sen}\{x, y_2\} = \frac{y' \operatorname{sen}\{x, y\}}{s'}\,,\qquad \cos\{x, y\} = \frac{1 + y' \cos\{x, y\}}{s'}\,,$$

e mercè la permutazione di x con y (2)

$$\operatorname{sen}\{y, y_2\} = -\frac{\operatorname{sen}\{x, y\}}{s'}\,,\qquad \cos\{y_2, y_2\} = \frac{y' + \cos\{x, y\}}{s'}\,.$$

Quindi sostituendo questi valori nella formula esprimente il seno di $\{x_2, y_2\}$ (10), ed avendo riguardo al valore di $\{y, x_2\}$ (10) troviamo

$$\operatorname{sen}\{x_2, y_2\} = -\frac{\operatorname{sen}\{x, x_2\} + y' \operatorname{sen}\{y, x_2\}}{s'}\,,$$

ed introdotto in questa espressione il valore (8) di $\operatorname{sen}\{x, x_2\}$, si ottiene

$$(14)\qquad \operatorname{sen}\{x_2, y_2\} = -3\,\frac{y''^2}{y'''s'} \operatorname{sen}\{y, x_2\}\,.$$

Per avere il valore di $\operatorname{sen}\{y, x_2\}$ deducasi dalla 1.ª delle (10) $\{x, x_2\}$, e sostituendone l' espressione del seno nell' eguaglianza (8), indi dividendo per $\operatorname{sen}\{y, x_2\}$ si verrà a conseguire

$$(15)\qquad \cot\{y, x_2\} = \frac{3y''^2 - y'y'''}{y''' \operatorname{sen}\{x, y\}} - \cot\{x, y\}\,,$$

e quindi

$$(16)\qquad \operatorname{sen}\{y, x_2\} = \frac{-y''' \operatorname{sen}\{x, y\}}{\sqrt{(y'''^2 s'^2 - 6\,(y' + \cos\{x, y\})\, y''^2 y''' + 9y''^4)}}\,,$$

$$\cos\{y, x_4\} = \frac{(y' + \cos\{x, y\})\, y''' - 3y''^2}{\sqrt{(y'''^2 s'^2 - 6\,(y' + \cos(x, y)\, y''^2 y''' + 9y''^4)}}\,.$$

Introducendo viceversa nella (8) il valore di $\operatorname{sen}\{y, x_2\}$ desunto dalla 1.ª delle (10) si trova

$$(17)\qquad \cot\{x, x_2\} = \cot\{x, y\} - \frac{y'''}{(3y''^2 - y'y''') \operatorname{sen}\{x, y\}}\,,$$

e quindi mercè la (11) si deduce dalla 3.ª delle (10)

$$(18)\quad \cot\{x_2, y_2\} = \frac{y''' s'^2 - 3\,(y'^2 + \cos\{x,y\})\,y''^2}{3y''^2 \operatorname{sen}\{x,\ y\}} = \frac{1}{3}\ \frac{y''' s'^2}{y''^2 \operatorname{sen}\{x,\ y\}} + \cot\{y, y_2\}.$$

Sostituendo infine nelle (9) i valori (13) (14) (16) de' seni di $\{x, y_2\}$, $\{x_2, y_2\}$, $\{y, x_2\}$ si ottiene

$$(19)\qquad h = \frac{-3y'' s'^2}{\sqrt{(y'''^2 s'^2 - 6\,(y' + \cos\{x,\ y\})\,y''^2 y''' + 9y''^4}},$$

$$k = \frac{(5y'''^2 - 3y''\,y^{(4)})\ s'^2}{y'''^2 s'^2 - 6\,(y' + \cos\{x,\ y\})\,y''^2 y''' + 9y''^4}$$

$$= \frac{(5y'''^2 - 3y''\,y^{(4)})\ s'^4}{(y''' s'^2 - 3(y' + \cos\{x,\ y\})\,y''^2)^2 + 9y''^4}.$$

§. 3.

Modo di riconoscere se la conica osculatrice sia un' ellisse, un' iperbola od una parabola. Valore del parametro della parabola osculatrice. Posizione della direttrice e del foco di questa parabola. Valori de' due semidiametri conjugati dell' ellisse o dell' iperbola osculatrice, uno dei quali è parallelo alla tangente della data curva. Condizione per cui si ravvisa se il punto di contatto sia un vertice della conica osculatrice.

Secondochè il valore di k (1) (19) sia negativo, positivo, o nullo, la conica osculatrice (1) è un' ellisse, un' iperbola, od una parabola. Pertanto questa conica apparterrà alle rispettive tre specie testè indicate secondochè

$$(20)\qquad 5y'''^2 - 3y''\,y''''$$

sia quantità negativa, positiva, o nulla. Nel caso in cui la (20) si annulli, sarebbe h (1) (19) la metà del parametro della parabola osculatrice relativo al diametro x_2, e quindi la metà del parametro assoluto $2p$ di detta parabola sarebbe

$$p = h \operatorname{sen}^2\{x_2, y_2\},$$

cioè (14) (16)

$$(21) \qquad p = \frac{-27\, y''^5 \operatorname{sen}^3 \{x, y\}}{\sqrt{(y'''^2 s'^2 - 6\,(y' + \cos\{x, y\})\, y''^2 y''' + 9 y''^4)^3}},$$

La direzione del diametro x_2 viene determinata da una qualunque delle formule (15) (17) (18). Prolungando il diametro x_2 oltre il punto (x, y) d' una lunghezza $\frac{1}{2}\, h$, si ottiene il punto d' incontro colla direttrice, ed abbassando da questo punto una perpendicolare alla tangente y_2, col prolungare questa perpendicolare oltre il suo piede d' una eguale lunghezza si avrebbe nel punto estremo il foco della parabola osculatrice.

Giova osservare che dopo di aver determinato il diametro x_2 della parabola osculatrice, basta conoscere il raggio ρ del circolo osculatore nel punto (x, y) per avere immediatamente nella projezione ortogonale di questo raggio sul diametro x_2 il valore h della metà del relativo parametro, come risulta dall' eguaglianza (26) che verrà fra poco dimostrata per ogni sezione conica.

Se si fosse trattato di determinare la parabola che ha un contatto del 3.° ordine colla data curva nel punto (x, y), si avrebbe evidentemente trovato la stessa parabola che ha per diametro l' asse delle x_2, e per rispettivo parametro $2h$. Il contatto di questa parabola colla data curva diviene del 4.° ordine nel caso in cui la formula (20) si riduca a zero.

Negli altri due casi, in cui la (20) abbia un valore negativo o positivo, se denotiamo con f il semidiametro della conica osculatrice che ha per origine il punto (x, y), e con g il semidiametro conjugato, abbiamo (1)

$$\frac{g^2}{f} = \pm h, \qquad \frac{g^2}{f^2} = \mp k,$$

e quindi troviamo (19)

$$(22) \qquad f = \frac{3y'' \sqrt{(y'''^2 s'^2 - 6\,(y' + \cos\{x, y\})\, y''^2 y''' + 9 y''^4)}}{5y'''^2 - 3y'' y''''},$$

$$g^2 = \frac{(3y'' s')^2}{\mp (5y'''^2 - 3y'' y'''')}.$$

Il segno di f dee coincidere con quello del raggio ρ di curvatura, qualora la conica osculatrice sia un' ellisse, attesochè queste due rette cadono allora dalla stessa parte rispetto alla tangente, ed al contrario il segno di f deve

essere opposto a quello di ρ nel caso in cui la conica sia un' iperbola. Ora avendosi, com' è noto,

$$(23) \qquad \rho = -\frac{ds}{d\{x, y_2\}},$$

e la differenziazione della (11) offrendo, a cagione della (13),

$$(24) \qquad \frac{d\{x, y_2\}}{dx} = \frac{y'' \operatorname{sen}\{x, y\}}{s'^2},$$

per cui risulta

$$(25) \qquad \rho = -\frac{s'^3}{y'' \operatorname{sen}\{x, y\}},$$

troviamo appunto col moltiplicare questa formula per la 1ª delle (22), che ρf è positivo, o negativo, secondo i due casi (20) in cui la conica osculatrice sia ellittica, od iperbolica. Questa è la ragione per cui nella 1.ª delle formule (16) venne attribuito il segno negativo al radicale quadrato. Applicando la formula (25) alla ricerca del raggio di curvatura in qualsivoglia punto della conica (1), si ottiene l' espressione

$$\frac{\{(1+k)\,y_2^2 + 2\,(h + k x_2)\,y_2 \cos\{x_2, y_2\} + h^2\}^{\frac{3}{2}}}{h^2 \operatorname{sen}\{x_2, y_2\}},$$

e quindi pel punto (x, y) ove $x_2 = 0$, $y_2 = 0$ si ha l' eguaglianza

$$(26) \qquad h = \rho \operatorname{sen}\{x_2, y_2\},$$

ossia a cagione di $h = \pm \frac{g^2}{f}$ si trova la nota equazione

$$\rho = \pm \frac{g^2}{f \operatorname{sen}\{x_2, y_2\}},$$

mercè la quale con facile costruzione si può determinare una delle quantità f, g per mezzo dell'altra, il cui valore viene esibito dalla rispettiva espressione (22), e per mezzo de' valori di $\{x_2, y_2\}$ e di ρ determinati dalle formule (18) (25).

Ogniqualvolta nel punto (x, y) della data curva si verifichi la condizione

$$(27) \qquad s'^2 y''' - 3\,(y' + \cos\{x, y\})\,y''^2 = 0$$

si avrà (18) $\cot\{x_2, y_2\} = 0$ ossia $\{x_2, y_2\} = \frac{\pi}{2}$, e quindi il punto

di contatto (x, y) sarà un vertice della conica osculatrice, cosicchè il diametro x_3 diviene un asse di questa conica, ed è normale alla data curva. Il circolo osculatore avrebbe allora un contatto almeno del terz'ordine colla curva proposta.

§. 4.

Espressione della somma, o della differenza de' quadrati di due semidiametri conjugati, secondochè la conica osculatrice sia un' ellisse, od un' iperbola. Valore dell'area d' ogni parallelogrammo circoscritto a questa conica. Eccentricità, semi-assi, ed angoli compresi dall' asse focale di detta conica col diametro, che ha per origine il punto di contatto, e colla tangente alla data curva.

Dalle formule (22) si deduce, che nell'ellisse osculatrice la somma, e nell' iperbola la differenza de' quadrati di due semidiametri conjugati ha per valore

$$(28)\quad f^2 \pm g^2 = \frac{9y''^2}{(5y'''^2 - 3y''y^{(4)})^2}\left\{9y''^2 - 6(y' + \cos\{x,y\})y''^2y''' - (4y'''^2 - 3y''y^{(4)})s'^2\right\},$$

e che la quarta parte dell' area d'ogni parallelogrammo, che ha per lati due rette eguali e parallele a due diametri conjugati dell' ellisse o dell' iperbola osculatrice, viene espressa dalla formula

$$(29)\qquad fg \operatorname{sen}\{x_2, y_2\} = \frac{27y''^4 \operatorname{sen}\{x, y\}}{(3y'''^2 - 5y''y^{(4)})\sqrt{\mp(5y'''^2 - 3y''y^{(4)})}}.$$

Siccome poi dall' eguaglianza (14), dalla 1ª delle (16), e dalla (18) risulta

$$(30)\qquad \operatorname{sen}\{x_2, y_2\} = \frac{3y''^2 \operatorname{sen}\{x, y\}}{s'\sqrt{\{y'''^2s'^2 - 6(y' + \cos\{x, y\})y''^2y''' + 9y''^4\}}},$$

$$\cos\{x_2, y_2\} = \frac{y'''s'^2 - 3(y' + \cos\{x, y\})y''^2}{s'\sqrt{(y'''^2s'^2 - 6(y' + \cos\{x, y\})y''^2y''' + 9y''^4)}},$$

si avrà pure

$$(31)\quad f^2 \mp g^2 = \frac{9y''^2}{(5y'''^2 - 3y''y^{(4)})^2}\left\{9y''^2 - 6(y' + \cos\{x,y\})y''^2y''' + 3(2y'''^2 - y''y^{(4)})s'^2\right\},$$

$$fg \cos\{x_2, y_2\} = \frac{9y''^2(y'''s'^2 - 3(y' + \cos\{x, y)\,y''^2)}{(5y'''^2 - 3y''y^{(4)})\sqrt{\mp(5y'''^2 - 3y''y^{(4)})}}.$$

Ora designando con a il semiasse focale, con b il semiasse conjugato, e con e l'eccentricità dell'ellisse, o dell'iperbola osculatrice, abbiamo le note equazioni

$$a^2 \pm b^2 = f^2 \pm g^2 \qquad ab = fg \operatorname{sen}\{x_2, y_2\} \qquad e^2 = a^2 \mp b^2 \quad ,$$

donde si raccoglie

$$(32) \qquad \begin{aligned} e^2 &= \sqrt{\left((f^2 \pm g^2)^2 \mp 4f^2g^2 \operatorname{sen}^2\{x_2, y_2\}\right)} \\ &= \sqrt{\left((f^2 \mp g^2)^2 \mp 4f^2g^2 \cos^2\{x_2, y_2\}\right)} \end{aligned}$$

$$a^2 = \frac{1}{2}(f^2 \pm g^2 + e^2) \qquad \pm b^2 = \frac{1}{2}(f^2 \pm g^2 - e^2) \; .$$

Si scorge da queste formule che le quantità e, a, b vengono espresse per funzioni alquanto composte delle derivate di y. Si avrebbe infatti colla sostituzione de' valori (28) (29) nella 1.ª delle formule (32)

$$(33) \qquad e = \frac{3y''}{5y'''^2 - 3y''y^{(4)}} \sqrt[4]{\left\{ \begin{array}{l} (y'''^2 s'^2 - 6(y' + \cos\{x. y\})\, y''^2 y''' + 9y''^4)^2 \\ -2(y''' s'^2 - 3(y' + \cos\{x, y\})\, y''^2)^2 \\ + 18 y''^4 \operatorname{sen}^2\{x, y\} + (5y'''^2 - 3y''y^{(4)})^2 s^4 \end{array} \right\}}$$

Ma fissato in quantità e direzione il semidiametro f, ossia trovato il centro dell'ellisse e dell'iperbola osculatrice, e determinato il valore del semidiametro conjugato g (§§ 2, 3) si può con facili costruzioni (§ 5) assegnare in quantità e posizione i semiassi a, b, e quindi avere l'eccentricità della conica osculatrice ellittica od iperbolica.

Frattanto osserveremo, che nel caso in cui la (20) sia quantità negativa, cioè se la conica osculatrice sia ellittica, abbiamo (30)

$$(34) \qquad e^2 = \sqrt{(f^2 + g^2 + 2fg \operatorname{sen}\{x_2, y_2\})} \,.\, \sqrt{(f^2 + g^2 - 2fg \operatorname{sen}\{x_2, y_2\})} \, ,$$

essendo il valore di $f^2 + g^2$ determinato dalla formula (28), e che invece se la (20) abbia un valore positivo, cioè se la conica sia un'iperbola risulta (30)

$$(35) \qquad e^2 = \sqrt{(f^2 + g^2 + 2fg \cos\{x_2, y_2\})} \,.\, \sqrt{(f^2 + g^2 - 2fg \cos\{x_2, y_2\})} ,$$

dovendosi in questo caso desumere $f^2 + g^2$ dalla 1.ª delle formule (31). Nel primo caso l'eccentricità è media geometrica fra le diagonali del parallelogrammo che ha per lati f, g, e per angolo compreso da questi lati il com-

plemento di $\{x_2, y_2\}$. Nell' altro caso le due rette, di cui l' eccentricità è la media geometrica, sono le metà delle diagonali del parallelogrammo circoscritto all' iperbola, che ha per lati due rette eguali e parallele a' diametri fra loro conjugati $2f$, $2g$.

Immaginando riferita la conica a' semiassi a, b, se nell' equazione che la rappresenta introduciamo i valori particolari delle coordinate spettanti all' estremità del semidiametro reale f, cioè $f\cos\{x_2, a)$, $-f\,\mathrm{sen}\,(x_2, a\}$, abbiamo la nota equazione

$$\frac{\cos^2\{x_2, a\}}{a^2} \pm \frac{\mathrm{sen}^2\{x_2, a\}}{b^2} = \frac{1}{f^2},$$

la quale a cagione di

$$\cos^2\{x_2, a\} = \frac{1+\cos 2\{x_2, a\}}{2}, \qquad \mathrm{sen}^2\{x_2, a\} = \frac{1-\cos 2\{x_2, a\}}{2},$$

esibisce

$$(36) \qquad \cos 2\{x_2, a\} = \frac{f^2 \pm g^2 \cos 2\{x_2, y_2\}}{e^2} = \frac{f^2 \pm g^2 \mp 2g^2\,\mathrm{sen}^2\{x_2, y_2\}}{e^2},$$

e quindi (32)

$$(37) \qquad \mathrm{sen}\, 2\{x_2, a\} = \pm \frac{g^2\,\mathrm{sen}\, 2\{x_2, y_2\}}{e^2},$$

$$\cot 2\{x_2, a\} = \cot 2\{x_2, y_2\} \mp \frac{f^2}{g^2\,\mathrm{sen}\, 2\{x_2, y_2\}}.$$

Alla 2.ª delle (37) si può dare altresì i due aspetti seguenti

$$(38) \qquad \cot 2\{x_2, a\} = \frac{1}{2}\cot\{x_2, y_2\} - \frac{1}{2}\mathrm{tang}\,\{x_2, y_2\} \pm \frac{f^2}{g^2\,\mathrm{sen}\, 1\{x_2, y_2\}}$$

$$= \frac{f^2 \pm g^2}{g^2\,\mathrm{sen}\, 2\{x_2, y_2\}} - \mathrm{tang}\,\{x_2, y_1\}.$$

Sostituito il valore (36) di $\cos 2\{x_2, a\}$ nelle due formule esprimenti il seno ed il coseno di $\{x_2, a\}$ abbiamo

$$(39) \qquad \cos\{x_2, a\} = \frac{\sqrt{(e^2 + f^2 \pm g^2 \cos 2\{x_2, y_2\})}}{e\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\pm g^2\,\mathrm{sen}\, 2\{x_2, y_2\}}{e\sqrt{2}\,.\,\sqrt{(e^2 - f^2 \pm g^2 \cos 2\{x_2, y_2\})}},$$

$$\operatorname{sen}\{x_2, a\} = \frac{\sqrt{(e^2 - f^2 \mp g^2 \cos 2\{x_2, y_2\})}}{e\sqrt{2}} = \frac{\pm g^2 \operatorname{sen} 2\{x_2, y_1\}}{e\sqrt{2}.\ \sqrt{(e^2 + f^2 \pm g^2 \cos 2\{x_2, y_2\})}},$$

e dividendo la prima espressione dell' una di queste quantità (39) per la seconda dell' altra, troviamo

$$(40) \qquad \cot\{x_2, a\} = \cot 2\{x_2, y_2\} \pm \frac{e^2 + f^2}{g^2 \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}},$$

$$\operatorname{tang}\{x_2, a\} = -\cot 2\{x_2, y_2\} \pm \frac{e^2 - f^2}{g^2 \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}}.$$

Siccome poi dalle due espressioni (32) di e^2 risulta

$$\operatorname{sen}\{x_2, y_2\} = \frac{\sqrt{\mp(e^4 - (f^2 \pm g^2)^2)}}{2fg}, \qquad \cos\{x_2, y_2\} = \frac{\sqrt{\pm(e^4 - (f^2 \mp g^2)^2)}}{2fg},$$

donde

$$\cos 2\{x_2, y_2\} = \pm\left(\frac{e^4 - f^4 - g^4}{2f^2 g^2}\right), \quad \text{ec.}$$

è manifesto come si possono esprimere per mezzo delle sole f, g, e le formule sopraddette (36) (37) (39) (40). Così si avrebbe

$$\cos\{x_2, a\} = \frac{\sqrt{((e^2 + f^2)^2 - g^4)}}{2ef}, \qquad \operatorname{sen}\{x_2, a\} = \frac{\sqrt{(g^4 - (e^2 - f^2)^2)}}{2ef}.$$

Per assegnare l' inclinazione del semiasse a al semidiametro g, ossia alla tangente y_2 della data curva, basta ricorrere all' eguaglianza

$$\{y_2, a\} = \{x_2, a\} - \{x_2, y_2\},$$

che si deduce dalle convenzioni stabilite nel § 1, e prendendo il coseno ed il seno di $2\{y_2, a\}$, e di $\{y_2, a\}$ si avrà, mercè le espressioni (36) (37) (39) (18) (19)

$$(41) \quad \cos 2\{y_2, a\} = \frac{f^2 \cos 2\{x_2, y_2\} \pm g^2}{e^2}, \quad \operatorname{sen} 2\{y_2, a\} = -\frac{f^2 \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}}{e^2},$$

$$\cot 2\{y_2, a\} = -\cot 2\{x_2, y_2\} \mp \frac{g^2}{f^2 \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}},$$

$$= \operatorname{tg}\{x_2, y_2\} - \frac{(f^2 \pm g^2)}{f^2 \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{tang}\{x_2, y_2\} - \frac{1}{2} \cot\{x_2, y_2\} \mp \frac{g^2}{f^2 \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}}$$

cioè

$$\cot 2\{y, a\} = \frac{1}{2}\left\{\frac{3y''^2 \operatorname{sen}\{x, y\}}{y'''s'^2 - 3(y' + \cos\{x, y\})y''^2} - \frac{y'''s'^2 - 3(y' + \cos\{x, y\})y''^2}{3y''^2 \operatorname{sen}\{x, y\}}\right\}$$

$$+ \frac{(5y'''^2 - 3y''y^{(4)})s'^4}{6y''^2 \operatorname{sen}\{x, y\}(y'''s'^2 - 3(y' + \cos\{x, y\})y''^2)} .$$

Si trova inoltre

$$\cos\{y_2, a\} = \frac{(e^2 + f^2 \pm g^2)\cos\{x_2, y_2\}}{e\sqrt{2}.\sqrt{(e^2 + f^2 \pm g^2\cos 2\{x_2, y_2\})}} = \frac{(e^2 - f^2 \pm g^2)\operatorname{sen}\{x_2, y_2\}}{e\sqrt{2}.\sqrt{(e^2 - f^2 \mp g^2\cos 2\{x_2, y_2\})}} ,$$

$$\operatorname{sen}\{y_2, a\} = \frac{(e^2 - f^2 \mp g^2)\cos\{x_2, y_2\}}{c\sqrt{2}.\sqrt{(e^2 - f^2 \mp g^2\cos 2\{x_2, y_2\})}} = \frac{-(e^2 + f^2 \mp g^2)\operatorname{sen}\{x_2, y_2\}}{e\sqrt{2}.\sqrt{(e^2 + f^2 \pm g^2\cos 2\{x_2, y_2\})}} ,$$

$$\cot\{y_2, a\} = -\left(\frac{e^2 + f^2 \pm g^2}{e^2 + f^2 \mp g^2}\right)\cot\{x_2, y_2\} = \left(\frac{e^2 - f^2 \pm g^2}{e^2 - f^2 \mp g^2}\right)\operatorname{tang}\{x_2, y_2\} .$$

Si avrebbe potuto in simil guisa determinare gli angoli formati del semi-asse conjugato b col diametro x_2, e colla tangente y_2, partendo dall'equazione

$$\frac{\operatorname{sen}^2\{x_2, b\}}{a^2} \pm \frac{\cos^2\{x_2, b\}}{b^2} = \frac{1}{f^2} ;$$

ma poichè vennero già dedotti i seni ed i coseni di $\{x_2, a\}$ e di $\{y_2, a\}$, come pure degli angoli doppii di questi, basta valersi delle eguaglianze evidenti

$$\{x_2, b\} = \{x_2, a\} + \frac{1}{2}\pi , \qquad \{y_2, b\} = \{y_2, a\} + \frac{1}{2}\pi ,$$

per avere

$$(42) \qquad \begin{aligned} &\cos 2\{x_2, b\} = -\cos 2\{x_2, a\} , && \operatorname{sen} 2\{x_2, b\} = -\operatorname{sen} 2\{x_2, a\} , \\ &\cos\{x_2, b\} = -\operatorname{sen}\{x_2, a\} , && \operatorname{sen}\{x_2, b\} = \cos\{x_2, a\} , \end{aligned}$$

ec.

§. 5.

Costruzioni che servono a determinare graficamente i semiassi, e l'eccentricità della conica osculatrice né casi in cui questa sia ellittica, od iperbolica.

Conosciuti i valori dei semidiametri conjugati f, g (22), e fissato (16) (18) il centro dell' ellisse o dell' iperbola osculatrice, è facile assegnare graficamente i valori di a, b, e, e la posizione del semiasse focale a nel caso in cui la conica sia un' iperbola. Prendendo sulla tangente y_2 alla data curva a partire dal punto (x, y) due segmenti eguali a g si hanno gli assintoti dell' iperbola nelle rette che congiungono gli estremi opposti di que' due segmenti col centro di detta conica. L' eccentricità equivale (35) alla media geometrica fra i segmenti degli assintoti intercetti fra il centro e la tangente y_2. Dividendo per metà l' angolo compreso dagli assintoti, e l' angolo supplementare, si hanno le direzioni dell' asse focale o traverso, e dell' asse conjugato. Infine projettando ortogonalmente sopra i due assi l' eccentricità presa sopra un assintoto si ottengono i valori de' rispettivi semiassi.

Se la conica osculatrice è un' ellisse, si scorge dalla (34) che per avere il valore di e conviene dall' estremità del semidiametro g guidare una perpendicolare ad x_2, e prendervi dall' una e dall' altra parte dell' estremo di g una lunghezza eguale ad f. Imperocchè le due rette r_1, r_2 congiungenti il centro della conica colle estremità opposte de' due segmenti inferiore e superiore presi sulla detta perpendicolare essendo

$$r_1 = \sqrt{(f^2 + g^2 - 2fg \operatorname{sen} \{x_2, y_2\})}, \qquad r_2 = \sqrt{(f^2 + g^2 + 2fg \operatorname{sen} \{x_2, y_2\})},$$

ne viene che l' eccentricità è media geometrica fra le due rette r_1, r_2. Queste servono pure a determinare agevolmente in quantità e posizione i semiassi a, b nel modo avvertito dal rinomato geometra sig. Chasles (*Aperçu historique*, p. 361, Nota XXV).

Infatti dalle equazioni

$$a^2 + b^2 = f^2 + g^2, \qquad ab = fg \operatorname{sen} \{x, y\},$$

si ricava

$$a - b = r_1, \qquad a + b = r_2,$$

cosicchè a equivale alla semisomma, e b alla semidifferenza di r_1, r_2. Di più, siccome risulta dalla costruzione qui indicata

$$\operatorname{sen}\{x_2, r_1\} = \frac{g \operatorname{sen}\{x_2, y_2\} - f}{r_1}, \qquad \cos\{x_2, r_1\} = \frac{g \cos\{x_2, y_2\}}{r_1},$$

$$\operatorname{sen}\{x_2, r_2\} = \frac{g \operatorname{sen}\{x_2, y_2\} + f}{r_2}, \qquad \cos\{x_2, r_2\} = \frac{g \cos\{x_2, y_2\}}{r_2},$$

e quindi

$$\cos(\{x_2, r_2\} + \{x_2, r_1\}) = \frac{g^2 \cos 2\{x_2, y_2\} + f^2}{e^2},$$

ne segue (36)

$$\{x_2, a\} = \frac{\{x_2, r_2\} + \{x_2, r_1\}}{2};$$

di maniera che si determina la posizione di a col dividere per mezzo l' angolo compreso dalle due rette r_1, r_2. La divisione per metà dell' angolo supplementare darebbe la posizione del semiasse conjugato.

Senza mestieri di determinare il valore di g il sig. Transon nella citata Memoria (*Recherches* ec. Liouville, *Journal de Mathématiques*, maggio 1841) propone di fissare le direzioni degli assi conjugati della conica osculatrice guidando pel centro di questa conica le due tangenti all' inviluppo degli assi di tutte le coniche, che hanno un contatto del 3.° ordine colla data curva, e quindi i loro centri sulla retta x_2, e lo stesso raggio osculatore ρ della data curva nel punto comune (x, y). Egli osserva, come verrà dimostrato qui sotto, che questo inviluppo è una parabola che ha per direttrice la retta x_2, e per foco la projezione del centro del circolo osculatore della data curva sopra la retta che forma colla normale un angolo eguale e di segno opposto a quello formato colla stessa normale dalla retta x_2. Per dimostrare questa proposizione, immaginiamo riferito l'asse focale d'una qualunque delle coniche aventi un contatto del 3.° ordine colla proposta curva a due assi ortogonali coll' origine pel punto (x, y), uno de' quali sia la retta x_2 in cui giacciono i centri di dette coniche. L'equazione rappresentativa dell' asse focale richiesto a coordinate correnti u_1, z_1 sarà (4)

$$(43) \qquad u_1 - f - z_1 \cot\{x_2, a\} = 0 ,$$

essendo $\cot\{x_2, a\}$ (40) funzione del solo parametro variabile f, attesochè in simile ricerca h (26) è quantità costante, e dall'eguaglianza $\pm g^2 = fh$ risulta (32) (40)

$$(44) \qquad e^2 = f\sqrt{(f^2 + 2fh\cos 2\{x_2, y_2\} + h^2)},$$

$$\cot\{x_2, a\} = \cot 2\{x_2, y_2\} + \frac{e^2 + f^2}{fh \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}} .$$

Onde ottenere il cercato inviluppo, mercè l'eliminazione di f tra l'equazione (43) e la sua derivata rapporto ad f, cioè

$$(45) \qquad -1 + z_1 \frac{\mathrm{d}\{x_2, a\}}{\operatorname{sen}^2\{x_2, a\}\mathrm{d}f} = 0 ,$$

si moltiplichi per $-2\cos^2\{x_2, a\}$ la derivata rapporto ad f dell'espressione (37) di

$$\cot 2\{x_2, a\} = \cot 2\{x_2, y_2\} + \frac{f}{h \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}}$$

e si avrà

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\{x_2, a\}}\left(\frac{\mathrm{d}\{x_2, a\}}{\mathrm{d}f}\right) = -\frac{2\cos^2\{x_2, a\}}{h \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}} = -\frac{2\operatorname{sen}2\{x_2, a\}\cot\{x_2, a\}}{h \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}} ,$$

ossia colla sostituzione del valore (37) di $\operatorname{sen} 2\{x_2, a\}$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\{x_2, a\}}\left(\frac{\mathrm{d}\{x_2, a\}}{\mathrm{d}f}\right) = -\frac{f\cot\{x_2, a\}}{e^2} .$$

Introducendo questo valore nella (45), se ne avrà un valore di $\cot\{x_2, a\}$, che sostituito nella (43) esibisce

$$(46) \qquad e^2 = -f(u_1 - f).$$

Avendosi inoltre dalla 2.ª delle (44), a cagione della (46),

$$\cot\{x_2, a\} = \cot 2\{x_2, y_2\} + \frac{2f - u_1}{h \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}} ;$$

dal confrontare questo valore con quello di $\cot \{x_2, a\}$ offerto dalla (43) si otterrà l' eguaglianza

$$u_1 - f = \frac{z_1 (u_1 + h\cos 2\{x_2, y_2\})}{2z_1 + h \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}} = \frac{1}{2}(u_1 + h\cos 2\{a_2, y_2\})\left\{1 - \frac{\frac{1}{2} h \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}}{z_1 + \frac{1}{2} h \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}}\right\},$$

e poichè quadrando i due membri della (46), e ponendovi il valore (44) di e^4, se ne deduce

$$u_1 - f = \frac{u_1^2 + 2hu_1 \cos 2\{x_2, y_2\} + h^2}{2(u_1 + h\cos 2\{x_2, y_2\})} = \frac{1}{2}\left(u_1 + h\cos 2\{x_2, y_2\}\right) + \frac{\frac{1}{2} h^2 \operatorname{sen}^2 2\{x_2, y_2\}}{u_1 + h\cos 2\{x_2, y_2\}},$$

si avrà infine dal paragone di questo valore di $u_1 - f$ col precedente l'equazione richiesta

$$(47)\quad (u_1 + h\cos 2\{x_2, y_2\})^2 = -2h \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\} . \left(z_1 + \frac{1}{2} h\cos 2\{x_2, y_2\}\right).$$

Si scorge da questa equazione, che l' inviluppo di cui si tratta è una parabola, il cui vertice ha per coordinate prese sugli assi delle u_1, z_1 a partire dall' origine (x, y)

$$-h\cos 2\{x_2, y_2\}, \quad -\frac{1}{2} h \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\},$$

ed il cui foco ha per coordinate

$$-h\cos 2\{x_2, y_2\}, \quad -h \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}.$$

In conseguenza l'asse delle u_1 ossia la retta x_2 ove giacciono i centri delle coniche, che hanno un contatto del 3.° ordine colla data curva, sarebbe la direttrice di detta parabola. E se pel punto (x, y) si guida una retta che formi colla x_2 un angolo doppio di $\{x_2, y_2\}$, il prolungamento di questa retta oltre il punto (x, y) formerà col raggio di curvatura ρ normale alla data curva, e positivo con x_2, un angolo eguale e di segno opposto a $\{\rho, x_2\}$. Ma avendosi $\{\rho, x_2\} = \frac{\pi}{2} - \{x_2, y_2\}$, ne viene $\cos\{\rho, x_2\} = -\operatorname{sen}\{x_2, y_2\}$. Dunque la projezione di ρ sulla retta testè guidata equivale a $-\rho \operatorname{sen}\{x_2, y_2\} = -h$ (26), e quindi l' estremità di detta projezione, vale a dire la projezione sulla retta medesima del centro del circolo osculatore, è il

foco della parabola-inviluppo, secondo l'osservazione del sig. Transon anteriormente accennata. Imperocchè per costruzione il prolungamento della retta dapprima guidata forma col prolungamento di x_2 oltre il punto (x,y) l' angolo $2\{x_2, y_2\}$, e perciò la projezione del centro del circolo osculatore sulla retta medesima ha per coordinate

$$u_1 = -h\cos 2\{x_2, y_2\}, \qquad z_1 = -h\,\text{sen}\, 2\{x_2, y_2\}$$

cioè quelle che si è trovato appartenere al foco richiesto.

Dal modo con cui venne fissato (§ 3) il foco della parabola osculatrice si comprende, che questo esiste sulla medesima retta, ove giace il foco della parabola-inviluppo dianzi assegnato, ad una distanza $-\frac{1}{2}h$ dal punto (x,y); cosicchè il foco della parabola osculatrice cade alla metà della retta che congiunge il foco della parabola-inviluppo col punto (x,y). Per una nota proprietà della parabola, cioè che le tangenti guidate a questa curva da qualsivoglia punto della direttrice sono fra loro ortogonali, si può arguire che l' inviluppo degli assi conjugati agli assi focali delle coniche, che hanno un contatto del 3.° ordine con una curva qualunque, è la stessa parabola inviluppante gli assi focali. Ma per provare colla medesima analisi l' identità dell' uno e dell' altro inviluppo, si assuma l'equazione a coordinate correnti u_2, z_2 dell' asse conjugato d' una qualunque di dette coniche, riferendola del pari al sistema d' assi ortogonali coll' origine nel punto (x_1, y), uno de' quali sia la retta x_2, cioè

$$u_2 - f - z_2 \cot\{x_2, b) = 0 .$$

Siccome quest' equazione per la 1.ª delle eguaglianze, donde risultano le (42), si riduce all' aspetto

$$(48) \qquad z_2 + (u_2 - f)\cot\{x_2, a\} = 0 ;$$

sostituendo nella derivata rapporto ad f della (48) il valore di

$$\frac{1}{\text{sen}^2\{x_2, a\}}\left(\frac{\mathrm{d}\{x_2, a\}}{\mathrm{d}f}\right) = -\frac{f\cot\{x_2, a\}}{e^2}$$

superiormente ottenuto, avremo

$$(49) \qquad e^2 = f(u_2 - f) .$$

Introdotto questo valore di e^2 nella 2.ª delle (44), si trova

$$\cot\{x_2, a\} = \cot 2\{x_2, y_2\} + \frac{u_2}{h \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}},$$

e dal paragone del presente valore di $\cot\{x_2, a\}$ con quello offerto dalla (48) si deduce

$$u_2 - f = -\frac{h z_2 \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}}{u_2 + h \cos 2\{x_2, y_2\}}.$$

Ora elevando al quadrato i due membri della (49) abbiamo, mercè la 1.ª delle (44), l' eguaglianza

$$f = \frac{u_2^2 - h^2}{2(u_2 + h \cos 2\{x_2, y_2\})},$$

donde

$$u_2 - f = \frac{u_2^2 + 2hu_2 \cos 2\{x_2, y_2\} + h^2}{2\{u_2 + h \cos 2\{x_2, y_2\})}.$$

Conseguentemente il paragone di questa espressione di $u_2 - f$ colla precedente esibisce l' equazione del cercato inviluppo

$$(50) \qquad u_2^2 + 2hu_2 \cos 2\{x_2, y_2\} + h^2 = -2hz_2 \operatorname{sen} 2\{x_2, y_2\}$$

che coincide collo sviluppo della (47).

Conoscendo il foco e la direttrice d' una parabola, si può con una ben nota e facile costruzione guidarvi le tangenti da un punto qualunque, e determinare la posizione de' punti di contatto senza mestieri di descrivere alcuna parte della curva. Con simile costruzione si può dunque assegnare la posizione degli assi d' ogni conica, che avendo il suo centro sulla retta x_2, abbia comune colla data curva il circolo osculatore nel punto (x, y), e quindi anco fissare la posizione degli assi della conica osculatrice. Dal centro della conica, che ha colla data curva un contatto del 3.° o 4.° ordine, con un raggio eguale alla distanza di questo centro dal foco della parabola-inviluppo (47) descrivasi un circolo, che incontrerà la direttrice x_2 in due punti diametralmente opposti. Questi saranno le projezioni ortogonali sulla retta x_2 de' punti di contatto degli assi richiesti colla parabola-inviluppo, e le posizioni degli assi medesimi saranno le rette fra loro perpendicolari che dividono per metà ed incontrano ad angolo

retto le due rette fra loro perpendicolari congiungenti il foco della parabola-inviluppo co' punti ove il circolo testè descritto sega la retta x_2. La retta che congiunge i punti di contatto degli assi della conica colla parabola-inviluppo passerà pel foco di questa parabola, sarà perpendicolare alla retta che unisce il foco col centro della conica, ossia del circolo dianzi descritto, e verrà divisa dal foco stesso in due segmenti, di cui il raggio di detto cerchio sarà la media geometrica. Queste deduzioni si accordano co'risultati dell'analisi che ha servito a determinare la parabola-inviluppo. Imperocchè dall'aver trovato, che il foco di detta parabola ha per coordinate ortogonali riferite all'origine (x, y) e alla retta x_2 le quantità $-h \cos 2 \{x_2, y_2\}$, $-h \operatorname{sen} 2 \{x_2, y_2\}$, si deduce che, detto c il raggio del circolo poc' anzi descritto, ossia la retta congiungente il foco medesimo col punto $(f, 0)$ cioè col centro della conica di cui si cercano gli assi, si ottiene

$$c = \sqrt{\left\{(f + h \cos 2 \{x_2, y_2\})^2 h^2 \operatorname{sen}^2 2 \{x_2, y_2\}\right\}} = \sqrt{(f^2 + 2fh \cos 2 \{x_2, y_2\} + h^2)},$$

ovvero (44)

$$c = \frac{e^2}{f}.$$

Abbiamo pertanto dalle (46) (49)

$$(51) \qquad c = f - u_1 = u_2 - f,$$

e quindi scorgiamo che u_1, u_2 sono appunto le intercette fra il punto (x, y) e i punti d'incontro del circolo di raggio c colla retta x_2. Siccome poi la retta che congiunge il foco della parabola-inviluppo col punto $(u_2, 0)$ forma colla retta x_2 un angolo, che ha per cotangente

$$\frac{h \cos 2 \{x_2, y_2\} + u_2}{h \operatorname{sen} 2 \{x_2, y_2\}}$$

e per la 2.ª delle equazioni che succedono alla (49) si trova che questo pure è il valore (48) di $\cot \{x_2, a\}$; ne segue che l'asse focale della conica, che tocca con un contatto del 3.° o del 4.° ordine la curva proposta, è parallelo alla detta retta congiungente il foco della parabola-inviluppo col punto $(u_2, 0)$, e che quindi l'asse conjugato è parallelo alla retta congiungente il foco medesimo col punto $(u_1, 0)$ in conformità a' risultati della costruzione sopraccennata. Si avrebbe inoltre dall'eliminazione di $\cot \{x_2, a)$ fra le equazioni (43) (48)

$$z_1 z_2 = (f - u_1)(u_2 - f),$$

ossia (51)

$$z_1 z_2 = c^2 . \tag{52}$$

Determinata la direzione dell'asse focale, il sig. Transon propone una costruzione atta a fissarvi la posizione de' due fochi, mercè le intersezioni di quest'asse colle due rette guidate dal punto (x, y) pe' punti d'incontro del circolo osculatore colla parallela alla tangente, che passa pel punto ove la normale sega l'asse focale. Ma senza ricorrere a simile costruzione si può facilmente assegnare il valore dell'eccentricità e mediante l'una o l'altra delle equazioni (46) (49), da cui risulta (51) che il suo valore è medio geometrico tra f, e c. Questa eccentricità sarebbe pure la media geometrica fra le lunghezze intercette a partire dal centro della conica sull'asse focale della conica stessa dalla normale, e dalla tangente alla curva proposta.

Fissati i fochi della conica richiesta, si avrà la lunghezza dell'asse focale $2a$ prendendo la somma o la differenza de' raggi vettori guidati al punto (x, y) da' due fochi, secondochè la quantità (20) sia negativa, o positiva, cioè secondo i due casi in cui la detta conica sia un' ellisse, od un' iperbola. La formula $\sqrt{\pm(a^2 - e^2)}$ servirà poscia a determinare la lunghezza b del semi-asse conjugato. Osserveremo infine, che per una nota proprietà comune all' ellisse ed all' iperbola il prodotto degli anzidetti raggi vettori sarebbe eguale (73) al quadrato del semidiametro g conjugato al semidiametro f che passa pel dato punto (x, y).

§. 6.

Delle coniche che hanno un contatto di 2.° ordine colla curva proposta. Facile determinazione della costante h *per ciascuna di queste coniche. Modo di assegnare il luogo geometrico de' fochi della serie di dette coniche i cui centri giacciono in una data curva qualunque. Determinazione de' fochi d' una conica che ha un dato centro e tocca la curva proposta con un contatto del 2.° ordine.*

Ogni conica che abbia comune colla proposta curva il circolo osculatore nel punto (x, y), ossia il valore di ρ, ed il cui centro cada sopra una retta qualunque f guidata dal punto (x, y), e diversa dalla retta x_2, avrebbe un

contatto soltanto del 2.° ordine colla data curva. Ma i varii mezzi accennati testè nel § 5 onde fissare i semi-assi e l' eccentricità delle coniche, i cui centri giacciono sulla retta x_2, e che hanno quindi colla data curva un contatto del 3.° ordine, varranno del pari per quelle coniche, che avendo comune colla curva proposta il raggio ρ del circolo osculatore, presentano i loro centri sulla medesima retta f, purchè nell' analisi relativa l' angolo $\{x_2, y_2\}$ venga surrogato da $\{f, y_2\}$, ed h si riguardi determinata (26) dall' equazione

$$(53) \qquad h = \rho \operatorname{sen} \{f, y_2\} .$$

Pertanto siccome è stato già dimostrato che la parabola-inviluppo degli assi delle coniche, che hanno i loro centri sulla retta x_2, ha per foco l'estremità della projezione ortogonale del raggio ρ sulla retta, la cui inclinazione alla normale, od alla tangente y_2 della data curva, equivale alla rispettiva inclinazione della x_2, è facile desumere che i fochi delle varie parabole-inviluppi spettanti alle varie posizioni della retta f si troveranno sul circolo che ha per diametro ρ. Il segmento della retta f intercetto da questo circolo sarebbe (53) il valore della costante h per cadauna delle coniche, i cui centri giacciono sulla retta f, e che hanno comune colla data curva il circolo osculatore nel punto (x, y).

Se la conica è una parabola, $\frac{1}{2} h$ è la distanza della direttrice perpendicolare ad f dal punto (x, y), e il foco della parabola è l' estremità della projezione di $\frac{1}{2} \rho$ sulla retta dianzi indicata, la cui inclinazione ad y_2 è uguale alla rispettiva inclinazione della retta f. In conseguenza, come venne osservato dal sig. Transon, i fochi delle varie parabole, che hanno un contatto del 2.° ordine colla data curva, esisteranno sul circolo che ha per diametro $\frac{1}{2} \rho$, e quindi le loro direttrici passeranno sul punto della normale alla data curva determinato dal prolungare il raggio ρ d' una lunghezza eguale ad $\frac{1}{2} \rho$ oltre il punto (x, y).

Denotandosi con a, b, e i semi-assi e l'eccentricità di qualsivoglia conica, che abbia il suo centro sulla retta f, e tocchi con un contatto del 2.° ordine la data curva, valgono del pari per questa conica le formule (32), e quelle esprimenti (§ 4) il seno, ed il coseno di $\{y_2, x\}$ per mezzo di $f, g, e,$

purchè si sostituisca l' angolo $\{f, y_2\}$ ad $\{x_2, y_3\}$, e si abbia riguardo alla (53). Si avrebbe quindi (41) (32)

$$(54)\quad \cos\{y_2, a\} = \frac{a^2\cos\{f, y_2\}}{e\sqrt{(a^2 \mp g^2 \operatorname{sen}^2\{f, y_2\})}} = \frac{\mp(b^2-g^2)\operatorname{sen}\{f, y_2\}}{e\sqrt{(\mp b^2 \pm g^2\operatorname{sen}^2\{f, y_2\})}},$$

$$\operatorname{sen}\{y_2, a\} = \frac{\mp b^2\cos\{f, y\}}{e\sqrt{(\mp b^2 \pm g^2\operatorname{sen}^2\{f, y_2\})}} = \frac{-(a^2 \mp g^2)\operatorname{sen}\{f, y_2\}}{e\sqrt{(a^2 \mp g^2\operatorname{sen}^2\{f, y_2\})}},$$

$$\cot\{y_2, a\} = -\left(\frac{a^2}{a^2 \mp g^2}\right)\cot\{f, y_2\} = \left(\frac{b^2-g^2}{b^2}\right)\operatorname{tang}\{f, y_2\}.$$

Ora se riferiamo i fochi di detta conica a due assi fra loro ortogonali coll' origine nel punto (x, y), l' uno dei quali sia la tangente y_2 alla data curva, e l' altro la normale o la direzione del raggio osculatore ρ, denotando con ζ, η le coordinate dell' uno o dell' altro foco corrispondente a $\pm e$, troviamo colla scorta della (3)

$$(55)\quad \zeta = f\cos\{f, y_2\} \pm e\cos\{a, y_2\},$$

$$\eta = f\operatorname{sen}\{f, y_2\} \pm e\operatorname{sen}\{a, y_2\},$$

ossia (54) a cagione di $g^2 = \pm fh$, e (2) di

$$\cos\{a, y_2\} = \cos\{y_2, a\}, \qquad \operatorname{sen}\{a, y_2\} = \operatorname{sen}\{y_2, a\}.$$

$$(56)\quad \zeta - f\cos\{f, y_2\} = \pm\frac{a^2\cos\{f, y_2\}}{\sqrt{(a^2 - fh\operatorname{sen}^2\{f, y_2\})}},$$

$$\eta - f\operatorname{sen}\{f, y_2\} = \pm\frac{(a^2-fh)\operatorname{sen}\{f, y_2\}}{\sqrt{(a^2 - fh\operatorname{sen}^2\{f, y_2\})}}.$$

Abbiamo inoltre dalla 1.ª delle (32), surrogandovi l'angolo $\{f, y_2\}$ ad $\{x_2, y_2\}$, e ponendovi fh in luogo di $\pm g^2$, la formula analoga alla 1.ª delle (44)

$$(57)\quad e^2 = f\sqrt{(f^2 + 2fh\cos 2\{f, y_2\} + h^2)},$$

mercè la quale eliminando e^2 dalla 2.ª delle (32), e riducendo razionale il risultato si trova

$$(58)\quad a^2(a^2 - fh) - f^2(a^2 - fh\operatorname{sen}^2\{f, y_2\}) = 0.$$

Dividendo fra loro i rispettivi membri delle (56) si ricava

$$a^2 = \left(\frac{\zeta - f\cos\{f, y_2\}}{\zeta\,\text{sen}\,(f, y_2) - n\cos\{f, y_2\}}\right) fh\,\text{sen}\,\{f, y_2\},$$

e quindi

$$a^2 - fh = \left(\frac{n - f\,\text{sen}\,\{f, y_2\}}{\zeta\,\text{sen}\,(f, y_2) - n\cos\{f, y_2\}}\right) fh\cos\{f, y_2\}.$$

Poscia col sottrarre dalla 1.ª delle (56) moltiplicata per $\text{sen}\,\{f, y_2\}$ la 2.ª moltiplicata per $\cos\{f, y_2\}$ avendosi

$$\pm\sqrt{(a^2 - fh\,\text{sen}^2\{f, y_2\})} = \frac{fh\,\text{sen}\,\{f, y_2\}\cos\{f, y_2\}}{\zeta\,\text{sen}\,\{f, y_2\} - n\cos\{f, y_2\}},$$

si otterrà col sostituire il quadrato di questo valore e le espressioni di a^2 e di $a^2 - fh$ nella (57) l' equazione

$$(59)\qquad \zeta n - f(\zeta\,\text{sen}\,\{f, y_2\} - n\cos\{f, y_2\}) = 0.$$

Di più dal sommare insieme le (56) rispettivamente moltiplicate per $\cos\{f, y_2\}$, $\text{sen}\,\{f, y_2\}$ deducendosi

$$\pm\sqrt{(a^2 - fh\,\text{sen}^2\{f, y_2\})} = \zeta\cos\{f, y_2\} + n\,\text{sen}\,\{f, y_2\} - f,$$

si avrà dal paragonare questo valore colla precedente espressione della medesima quantità una equazione, che colla sostituzione de' valori di h, f offerti dalle (53) (59) si riduce alla forma

$$(60)\qquad (\zeta^2 + n^2)(\zeta\,\text{sen}\,\{f, y_2\} - n\cos\{f, y_2\}) - \rho\,\zeta n\,\text{sen}\,\{f, y_2\} = 0.$$

Da queste equazioni (58) (59) si raccoglie

$$(61)\qquad f\,\text{sen}\,\{f, y_2\} = \frac{n(\zeta^2 + n^2)}{2(\zeta^2 + n^2) - \rho n},$$

$$f\cos\{f, y_2\} = \zeta - \frac{\zeta(\zeta^2 + n^2)}{2(\zeta^2 + n^2) - \rho n};$$

e in conseguenza

$$(62)\qquad f^2 = \frac{(\zeta^2+n^2)^3 - \rho\zeta^2 n(2(\zeta^2+n^2)-\rho n)}{(2(\zeta^2+n^2)^2-\rho n)^2},$$

$$\cot\{f, y_2\} = \frac{\zeta(\zeta^2+n^2-\rho n)}{n(\zeta^2+n^2)}.$$

Le formule (60) esprimono le coordinate ortogonali del centro della conica, che ha un foco nel punto (ζ, n), e tocca la data curva con un contatto almeno del 2.° ordine. L'origine di queste coordinate è il punto di contatto, e la tangente y_2 alla curva, come venne già stabilito, è l'asse delle ζ. Pertanto se i due centri d'una serie di coniche, il cui contatto colla curva proposta sia del 2.° ordine, giacciono in una data linea rappresentata da una relazione fra le coordinate $f\cos\{f, y_2\}$, $f\,\text{sen}\{f, y_2\}$, si avrà l'equazione che rappresenta il luogo geometrico de' fochi di dette coniche, sostituendo in quella relazione le espressioni (61), e se l'equazione rappresentativa della linea de' centri di dette coniche contenga le coordinate polari f, $\{f, y_2\}$, si otterrà l'equazione della linea de' fochi, mediante le formule (62), ovvero mercè la 1.ª delle (62) e le (61).

Detto r il raggio vettore guidato dal punto di contatto al foco (ζ, n) si trova evidentemente (3)

$$(63)\qquad \zeta = r\cos\{r, y_2\}, \qquad n = r\,\text{sen}\{r, y_2\},$$

e quindi le (61) divengono

$$(64)\qquad f\,\text{sen}\{f, y_2\} = \frac{r^2\,\text{sen}\{r, y_2\}}{2r - \rho\,\text{sen}\{r, y_2\}},$$

$$f\cos\{f, y_2\} = \frac{(r-\rho\,\text{sen}\{r, y_2\})\,r\cos\{r, y_2\}}{2r-\rho\,\text{sen}\{r, y_2\}},$$

e le (62) si riducono alle seguenti

$$(65)\qquad f = \frac{r\sqrt{(r^2-(2r-\rho\,\text{sen}\{r, y_2\})\rho\,\text{sen}\{r, y_2\}\cos^2\{r, y_2\})}}{2r-\rho\,\text{sen}\{r, y_2\}},$$

$$\cot\{f, y_2\} = \left(1 - \frac{\rho\,\text{sen}\{r, y_2\}}{r}\right)\cot\{r, y_2\}.$$

Queste formule (64) (65) valgono a conseguire immediatamente l'equazione polare a coordinate r, $\{r, y_2\}$ della linea de' fochi, allorchè sia data l' equazione a coordinate ortogonali, oppure l' equazione polare della linea in cui giacciono i centri d' una serie di coniche aventi un contatto almeno del 2.° ordine colla proposta curva nel dato punto (x, y). Col mezzo delle (64) si potrebbero costruire i valori delle coordinate del centro d' ogni conica, che abbia un dato foco, e tocchi la data curva con un contatto non minore del 2.° ordine. Ma in questo caso si vedrà esser più facile determinare l' altro foco, e poscia fissare il centro alla metà della distanza d' un foco dall' altro.

La sostituzione de' valori (63) nelle equazioni (59) (60) esibisce le eguaglianze

$$(66) \qquad \frac{\operatorname{sen}\{f, y_2\}}{\operatorname{sen}\{r, y_2\}} + \frac{\cos\{f, y_2\}}{\cos\{r, y_2\}} = \frac{r}{f},$$

$$\frac{\operatorname{sen}\{f, y_2\}}{\operatorname{sen}\{r, y_2\}} - \frac{\cos\{f, y_2\}}{\cos\{r, y_2\}} = \frac{\rho \operatorname{sen}\{f, y_2\}}{r},$$

donde si ottiene colla moltiplicazione, scrivendo per brevità h in luogo di $\rho \operatorname{sen}\{f, y_2\}$ (53),

$$(67) \qquad \frac{\operatorname{sen}^2\{f, y_2\}}{\operatorname{sen}^2\{r, y_2\}} - \frac{\cos^2\{f, y_2\}}{\cos^2\{r, y_2\}} = \frac{h}{f}.$$

Introdotto in questa equazione il valore $1 - \operatorname{sen}^2\{r, y_2\}$ di $\cos^2\{r, y_2\}$ se ne deduce

$$\operatorname{sen}^4\{r, y_2\} - \left(\frac{f+h}{h}\right) \operatorname{sen}^2\{r, y_2\} + \frac{f}{h} \operatorname{sen}^2\{f, y_2\} = 0,$$

e quindi

$$\operatorname{sen}^2\{r, y_2\} = \frac{f + h \pm \sqrt{(f^2 + 2fh\cos 2\{f, y_2\} + h^2)}}{2h},$$

ossia (57)

$$\operatorname{sen}^2\{r, y_2\} = \frac{f^2 + fh \pm e^2}{2fh}.$$

In questa espressione non è da adottarsi il segno superiore di e^2, attesochè si avrebbe per la 2.ª delle (32)

$$\operatorname{sen}^2\{r, y_2\} = \frac{a^2}{\pm g^2}$$

cioè $\text{sen}^2\{r, y_2\} > 1$ nel caso dell' ellisse, oppure eguale a quantità negativa nel caso dell' iperbola. Ritenendo dunque il solo segno inferiore abbiamo per la 3.ª delle (32)

$$(68) \qquad \text{sen}\{r, y_2\} = \sqrt{\left(\frac{fh + f^2 - e^2}{2fh}\right)} = \frac{b}{g}.$$

Questa formula offre una semplice espressione del valore numerico di $\text{sen}\{r, y_2\}$ nel rapporto del semi-asse b non contenente i fochi al semidiametro g parallelo alla tangente y_2.

Colla sostituzione del valore di g desunto dalla (68) nella 2.ª espressione di $\cot\{y_2, a\}$ (54) si trova, a cagione di $\cot\{y_2, a\} = -\cot\{a, y_2\}$ (2), la relazione

$$(69) \qquad \cot^2\{r, y_2\} = \cot\{a, y_2\} \,.\, \cot\{f, y_2\}.$$

Al valore numerico (68) di $\text{sen}\{r, y_2\}$ corrisponde un doppio valore di

$$(70) \qquad \cos\{r, y_2\} = \pm\sqrt{\left(\frac{fh - f^2 + e^2}{2fh}\right)},$$

e quindi si rileva che i fochi esistono, com' è ben noto, sopra due rette egualmente inclinate alla tangente y_2. Immaginando introdotti nella 1.ª delle (66) il valore numerico di $\text{sen}\{r, y_2\}$ (68), e il doppio valore corrispondente (70) di $\cos\{r, y_2\}$, ne abbiamo due valori $r^{(1)}$, $r^{(2)}$ di r relativi a' due fochi della conica, cioè

$$r^{(1)} = f\left\{\frac{\text{sen}\{f, y_2\}}{\text{sen}\{r, y_2\}} + \frac{\cos\{f, y_2\}}{\cos\{r, y_2\}}\right\}, \quad r^{(2)} = f\left\{\frac{\text{sen}\{f, y_2\}}{\text{sen}\{r, y_2\}} - \frac{\cos\{f, y_2\}}{\cos\{r, y_2\}}\right\},$$

e poichè dalla nota eguaglianza

$$ab = fg\,\text{sen}\{f, y_2\},$$

si deduce (68)

$$(71) \qquad f\frac{\text{sen}\{f, y_2\}}{\text{sen}\{r, y_2\}} = a,$$

avremo dal prendere la somma de' predetti valori di r

$$(72)\qquad r^{(1)} + r^{(2)} = 2a$$

e formandone il prodotto otterremo, a cagione della (67),

$$(73)\qquad r^{(1)}\, r^{(2)} = fh = \pm g^2.$$

Si scorge dalla (73) che i raggi vettori $r^{(1)}, r^{(2)}$ guidati a' due fochi hanno il medesimo segno se la conica è un' ellisse, e segni diversi allorchè la conica sia un' iperbola, cioè nel primo caso i due fochi cadono dalla stessa parte della tangente y_2, e nell' altro caso giacciono in parti opposte. Conseguentemente la somma algebrica di questi raggi vettori che equivale all' asse focale (71) si riconosce essere la somma oppure la differenza geometrica de' raggi medesimi, secondo i due casi in cui la conica sia un' ellisse, od una iperbola. L' equazione (72) ben conosciuta porge una facile costruzione del raggio $r^{(2)}$, allorchè sia dato il raggio $r^{(1)}$, e poichè si è notato essere

$$\{r^{(2)}, y_2\} = \pi - \{r^{(1)}, y_2\}$$

ne viene una pronta determinazione dell'altro foco allorchè sia data la posizione d' uno de' fochi.

È palese (72) (73) che $r^{(1)}, r^{(2)}$ sono le radici dell' equazione

$$(74)\qquad r^2 - 2ar + fh = 0,$$

donde ricavasi, mercè la 2.ª delle (32),

$$(75)\qquad r = \sqrt{\left(\frac{f^2 + fh + e^2}{2}\right)} \pm \sqrt{\left(\frac{f^2 - fh + e^2}{2}\right)}.$$

Si hanno da questa formula i due valori $r^{(1)}, r^{(2)}$ col ritenervi il segno superiore o l' inferiore, essendo h, e determinate dalle (53) (57).

Sostituendo nella (74) il valore di r esibito dalla 2.ª delle (63) si avrebbe, a cagione della (71), l' equazione

$$n^2 - 2nf \operatorname{sen}\{f, y_2\} + fh \operatorname{sen}^2\{r, y_2\} = 0$$

determinante le ordinate de' fochi relativi a' raggi $r^{(1)}, r^{(2)}$. Ma i valori di queste ordinate, come pur quelli delle rispettive ascisse, si ottengono del pari colla

sostituzione del valore di sen $\{r, y_2\}$, e de' rispettivi valori di r, e di $\cos\{r, y_2\}$ (75) (70), donde risulta

$$(76) \qquad \zeta = f\cos\{f, y_2\} \pm \sqrt{\left(\frac{fh + f^2\cos 2\{f, y_2\} + e^2}{2}\right)},$$

$$\nu = f\,\mathrm{sen}\,\{f, y_2\} \pm \sqrt{\left(\frac{e^2 - fh - f^2\cos 2\{f, y_2\}}{2}\right)}.$$

Secondochè in queste formule si ritiene il segno superiore, o l' inferiore, si hanno i valori delle coordinate ζ_1, ν_1 del foco corrispondente al raggio vettore $r^{(1)}$, oppur quelli delle coordinate ζ_2, ν_2 dell' altro foco.

Conseguentemente si ottiene dalle (76)

$$\zeta_1 + \zeta_2 = 2f\cos\{f, y_2\}, \qquad \nu_1 + \nu_2 = 2f\,\mathrm{sen}\,\{f, y_2\},$$

e sostituendo in queste eguaglianze i valori di $f\cos\{f, y_2\}$, $f\,\mathrm{sen}\,\{f, y_2\}$ espressi per le coordinate ζ_2, ν_2 d' uno de' fochi, mediante funzioni simili alle (61), si trova

$$(77) \qquad \zeta_1 = \frac{-\rho\,\zeta_2\nu_2}{2(\zeta_2^2 + \nu_2^2) - \rho\nu_2}, \qquad \nu_1 = \frac{\rho\nu_2^2}{2(\zeta_2^2 + \nu_2^2) - \rho\nu_2}.$$

Per mezzo di queste formule si avrà l' equazione a coordinate ortogonali ζ_2, ν_2 della linea in cui cadono i secondi fochi, allorchè sia data l' equazione a coordinate ζ_1, ν_1 del luogo geometrico de' primi fochi d' una serie di coniche, che hanno fra loro e colla proposta curva un contatto non minore del 2.° ordine.

Onde conseguire l'equazione polare del luogo geometrico de' secondi fochi, varranno le seguenti formule, che si deducono dal sostituire nelle (77) i valori (63) di

$$\zeta_2 = r^{(2)}\cos\{r^{(2)}, y_2\}, \qquad \nu_2 = r^{(2)}\,\mathrm{sen}\,\{r^{(2)}, y_2\},$$

cioè

$$(78) \qquad \zeta_1 = -\frac{\rho r^{(2)}\,\mathrm{sen}\,\{r^{(2)}, y_2\}\cos\{r^{(2)}, y_2\}}{2r^{(2)} - \rho\,\mathrm{sen}\,\{r^{(2)}, y_2\}}, \qquad \nu_1 = \frac{\rho r^{(2)}\,\mathrm{sen}^2\{r^{(2)}, y_2\}}{2r^{(2)} - \rho\,\mathrm{sen}\,\{r^{(2)}, y_2\}}.$$

Se poi sia data l' equazione polare del luogo geometrico de' primi fochi, si avrà l' equazione polare della linea in cui cadono i secondi fochi, mercè le for-

mule che risultano dall' equazione prossima anteriore alla (74), e dal porre nella (73) il valore (53) di h, e quello di f sen $\{f, y_2\}$ espresso per $r^{(2)}$, $\{r^{(2)}, y_2\}$ mediante la funzione simile alla 1.ª delle (64); cioè

$$(79) \qquad \{r^{(1)}, y_2\} = \pi - \{r^{(2)}, y_2\}, \qquad r^{(1)} = \frac{r^{(2)} \rho \operatorname{sen} \{r^{(2)}, y_2\}}{2r^{(2)} - \rho \operatorname{sen} \{r^{(2)}, y_2\}} .$$

Le formule (76) servono infine ad ottenere l'equazione del luogo geometrico de' centri di dette coniche, allorchè sia data la linea de' primi, o de' secondi fochi delle coniche stesse.

Il paragone delle (55) colle (76) offre a cagione (2) di $\cos \{a, y_2\} = \cos \{y_2, a\}$ e di $\operatorname{sen} \{a, y_2\} = -\operatorname{sen} \{y_2, a\}$ le espressioni

$$(80) \qquad \cos \{y_2, a\} = \sqrt{\left(\frac{fh + f^2 \cos 2 \{f, y_2\} + e^2}{2e^2}\right)},$$

$$\operatorname{sen} \{y_2, a\} = -\sqrt{\left(\frac{e^2 - fh - f^2 \cos 2 \{f, y_2\}}{2e^2}\right)},$$

diverse nell'aspetto dalle (54), ma di cui si può riconoscere la relativa identità avendo riguardo all' eguaglianza (57).

Se ne deduce

$$(81) \qquad \operatorname{sen} 2 \{y_2, a\} = -\frac{f^2 \operatorname{sen} 2 \{f, y_2\}}{e^2} = \frac{-f \operatorname{sen} 2 \{f, y_2\}}{\sqrt{(f^2 + 2fh \cos 2 \{f, y_2\} + h^2)}},$$

$$\cos 2 \{y_2, a\} = \frac{f^2 \cos 2 \{f, y_2\} + fh}{e^2} = \frac{f \cos 2 \{f, y_2\} + h}{\sqrt{f^2 + 2fh \cos 2 \{f, y_2\} + h^2)}},$$

$$\cot 2 \{y_2, a\} = -\cot 2 \{f, y_2\} - \frac{\rho}{2 \cos \{f, y_2\}},$$

e si trova che queste corrispondono alle 1.ª, 2.ª e 3.ª delle (41) avvertendo che all' angolo $\{x_2, y_2\}$ è subentrato $\{f, y_2\}$, e che si ha

$$\pm g^2 = fh = f\rho \operatorname{sen} \{f, y_2\}.$$

Da queste formule (81) si scorge che $2 \{a, y_2\}$ sarebbe l'angolo opposto al lato $f \operatorname{sen} 2 \{f, y_2\}$, d'un triangolo rettangolo che ha per cateti $f \operatorname{sen} 2 \{f, y_2\}$ ed $f \cos 2 \{f, y_2\} + h$. Il valore dell'eccentricità (57) equivale alla media geometrica tra il semidiametro f e l' ipotenusa di detto triangolo. Si ha quindi

un'altra maniera di assegnare graficamente i fochi d'una ellisse, o d'una iperbola, di cui si conoscono un semidiametro f, la direzione del diametro conjugato o della tangente, ed il valore di h. Se il valore di f si suppone infinito, la conica che ha per diametro la direzione di f è una parabola, e l'unico suo foco nello spazio finito è distante da (x, y) d' una quantità $\frac{1}{2} h$, ed esiste sulla retta che forma colla tangente y_2, o colla normale un angolo eguale alla rispettiva inclinazione di f. Ciò si deduce anco dalle formule (66) (67), imperocchè per f infinito si ricava dalla (67)

$$\operatorname{sen}\{r, y_2\} = \operatorname{sen}\{f, y_2\}, \qquad \cos\{r, y_t\} = \pm\cos\{f, y_2\}$$

e poscia dalla 2.ª delle (66) si hanno i due corrispondenti valori di r

$$r^{(1)} = \frac{\rho \operatorname{sen}\{f, y_2\}}{0} = \infty, \qquad r^{(2)} = \frac{1}{2} \rho \operatorname{sen}\{f, y_2\}.$$

Il primo di questi valori accenna l' esistenza d' un foco sul diametro f ad infinita distanza da (x, y). L' altro valore combinato col rispettivo valore di $\{r, y_2\} = \pi - \{f, y_2\}$ determina la posizione effettiva del foco della parabola nel modo già noto.

§. 7.

Formule esprimenti le coordinate del centro della conica osculatrice. Equazione del diametro. Riproduzione del valore di questo diametro. Differenziale dell' arco e raggio di curvatura della linea ch' è il luogo de' centri delle coniche osculatrici.

Indicando con X, Y le coordinate del centro della conica osculatrice abbiamo (3) (4) (16) (8) (22),

$$X - x = f\frac{\operatorname{sen}\{y, x_2\}}{\operatorname{sen}\{x, y\}} = \frac{3y'' y'''}{5y'''^2 - 3y'' y^{(4)}}, \tag{82}$$

$$Y - y = f\frac{\operatorname{sen}\{x, x_2\}}{\operatorname{sen}\{x, y\}} = -\frac{3y''(3y''^2 - y'y''')}{5y'''^2 - 3y'' y^{(4)}}.$$

Ogniqualvolta $5y'''^2 - 3y''y^{(4)}$ non vada a zero, questi valori servono a fissare

il centro della conica, e quindi anco il valore e la posizione di f. Nel caso poi di $5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = 0$ il centro passa ad infinita distanza, cioè la conica è una parabola (20), e la direzione del diametro f è sempre determinata dalle formule (16).

Dalle eguaglianze (82) si ottiene colla divisione l'equazione del diametro f od x_2 della conica osculatrice.

$$(83) \qquad y'''(Y-y) + (3y''^2 - y'y''')(X-x) = 0.$$

Questa retta è il diametro d'ogni conica che ha colla data curva nel punto (x, y) un contatto non minore del 3.° ordine. Prendendone la variata prossima successiva rapporto ad x, cioè facendovi variare x d'un incremento infinitesimo, si avrebbe il diametro d'ogni conica che ha colla data curva un contatto di 3.° ordine nel punto $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y)$, e quindi un diametro prossimo al precedente della conica osculatrice nel punto (x, y). In conseguenza la derivata dell'equazione (83) rapporto ad x

$$(84) \qquad y^{(4)}(Y-y) + (5y''y''' - y'y^{(4)})(X-x) - 3y''^2 = 0,$$

combinata colla (83) determina le coordinate X, Y del centro della conica osculatrice: ed infatti se ne ottengono gli stessi valori di $X-x$, $Y-y$ espressi dalle formule (82), e quindi si riproduce il valore già trovato di f (22) sostituendo i valori (82) nella formula

$$f = \sqrt{\left((X-x)^2 + (Y-y)^2 + 2(X-x)(Y-y)\cos\{x, y\}\right)}.$$

Mercè l'eliminazione di x, y fra l'equazione $\varphi(x, y) = 0$ della data curva e le (83) (84), si avrà l'equazione rappresentativa della linea de' centri delle coniche osculatrici.

Questa linea essendo l'inviluppo de' diametri delle coniche osculatrici nei varii punti della curva proposta, ne segue che il diametro f ossia l'asse delle x_2 è tangente alla linea suddetta nel punto (X, Y), e perciò denotando con S l'arco di questa linea de' centri di curvatura conica avremo analogamente alle (13)

$$(85) \qquad \operatorname{sen}\{x, x_2\} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}S}\operatorname{sen}\{x, y\}, \qquad \cos\{x, x_2\} = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}S} + \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}S}\cos\{x, y\},$$

$$\operatorname{sen}\{y, x_2\} = -\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}S}\operatorname{sen}\{x, y\}, \quad \cos\{y, x_2\} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}S} + \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}S}\cos\{x, y\}.$$

Si ottiene poi dalla differenziazione della 1.ª delle formule (82), e dalle 1.ª e 3.ª delle (85), a cagione delle eguaglianze (8) (17),

$$(86) \qquad dX = \frac{y'''(40y'''^2 - 45y''y'''y^{(4)} + 9y''^2y^{(5)})}{(5y'''^2 - 3y''y^{(4)})^2}\, dx,$$

$$dY = -\left(\frac{3y''^2 - y'y'''}{y'''}\right) dX,$$

$$dS = \frac{dX}{y'''} \sqrt{\left(y'''^2 s'^2 - 6(y' + \cos\{x, y\})y''^2 y''' + 9y''^4\right)}.$$

Ma per ridurre la determinazione dell' arco S all' integrazione d' una formula meno complessa, che non contenga derivate di y superiori alla 3.ª, introduciamo i valori del seno e del coseno di $\{x, y_2\}$ (13), e di $\{x, x_2\}$ (85) nelle espressioni di sen $\{x_2, y_2\}$, cos $\{x_2, y_2\}$ desunte dalla 3.ª delle (10), ed avremo

$$\left(\frac{dy dX - dx dY}{ds dS}\right) \operatorname{sen}\{x, y\} = \operatorname{sen}\{x_2, y_2\},$$

$$\frac{dx dX + dy dY + (dy dX + dx dY)\cos\{x, y\}}{ds dS} = \cos\{x_2, y_2\}.$$

Conseguentemente moltiplicando dapprima per sen $\{x, x_2\}$, sen$\{y, x_2\}$, poscia invece per cos$\{x, x_2\}$, cos$\{y, x_2\}$ (85) le differenziali delle equazioni (82), cioè

$$dX - dx = -\frac{1}{\operatorname{sen}\{x, y\}}\left(f\cos\{y, x_2\}d\{y, x_2\} + \operatorname{sen}\{y, x_2\}df\right),$$

$$dY - dy = \frac{1}{\operatorname{sen}\{x, y\}}\left(f\cos\{x, x_2\}d\{x, x_2\} + \operatorname{sen}\{x, x_2\}df\right),$$

e sommando i rispettivi prodotti, attesa la 1.ª delle (10), ed a cagione dell' eguaglianza analoga alla (12)

$$dS^2 = dX^2 + 2dXdY\cos\{x, y\} + dY^2,$$

troveremo

$$(87) \qquad f d\{x, x_2\} = -ds \operatorname{sen}\{x_2, y_2\},$$

$$dS - df = ds\cos\{x_2, y_2\}.$$

Queste eguaglianze si poteano altresì prontamente ottenere co' principj del calcolo infinitesimale applicato alla geometria. Ora avendosi dal prodotto delle (14) (18)

$$\cos\{x_2, y_2\} = -\left(\frac{y'''s'^2 - 3(y' + \cos\{x, y\})y''^2}{y'''s'}\right)\frac{\text{sen}\{y, x_2\}}{\text{sen}\{x, y\}},$$

si deduce dalla 2.ª delle (87), attesa la 1.ª delle (16),

$$(88) \qquad d(S-f) = \frac{(y'''s'^2 - 3(y' + \cos\{x, y\})y''^2)\,dx}{\sqrt{(y'''^2 s'^2 - 6(y' + \cos\{x, y\})y''^2 y''' + 9y''^4)}}.$$

L' integrazione di questa formula è preferibile a quella dell' espressione di dS (35). Ma non si potrebbe eseguire simile integrazione senza assumere una determinata relazione tra x, y, non essendo la formula (88) una differenziale esatta, come si scorge dalla sua forma che non è lineare rapporto alla derivata suprema y'''. Pertanto la linea de' centri di curvatura conica non è in generale rettificabile, qualunque sia la curva proposta.

Dividendo la 1.ª delle (87) per $d\{x, y_2\}$ ne abbiamo (23) (26)

$$\frac{d\{x, x_2\}}{d\{x, y_2\}} = \frac{\rho}{f}\,\text{sen}\{x_2, y_2\} = \frac{h}{f},$$

ossia

$$(89) \qquad \frac{d\{x, x_2\}}{d\{x, y_2\}} = \pm\frac{g^2}{f^2} = -k,$$

e poichè le rette y_2, x_2 sono le rispettive tangenti della data curva, e della linea dei centri delle sue coniche osculatrici, di maniera che $d\{x, x_2\}$, $d\{x, y_2\}$ ne sono i così detti angoli di contingenza o di curvatura ne' punti corrispondenti, si trova che questi due angoli rispettivi hanno il medesimo segno, oppure segni opposti, secondochè la conica osculatrice sia un' ellisse, od un' iperbola.

Mercè la 1.ª e la 2.ª delle (85), avendosi

$$\cot\{x, x_2\} = \frac{1}{\frac{dY}{dX}\,\text{sen}\{x, y\}} + \cot\{x, y\},$$

e quindi

$$d\{x, x_2\} = \frac{dX^2}{dS^2}\,d\frac{dY}{dX}\,\text{sen}\{x, y\},$$

se si differenzi rapporto all' indipendente x il valore del $\frac{dY}{dX}$ desunto dalla 2.ª delle (86), si ottiene

$$(90)\qquad d\,\frac{dY}{dX} = -\frac{y''}{y'''^2}\left(5y'''^2 - 3y''y^{(4)}\right)dx$$

$$d\{x, x_2\} = -\frac{y''}{y'''^2}\left(5y'''^2 - 3y''y^{(4)}\right)\frac{dX^2}{dS^2}\,dx\,\text{sen}\{x, y\}.$$

Conseguentemente chiamato R il raggio del circolo osculatore della linea dei centri di curvatura conica, dalla formula analoga alla (23)

$$R = -\frac{dS}{d\{x, x_2\}},$$

si avrà (87)

$$R = \frac{f\,df}{ds\,\text{sen}\{x_2, y_2\}} + f\cot\{x_2, y_2\},$$

oppure (90)

$$(91)\qquad R = \frac{y'''^2}{y''}\,\frac{dS^3}{dX^3}\cdot\frac{\frac{dX}{dx}}{(5y'''^2 - 3y''y^{(4)})\,\text{sen}\{x, y\}},$$

essendo i valori di $\frac{dS}{dX}$ e di $\frac{dX}{dx}$ determinate dalla 3.ª e dalla 1.ª delle formule (86). Siccome poi, mercè la 3.ª delle (86) e la 1.ª delle (22), troviamo

$$\frac{dS}{dX} = \left(\frac{5y'''^2 - 3y''y^{(4)}}{3y''y'''}\right)f,$$

ne viene

$$(92)\qquad R = \frac{(5y'''^2 - 3y''y^{(4)})^2}{27y''^4y'''\,\text{sen}\{x,y\}}\,f^3\,\frac{dX}{dx}$$

$$= \frac{(40y'''^3 - 45y''y'''y^{(4)} + 9y''^2y^{(5)})f^3}{27y''^4\,\text{sen}\{x, y\}}.$$

Per ottenere le espressioni delle coordinate U, Z del centro di detto circolo osculatore basta ricorrere alle note formule relative ad ogni sistema d'assi comprendenti l' angolo qualunque $\{x, y\}$

$$X-U=\frac{dS^2\left(\frac{dY}{dX}+\cos\{x,y\}\right)}{dXd\frac{dY}{dX}\operatorname{sen}^2\{x,y\}},$$

$$Y-Z=-\frac{dS^2\left(1+\frac{dY}{dX}\cos\{x,y\}\right)}{dXd\frac{dY}{dX}\operatorname{sen}^2\{x,y\}},$$

da cui, mercè la sostituzione dei valori di $\frac{dY}{dX}$ (86), e di $d\frac{dY}{dX}$ (90), si deduce

$$(93)\qquad U=X+\frac{((y'+\cos\{x,y\})y'''-3y''^2)y'''}{(5y'''^2-3y''y^{(4)})y''\operatorname{sen}^2\{x,y\}}\frac{dS^2}{dX^2}\cdot\frac{dX}{dx},$$

$$Z=Y-\frac{((1+y'\cos\{x,y\})y'''-3y''^2\cos\{x,y\})y'''}{(5y'''^2-3y''y^{(4)})y''\operatorname{sen}^2\{x,y\}}\frac{dS^2}{dX^2}\cdot\frac{dX}{dx},$$

essendo dati i valori di $\frac{dS}{dX}$, $\frac{dX}{dx}$ dalle rispettive formule (86), e quelli di X, Y dalle (82).

Si scorge dalle (93) e dalle (86) (82), che le espressioni di U, Z non contengono derivate di y superiori al 5.° ordine. Parimenti si troverebbero espresse mediante le derivate di y inferiori al 6.° ordine le coordinate della linea de' centri delle coniche osculatrici spettanti all'evoluta della curva proposta.

§. 8.

Espressioni delle varie quantità relative alla conica osculatrice d' una curva piana per mezzo de' raggi delle successive evolute di questa curva.

Nella già citata Memoria del sig. Transon sulla curvatura delle linee e delle superficie (Liouville, *Journal de Mathématiques,* T. VI, maggio 1841) si determina la conica osculatrice d' una curva piana, mercè la considerazione della retta che divide per metà l'elemento infinitesimo di detta curva e la corda infinitamente prossima e parallela a questo elemento. La retta richiesta viene denominata dal sig. Transon asse di deviazione, ed è l' oggetto del Problema LXXVI ed ultimo (Sez. VI) della Geometria di posizione del Carnot, di cui si terrà discorso negli ultimi articoli 13.° e 14.° della presente Memoria. È mani-

festo, che l'asse così detto di deviazione non è che il diametro d'ogni conica, che ha un contatto almeno del 3.° ordine colla data curva. In conseguenza siccome la tangente dell' angolo compreso dal diametro d' una conica colla normale a questa curva equivale, secondo l'osservazione del sig. Transon, ad un terzo del raggio osculatore dell' evoluta di detta conica diviso pel raggio del circolo osculatore della conica stessa, egli ha potuto in simil guisa esprimere la tangente dell' angolo compreso colla normale ad una curva qualunque dall' asse di deviazione, ossia dal diametro rispettivo della conica osculatrice e d' ogni conica, che abbia un contatto del terz'ordine colla curva proposta. E poichè l'asse di deviazione nel punto prossimo successivo della data curva è anch' esso un semidiametro della conica osculatrice, di maniera che il centro di questa conica è determinato dall'intersezione del nuovo diametro col prossimo precedente, l'Autore suddetto ne deduce una equazione analoga alla 1.ª delle (87), e quindi ottiene il valore del semidiametro f della conica osculatrice espresso in funzione del raggio osculatore della data curva. L'equazione $g^2 = \pm f\rho \operatorname{sen}\{x_2, y_2\}$ gli serve poscia a dedurre il valore del semidiametro conjugato.

Onde ricavare le formule testè indicate, e tutte quelle che esprimono le varie quantità spettanti alla conica osculatrice in funzioni de' raggi delle successive evolute della curva proposta, denotiamo con ρ_1, ρ_2, ρ_3, ec. i rispettivi raggi osculatori delle evolute successive della data curva, cosicchè essendo ρ il raggio dell' evoluta di questa curva, sia ρ_1 il raggio dell' evoluta di detta evoluta, cioè il raggio dell' evoluta 2.ª della curva primitiva, sia ρ_2 il raggio dell' evoluta 3.ª e così di seguito. Siccome il raggio osculatore ρ_{m+1} dell'evoluta $(m+1)$ esima, il cui arco sia s_{m+1} è sempre perpendicolare al raggio ρ_m della precedente evoluta, che ha per arco s_m, ed inoltre si ha sempre $ds_{m+1} = d\rho_m$, come pure $ds_m = d\rho_{m-1}$, qualora le origini degli archi si assumano in guisa che questi crescano o decrescano co' rispettivi raggi ρ_m, ρ_{m-1}; è perciò manifesto aver luogo l'eguaglianza

$$\frac{d\rho_{m-1}}{\rho_m} = \frac{d\rho_m}{\rho_{m+1}}.$$

Quindi risulta la serie delle note equazioni

$$(94) \qquad \frac{ds}{\rho} = \frac{d\rho}{\rho_1} = \frac{d\rho_1}{\rho_2} = \frac{d\rho_2}{\rho_3} = \ldots\ldots,$$

dalle quali si avrebbe ritenendo ds costante

(95)
$$\rho_1 = \rho \frac{d\rho}{ds}, \quad \rho_2 = \rho \frac{d\rho_1}{ds} = \rho \frac{d\rho^2}{ds^2} + \rho^2 \frac{d^2\rho}{ds^2},$$
$$\rho_3 = \rho \frac{d\rho_2}{ds} = \rho \frac{d\rho^3}{ds^3} + 4\rho^2 \frac{d\rho}{ds}\frac{d^2\rho}{ds^2} + \rho^3 \frac{d^3\rho}{ds^3}.$$

Ora derivando rapporto ad x le formule (12) (25) se ne deduce

$$s's'' = \{y' + \cos\{x, y\}\} y'',$$
$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{s'^3 y''' - 3s'^2 s'' y''}{y''^2 \operatorname{sen}\{x, y\}} = \left(\frac{y''' s'^2 - 3\,(y' + \cos\{x, y\})\, y''^2}{y''^2 \operatorname{sen}\{x, y\}}\right) s',$$

e quindi (18)

(96)
$$\cot\{x_2, y_2\} = \frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds} = \frac{1}{3}\frac{\rho_1}{\rho},$$

come fu già trovato dal sig. Transon, e si tornerà ad avere nel § 12. Conseguentemente risulta

(97)
$$\operatorname{sen}\{x_2, y_2\} = \frac{3\rho}{\sqrt{(9\rho^2 + \rho_1^2)}},$$
$$\cos\{x_2, y_2\} = \frac{\rho_1}{\sqrt{(9\rho^2 + \rho_1^2)}},$$
$$d\{x_2, y_2\} = -\operatorname{sen}^2\{x_2, y_2\}\, d\cot\{x_2, y_2\} = -3\left(\frac{\rho\rho_2 - \rho_1^2}{9\rho^2 + \rho_2^1}\right)\frac{ds}{\rho};$$

e poichè dal differenziare la 3.ª delle (10), a cagione di $d\{x, y_2\} = -\frac{ds}{\rho}$ (23), si deduce

$$d\{x, x_2\} = -\frac{ds}{\rho} - d\{x_2, y_2\},$$

avremo (97)

(98)
$$d\{x, x_2\} = -\frac{ds}{\rho}\left(\frac{9\rho^2 - 3\rho\rho_2 + 4\rho_1^2}{9\rho^2 + \rho_1^2}\right),$$

e dalla 1.ª delle (87) ricaveremo

(99)
$$f = \frac{3\rho^2 \sqrt{(9\rho^2 + \rho_1^2)}}{9\rho^2 - 3\rho\rho_2 + 4\rho_1^2},$$

indi

$$\pm g^2 = \rho f \operatorname{sen}\{x_2, y_2\} = \frac{9\rho^4}{9\rho^2 - 3\rho\rho_2 + 4\rho_1^2},$$

$$fg \operatorname{sen}\{x_2, y_2\} = \frac{27\rho^5}{(\mp(3\rho\rho_2 - 9\rho^2 - 4\rho_1^2))^{\frac{3}{2}}},$$

$$f^2 \pm g^2 = \frac{9\rho^4(18\rho^2 - 3\rho\rho_2 + 5\rho_1^2)}{(3\rho\rho_2 - 9\rho^2 - 4\rho_1^2)^2}.$$

$$h = \pm\frac{g^2}{f} = \frac{3\rho^2}{\sqrt{(9\rho^2 + \rho_1^2)}},$$

$$k = \mp\frac{g^2}{f^2} = -\left(\frac{9\rho^2 - 3\rho\rho_2 + 4\rho_1^2}{9\rho^2 + \rho_1^2}\right).$$

Si avrebbe inoltre (97) dalla 2.ª delle (87)

$$(100) \qquad dS - df = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(9\rho^2 + \rho_1^2)}} = \frac{d\rho}{\sqrt{\left(9 + \frac{d\rho^2}{ds^2}\right)}}$$

ossia (99) (94)

$$dS = \frac{\sqrt{(9\rho^2 + \rho_1^2)}}{(9\rho^2 - 3\rho\rho_2 + 4\rho_1^2)^2}\left\{40\rho_1^3 - 45\rho\rho_1\rho_2 + 9\rho^2\rho_3 + 36\rho^2\rho_1\right\} ds,$$

e in conseguenza dall' equazione

$$R = -\frac{dS}{d\{x, x_2\}}.$$

si verrà ad ottenere (98)

$$(101) \qquad R = \rho\left\{\frac{\sqrt{(9\rho^2 + \rho_1^2)}}{9\rho^2 - 3\rho\rho_2 + 4\rho_1^2}\right\}^3\left(40\rho_1^3 - 45\rho\rho_1\rho_2 + 9\rho^2\rho_3 + 36\rho^2\rho_1\right),$$

ovvero (99)

$$R = \frac{(40\rho_1^3 - 45\rho\rho_1\rho_2 + 9\rho^2\rho_3 + 36\rho^2\rho_1)f^3}{27\rho^5}.$$

Si rileva dalla (96) che la conica osculatrice tocca con un suo vertice la curva proposta ogniqualvolta sia $d\rho = 0$, ma il raggio osculatore in quel punto della data curva non sarà massimo o minimo, se non qualora $d\rho$ muti effettivamente di segno passando dal positivo al negativo, o viceversa, al crescere dell' ascissa.

Dalla 2.ª delle formule (22) avendosi

$$5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = \mp\frac{9y''^2 s'^2}{g^2},$$

se ne deduce, a cagione dell' eguaglianza (25), e mercè la 2.ª delle (99),

$$(102)\qquad 5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = -\frac{s'^8(9\rho^2 - 3\rho\rho_2 + 4\rho_1^2)}{\rho^6 \operatorname{sen}^2\{x, y\}},$$

e quindi si argomenta (20), che la conica osculatrice sarà un' ellisse, un' iperbola, od una parabola, secondochè la quantità

$$(103)\qquad -(9\rho^2 - 3\rho\rho_2 + 4\rho_1^2)$$

sia negativa, positiva, o nulla. Nel caso in cui questa quantità si annulli, non bisogna per ciò argomentare che il semidiametro f (99) cangi di segno, imperocchè è manifesto che esso non può mutar di segno divenendo infinito o nullo, se non qualora la quantità (103) passi dal positivo al negativo, o viceversa.

Il paragone della 2.ª formula (92) colla 2.ª delle (101) esibisce, mercè il valore di y'' desunto dalla (25),

$$(104)\qquad 40y'''^3 - 45y''y'''y^{(4)} + 9y''^2y^{(5)}$$
$$= \frac{s'^{12}}{\rho^9 \operatorname{sen}^3\{x, y\}}\left(40\rho_1^3 - 45\rho\rho_1\rho_2 + 9\rho^2\rho_3 + 36\rho^2\rho_1\right).$$

Di più, siccome dall' eguaglianza (12) si ottiene

$$y' + \cos\{x, y\} = \sqrt{(s'^2 - \operatorname{sen}^2\{x, y\})},$$

si avrà pure dal confronto de' valori (18) (96) di $\cot\{x_2, y_2\}$, mercè la (25),

$$y''' = \frac{s'^4}{\rho^3 \operatorname{sen}^2\{x, y\}}\left(\rho_1 \operatorname{sen}\{x, y\} + \rho\sqrt{(s'^2 - \operatorname{sen}^2\{x, y\})}\right).$$

Queste due ultime eguaglianze e la (25) offrono y', y'', y''' espresse per s' e pei raggi delle evolute 1.ª e 2.ª ρ, ρ_1. Le (102) (104) darebbero altresì $y^{(4)}, y^{(5)}$ in funzione di s', ρ, ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Reciprocamente si potrebbero esprimere i raggi delle successive evolute per mezzo di s' e delle derivate consecutive di y, ma queste formule, del pari che le precedenti, divengono ben presto troppo complesse e non valgono la pena di ricavarle.

§. 9.

Applicazione di alcune delle formule finora esposte alla lemniscata, ed alla spirale logaritmica.

Nell' intraprendere la determinazione del centro di curvatura conica d'una data curva riferita alle coordinate rettilinee, gioverà talvolta ridurre la formula (20) ad alcuno degli aspetti seguenti, pe' quali ne' varii casi si potrà calcolarla con qualche vantaggio di speditezza. Abbiamo infatti denotando col segno D la derivazione relativa all' indipendente x,

$$5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = y'''^2 \left\{ 2 + 3\,\mathrm{D}\,\frac{y''}{y'''} \right\}$$

$$= 2y'''^2 - 3y''^2\mathrm{D}\,\frac{y'''}{y''}\,,$$

e poichè designando coll' iniziale log. il logaritmo iperbolico si trova

$$y''' = y''\,\mathrm{D}\log y''\,,$$

si avrà pure

$$5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = y'''^2 \{ 2 + 3\,\mathrm{D}\,(\mathrm{D}\log y'')^{-1} \}$$

$$= y''^2 \{ 2\,(\mathrm{D}\log y'')^2 - 3\,\mathrm{D}^2\log y'' \}\,.$$

È facile inoltre verificare l' identità

$$(105) \qquad 5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = y''y'''\,\mathrm{D}\{ 5\log y'' - 3\log y''' \}$$

$$= y''y'''\,\mathrm{D}\log\frac{y''^5}{y'''^3} = \frac{y'''^4}{y''^4}\,\mathrm{D}\,\frac{y''^5}{y'''^3}\,,$$

ed altresì l' eguaglianza seguente

$$5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = \frac{y'''^2}{y''}\,\mathrm{D}\left(3\,\frac{y''^2}{y'''} - y' \right),$$

dalle quali si ravvisa, che ne' punti d' una curva piana in cui la curvatura si cangia di ellittica in iperbolica, o reciprocamente (in quanto la formula (20) pas-

sando per zero di negativa si fa positiva, o viceversa) la funzione $\frac{y''^5}{y'''^3}$ assume un valore minimo o massimo, e l'angolo $\{y, x_2\}$ (15), la cui derivata è di segno opposto a quello di $D\left(3\frac{y''^2}{y'''} - y'\right)$, ha un valore massimo o minimo, secondochè y'' sia positivo o negativo, qualora y''' non vada a zero. Potrebbesi pure esporre la formula (20) sotto l' aspetto seguente

$$5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = \frac{9}{2}y''^{\frac{8}{3}}\, D^2\, y''^{-\frac{2}{3}}\,.$$

Abbiasi presentemente la curva

$$(y^2 + x^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0\,,$$

ovvero

$$(y^2 + x^2 + a^2)^2 = a^4 + 4a^2x^2\,.$$

Per determinare il centro di curvatura conica corrispondente a qualsivoglia punto della data curva, e per fissare i punti di curvatura parabolica, si ponga per brevità

$$y^2 + x^2 = \omega\,,$$

e si avrà di mano in mano dall' equazione proposta, mercè le opportune derivazioni,

$$4a^2x^2 = (\omega + a^2)^2 - a^4 = \omega(\omega + 2a^2)\,,$$

$$4a^2y^2 = -\omega(\omega - 2a^2)\,, \qquad 2a^2(x^2 - y^2) = \omega^2\,,$$

$$yy' + x = \frac{2a^2x}{\omega + a^2}\,, \qquad \omega' = 2(yy' + x) = \frac{4a^2x}{\omega + a^2}\,,$$

$$yy' = -\left(\frac{\omega - a^2}{\omega + a^2}\right)x\,, \qquad yy'' + y'^2 + 1 = \frac{2a^6}{(\omega + a^2)^3}\,,$$

$$y^2(y'^2 + 1) = \frac{a^4\omega}{(\omega + a^2)^2}\,, \qquad y^3y'' = -\frac{3}{2}a^4\frac{\omega^2}{(\omega + a^2)^3}\,,$$

$$yy''' + 3y'y'' = -\frac{24a^8x}{(\omega + a^2)^5}\,, \qquad y^5y''' = -\frac{3}{2}a^4.\frac{\omega^2(2\omega - a^2)^2x}{(\omega + a^2)^5}\,.$$

Avendosi quindi

$$\frac{y''^5}{y'''^3} = \frac{9}{4}a^8\frac{\omega^4}{(2\omega - a^2)^6x^3}\,,$$

ne viene

$$D\frac{y''^5}{y'''^3} = -\frac{45}{4}a^8\frac{\omega^4(2\omega+a^2)}{(2\omega-a^2)^7x^4},$$

e conseguentemente, a cagione di

$$\frac{y^8y'''^4}{y'^4} = \frac{(2\omega-a^2)^8x^4}{(\omega+a^2)^8},$$

si otterrà (105)

$$5y'''^2-3y''y^{(4)} = \frac{y'''^4}{y''^4}D\frac{y''^5}{y'''^3} = -\frac{45}{4}a^8\frac{\omega^4(2\omega-a^2)(2\omega+a^2)}{(\omega+a^2)^8y^8}$$

$$= -45.64\,a^{16}\frac{(2\omega-a^2)(2\omega+a^2)}{(\omega+a^2)^8(\omega-2a^2)^4}.$$

Questa espressione non potendo annullarsi per altro valore reale e finito di ω fuorchè per

$$\omega = \frac{a^2}{2},$$

si trova che i punti di curvatura parabolica hanno per rispettive coordinate

$$x = \pm\frac{\sqrt{\omega(2a^2+\omega)}}{2a} = \pm\frac{a\sqrt{5}}{4},$$

$$y = \pm\frac{\sqrt{\omega(2a^2-\omega)}}{2a} = \pm\frac{a\sqrt{3}}{4},$$

e poichè, mentre ω procede da un valore prossimo inferiore ad un valore prossimo superiore ad $\frac{a^2}{2}$, l'espressione di $5y'''^2-3y''y^{(4)}$ passa dallo stato positivo al negativo, si riconosce che i quattro punti di curvatura parabolica esistenti sulla curva proposta dividono questa curva rientrante in quattro tratti od archi continui, due de' quali passano pel centro della curva, ed hanno le ascisse de' loro punti comprese fra $-\frac{a\sqrt{5}}{4}$ ed $\frac{a\sqrt{5}}{4}$, e sono quelli che presentano in ogni lor punto una curvatura iperbolica. Gli altri due tratti hanno una curvatura ellittica, e le ascisse de' rispettivi lor punti sono comprese fra $\pm\frac{a\sqrt{5}}{4}$ e $\pm a\sqrt{2}$, cioè fra le ascisse de' punti parabolici e quelle de' punti limiti della curva sull'asse delle x.

Supposto il sistema degli assi ortogonale, la proposta curva è la lemniscata di Jacopo Bernoulli. In tal caso $\frac{y}{x} = \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$ è la tangente dell'angolo α formato coll'asse delle x dal raggio vettore guidato dal centro ad uno de' due punti di curvatura parabolica, che hanno le coordinate dello stesso segno, oppure ad uno de' due punti parabolici che hanno le coordinate di segno opposto. Conseguentemente risulta

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha} = \frac{1}{4},$$

e quindi descritto dal centro della curva il cerchio di raggio 1, si avrà facilmente col prendere la quarta parte del raggio 1, che ha per direzione l' asse delle ascisse, e coll' elevare dall' estremo di questa lunghezza una perpendicolare all' asse medesimo l' angolo $\pm 2\alpha$ la cui divisione per metà determina l' inclinazione di ciascuna delle due rette che intersecano la lemniscata di Bernoulli ne' punti di curvatura parabolica.

Proseguendo ad applicare alla lemniscata Bernulliana alcune delle formule esposte negli articoli precedenti, coll'avvertenza di porvi l'angolo $\{x, y\} = 90°$, si troverà agevolmente, mercè l' espressioni dianzi dedotte di y', y'', y''' e di $5y'''^2 - 3y''y^{(4)}$, in primo luogo (12)

$$s'^2 = 1 + y'^2 = \frac{a^4\omega}{(\omega + a^2)^2 y^2},$$

indi

$$y'''s'^2 - 3y'y''^2 = \frac{3}{4} \frac{a^8\omega^3 (\omega - 2a^2)x}{(\omega + a^2)^6 y^7} = -3 \frac{a^{10}\omega^2 x}{(\omega + a^2)^6 y^5},$$

$$3y''^2 - y'y''' = -\frac{3}{8} \frac{a^2\omega^3}{(\omega + a^2)^6 y^6} \left\{4\omega^4 - 11a^4\omega^2 - 9a^6\omega - 2a^8\right\}$$

$$= -\frac{3}{8} \frac{a^2\omega^3}{(\omega + a^2)^6 y^6} (\omega - 2a^2)(\omega + a^2)(2\omega + a^2)^2 = \frac{3}{2} \frac{a^4\omega^2 (2\omega + a^2)^2}{(\omega + a^2)^5 y^4},$$

$$y'''^2 s'^2 - 6y'y''^2 y''' + 9y''^4 = y'''(y'''s'^2 - 3y'y''^2) + 3y''^2(3y''^2 - y'y''')$$

$$= \frac{9}{4} \frac{a^{12}\omega^5 (20\omega^2 + a^4)}{(\omega + a^2)^{10} y^{10}},$$

e in conseguenza (18)

$$\cot\{x_2, y_2\} = -\frac{4}{9} \frac{a^2 xy}{\omega^2} = -\frac{2xy}{9(x^2 - y^2)} = -\frac{1}{9} \frac{\sqrt{(4a^4 - \omega^2)}}{\omega};$$

cosicchè, detto u l'angolo formato coll' asse delle ascisse dal raggio vettore guidato dall'origine delle coordinate x, y, ossia dal centro della curva, al punto (x, y), si trova

$$\cot\{x_2, y_2\} = -\frac{1}{9} \operatorname{tang} 2u .$$

Si avrebbe quindi, come pur dalle formule (14) (16),

$$\operatorname{sen}\{x_2, y_2\} = \frac{9\omega}{2\sqrt{(20\omega^2 + a^4)}} ,$$

e dal prodotto de' valori della cotangente e del seno di $\{x_2, y_2\}$ si otterrà

$$\cos\{x_2, y_2\} = -\frac{1}{2} \sqrt{\left\{\frac{4a^4 - \omega^2}{20\omega^2 + a^4}\right\}} .$$

La formula (25) ci offre

$$\rho = -\frac{s'^3}{y''} = \frac{2}{3} \frac{a^2}{\omega^{\frac{1}{2}}} ,$$

ossia detto r il raggio vettore condotto dal centro della lemniscata al punto (x, y),

$$\rho = \frac{2}{3} \frac{a^2}{r} ,$$

donde si rileva che il raggio osculatore è inversamente proporzionale al raggio vettore, ed è terzo proporzionale dopo il raggio vettore e la distanza a dal centro di que' due punti dell' asse delle x, da cui guidati due raggi vettori a qualsivoglia punto della curva si trova, che il loro prodotto è sempre eguale ad a^2. Siccome poi l' equazione polare della lemniscata sarebbe

$$r^2 = 2a^2 \cos 2u ,$$

si avrà pure

$$\rho = \frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{\cos 2u}} .$$

Dall' eguaglianza (96) si avrebbe inoltre

$$\rho_1 = -\frac{2}{9} \frac{a^2 \operatorname{tg} 2u}{r} = -\frac{2}{9} \frac{a \operatorname{tg} 2u}{\sqrt{2\cos 2u}} ,$$

oppure

$$\rho_1 = -\frac{2}{9}\,\frac{a^2\sqrt{(4a^4-\omega^2)}}{\omega^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{9}\,\frac{a^2\sqrt{(4a^4-r^4)}}{r^3}\,.$$

Le formule (22) esibiscono

$$f = \frac{3}{5}\,\frac{a^2\sqrt{\omega(20\omega^2+a^4)}}{4\omega^2-a^4}\,, \qquad g^2 = \pm\frac{9a^4\omega}{5(4\omega^2-a^4)}\,,$$

valendo nella seconda di queste espressioni il segno superiore, o l' inferiore, secondochè la conica osculatrice è un'ellisse, od una iperbola, cioè secondo che ω sia maggiore o minore di $\frac{a^2}{2}$. Si avrebbe quindi per l' ellisse, o per l' iperbola osculatrice

$$f^2 \mp g^2 = \frac{2.3^3a^8\omega}{5^2(4\omega^2-a^4)^2} = \frac{2.3^3a^8r^2}{5^2(4r^4-a^4)^2}\,.$$

Onde conseguire le espressioni delle coordinate pure ortogonali X, Y del centro della conica osculatrice basta ricorrere alle formule (82), donde ricavasi

$$X = \frac{4}{5}x\left(\frac{\omega+2a^2}{2\omega+a^2}\right), \qquad Y = \frac{4}{5}y\left(\frac{\omega-2a^2}{2\omega-a^2}\right).$$

Si avrebbe poi dalla 2.ª delle (86)

$$\frac{dY}{dX} = \text{tang}\left\{x,\, x_2\right\} = \left(\frac{2\omega+a^2}{2\omega-a^2}\right)^2\frac{y}{x}\,.$$

Al valore di $\omega = \frac{a^2}{2}$, e quindi di $x = \pm\frac{a\sqrt{5}}{4}$, corrispondono, come si scorge da queste formule, valori infiniti di Y e di $\frac{dY}{dX}$, ed $X = \pm\frac{a\sqrt{5}}{4}$. Pertanto la direzione dell'ordinata corrispondente a questo doppio valore della X, e di x, è quella d'un assintoto della linea de' centri delle coniche osculatrici, ed è simultaneamente il diametro della parabola osculatrice della lemniscata nel relativo punto di curvatura parabolica.

Nella regione compresa fra questi due assintoti la linea di detti centri è costituita da due tratti indefiniti e simmetrici, le cui ordinate si estendono

da $\pm\infty$ a $\mp\infty$, e che s' intersecano fra loro nel centro stesso della lemniscata, e toccano rispettivamente nel centro gli archi di questa curva, poichè per $x=0$, $y=0$, e quindi per $\omega=0$, risulta

$$\frac{dY}{dX}=\lim\frac{y}{x}=\frac{dy}{dx}\,.$$

In conseguenza i detti due rami della linea de' centri di curvatura conica al pari di quelli della lemniscata s' intersecano fra loro ad angolo retto, e formano coll' asse delle x angoli di 45° presentando nel punto (0, 0) un flesso contrario. Nel rimanente questi due rami infiniti in ambo i versi non offrono alcun punto singolare, e vanno sempre più accostandosi a' rispettivi assintoti rimanendo sempre convessi verso i medesimi. Esteriormente a ciascuno di questi assintoti havvi un pajo di rami infiniti della linea de' centri di curvatura conica. I rami di ciascun pajo sono pure fra loro simmetrici, e sempre convessi verso gli assintoti, e vengono a congiungersi nel rispettivo vertice di detta curva, le cui coordinate corrispondendo a quelle de'vertici della lemniscata $x=\pm a\sqrt{2}$, $y=0$, sono $X=\pm\frac{16}{25}a\sqrt{2}$, $Y=0$. In ciascun di detti vertici la linea de' centri di curvatura conica presenta un punto di regresso della prima specie.

Mercè le formule esprimenti le coordinate X_1, Y_1 dell' evoluta d' una curva piana rispetto ad un sistema d' assi ortogonale, cioè

$$X_1=x-y'\left(\frac{1+y'^2}{y''}\right), \qquad Y_1=y+\frac{1+y'^2}{y''},$$

e per la nota relazione

$$\frac{dY_1}{dX_1}y'+1=0,$$

si rinviene

$$X_1=\frac{(\omega+2a^2)x}{3\omega}=\frac{4a^2x^3}{3\omega^2}=\pm\frac{(2a^2+\omega)^{\frac{3}{2}}}{6a\omega^{\frac{1}{2}}}, \quad Y_1=\frac{(\omega-2a^2)y}{3\omega}=-\frac{4a^2y^3}{3\omega^2},$$

$$\frac{dY_1}{dX_1}=\left(\frac{\omega+a^2}{\omega-a^2}\right)\frac{y}{x},$$

avvertendo che ω è compreso fra o e $2a^2$.

Si scorge da queste formule che mentre ω procede da 0 ad a^2, il valore di X_1 scorre da $\pm\infty$ a $\pm\frac{a\sqrt{3}}{2}$, ed al crescere di ω da a^2 a $2a^2$ X_1 va crescendo numericamente da $\pm\frac{a\sqrt{3}}{2}$ sino a $\pm\frac{2}{3}a\sqrt{2}$, attesochè deducendo l'espressione della derivata di X_1 si riconosce che X_1 ha per minimo valore numerico $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Simultaneamente Y_1 nel primo degli anzidetti intervalli scorre da $\mp\infty$ a $\mp\frac{1}{6}a$, e nell'altro intervallo procede da $\mp\frac{1}{6}a$ a 0, assumendo sempre un segno opposto a quello di y. E poichè $\frac{dY_1}{dX_1}$ ne' due intervalli suddetti procede all' infinito, e scende poscia cambiando di segno dall' infinito a zero, ed $\frac{Y_1}{X_1}=-\frac{y^3}{x^3}$ è sempre compreso fra -1 ed 1, se ne conchiude, che l' evoluta della lemniscata si compone di quattro rami infiniti che hanno per assintoti rispettivi le due tangenti al centro della lemniscata, e cadono nelle due regioni medesime in cui esistono le due porzioni di questa curva. Essi sono fra loro simmetrici rispetto all' asse ed agli assintoti, e ciascuna coppia di questi rami esistenti in una stessa plaga offre nel punto di loro congiunzione sull' asse della curva un regresso della prima specie, che ha per coordinate $X_1=\pm\frac{2}{3}a\sqrt{2}$, $Y_1=0$. I due rami d'una stessa coppia hanno per comune tangente ne' rispettivi punti limiti $\left(X_1=\pm\frac{a\sqrt{3}}{2},\ Y_1=\pm\frac{1}{6}a\right)$ la perpendicolare elevata sull' asse delle x dall' estremità dell' ascissa $x=\pm\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Infine si avrà dalla formula (88)

$$d(S-f)=-\frac{1}{2}a^2\frac{d\omega}{\sqrt{\omega(20\omega^2+a^4)}}=\frac{-a^2dr}{\sqrt{(20r^4+a^4)}},$$

cosicchè l' eccesso dell' arco S della linea de' centri di curvatura conica sul valore di f verrà espresso in funzione del raggio vettore r della lemniscata per mezzo d' una trascendente ellittica di prima specie.

È noto che anche l'arco della lemniscata si esprime per mezzo d'una simile trascendente. Abbiamo infatti

$$ds=dx\sqrt{(1+y'^2)}=\frac{a^2d\omega}{\sqrt{\omega(4a^4-\omega^2)}}=\frac{2a^2dr}{\sqrt{(4a^4-r^4)}}.$$

Ponendo nella formula esprimente $\mathrm{d}(S-f)$

$$r = \frac{a}{\sqrt{2\sqrt{5}}} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi ,$$

per cui si ha

$$\sqrt{(20r^4 + a^4)} = \frac{a^2 \sqrt{(1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi)}}{\cos^2 \frac{1}{2}\varphi}, \qquad \mathrm{d}r = \frac{a}{2\sqrt{2\sqrt{5}}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi},$$

si avrà

$$\mathrm{d}(S-f) = \frac{-a}{2\sqrt{2\sqrt{5}}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi)}} .$$

Se invece si ponga nell' altra formula esprimente $\mathrm{d}s$

$$r = a\sqrt{2} \,.\, \cos\psi ,$$

donde risulta

$$\sqrt{(4a^4 - r^4)} = 2a^2\sqrt{2} \,.\, \operatorname{sen}\psi \,.\, \sqrt{(1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\psi)} , \quad \mathrm{d}r = -a\sqrt{2} \,.\, \operatorname{sen}\psi \,\mathrm{d}\psi ,$$

si avrebbe

$$\mathrm{d}s = - \frac{a\,\mathrm{d}\psi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\psi)}} .$$

Integrando questa formula nella supposizione che l'arco s abbia l'origine al centro della curva, ove $r=0$, $\psi = 90° = \frac{\pi}{2}$, e detto σ il quadrante della lemniscata, il cui estremo corrisponde ad $r = a\sqrt{2}$, $\psi = 0$, si ottiene la nota formula

$$\sigma - s = \int_0^\psi \frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\psi)}} .$$

L' integrazione della formula esprimente $\mathrm{d}(S-f)$ nella supposizione che l' arco S abbia per origine il centro della curva, ove $r=0$, $\varphi=0$, $f=0$, esibisce

$$S - f = - \frac{a}{2\sqrt{2\sqrt{5}}} \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi)}} .$$

Questo integrale può estendersi sino al valore di φ corrispondente ad $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$, per cui S ed f divengono infiniti. Per avere un'espressione di $S-f$

applicabile a' rami esterni della linea de' centri di curvatura conica, si supponga invece l' origine di S nel vertice di detta curva, ove $r = a\sqrt{2}$, $f = \frac{9}{25}a\sqrt{2}$, e detto φ_1 il valore corrispondente di φ si otterrà

$$S - f = \frac{a}{2\sqrt{2\sqrt{5}}}\left\{\int_0^{\varphi_1}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi)}} - \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi)}}\right\} - \frac{9}{25}a\sqrt{2}\,.$$

In quest' ultima formula il valore di φ partendo da $\varphi_1 = 2 \operatorname{arc\,tang} 2\sqrt[4]{5}$ può discendere sino al valore $2 \operatorname{arc\,tang} \sqrt[4]{5}$ che corrisponde ad $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$, e rende il nuovo arco S ed f infiniti. La differenza delle due trascendenti ellittiche di prima specie può ridursi colla nota regola ad una sola trascendente della stessa specie. Per mezzo di dette formule la rettificazione dell' arco S viene a dipendere da quella degli archi della lemniscata.

Allorchè l' arco s d' una data curva sia rettificabile, ovvero sia data l' equazione di questa curva espressa per s e ρ, oppure per ρ e ρ_1, ed anco allorchè i valori di ρ e ρ_1 sieno facilmente esprimibili, mediante una terza quantità indipendente, giova trattare le questioni riguardanti le coniche osculatrici, mercè le formule del § 8. Si può notare a quest' uopo che la formula (103) è deducibile col mezzo d' una derivazione rapporto a ρ, avendosi

$$(106) \qquad -(9\rho^2 - 3\rho\rho_2 + 4\rho_1^2) = \frac{3}{2}\rho^{\frac{11}{3}}\frac{d.\rho^{-\frac{8}{3}}(9\rho^2 + \rho_1^2)}{d\rho}\,.$$

Sia proposta a cagion d'esempio la logaritmica spirale in cui ogni raggio vettore r guidato dal polo forma costantemente colla curva l'angolo $\{r, y_2\} = c$. Assunta per asse la direzione del raggio vettore che ha un dato valore b, e detto u l' angolo formato dal raggio r con quest' asse, si ha per equazione differenziale della spirale logaritmica

$$\frac{r du}{dr} = \operatorname{tang} c\,,$$

e quindi

$$ds = \sqrt{(dr^2 + r^2 du^2)} = \frac{dr}{\cos c}\,,$$

cioè integrando, ed assumendo per origine dell'arco s il punto che ha per raggio vettore b_1,

$$s = \frac{r - b_1}{\cos c_1}.$$

Abbiamo inoltre, chiamato t l'angolo formato dalla tangente alla curva coll'asse,

$$t = c + u, \qquad \rho = -\frac{ds}{dt} = -\frac{ds}{du},$$

e in conseguenza

$$\rho = -\frac{r}{\operatorname{sen} c}.$$

L'eliminazione di r fra le due espressioni di s, ρ ci esibisce

$$\rho = -\frac{1}{\operatorname{sen} c}(s \cos c + b_1), \qquad d\rho = -ds \cot c,$$

donde si ottiene di mano in mano (95)

$$\rho_1 = -\rho \cot c, \quad \rho_2 = \rho \cot^2 c, \quad \rho_3 = -\rho \cot^3 c, \quad \rho_4 = \rho \cot^4 c,$$

e conseguentemente (96) (97) (103)

$$\cot\{x_2, y_2\} = -\frac{1}{3} \cot c,$$

$$\operatorname{sen}\{x_2, y_2\} = \frac{3}{\sqrt{(9 + \cot^2 c)}}, \qquad \cos\{x_2, y_2\} = \frac{-\cot c}{\sqrt{(9 + \cot^2 c)}},$$

$$-(9\rho^2 - 3\rho\rho_2 + 4\rho_1^2) = -(9 + \cot^2 c)\rho^2.$$

Dalla prima di queste formule si può facilmente desumere la direzione della retta x_2 ossia del diametro della conica osculatrice. Imperocchè basta guidare dal polo, o da un altro punto qualunque del raggio vettore r, una perpendicolare alla normale della curva, e prolungarla di un terzo della sua lunghezza, per avere nell'altro estremo un punto spettante al diametro cercato. È perciò manifesto che il diametro della conica osculatrice non potrebbe mai riguardarsi come il raggio riflesso nella supposizione che il raggio vettore sia l'incidente.

L' ultima delle espressioni testè ottenute dimostra, che in ogni punto d'una logaritmica spirale la conica osculatrice è un'ellisse. Questa conclusione si estende sino al polo della data curva ove ρ si annulla con r, poichè avendosi (99)

$$h = \frac{3\rho}{\sqrt{(9+\cot^2 c)}}, \qquad k = 1,$$

l' equazione (1) della conica osculatrice diviene

$$y_2^2 = \frac{3\rho x_2}{\sqrt{(9+\cot^2 c)}} - x_2^2.$$

In conseguenza nel polo della logaritmica spirale la conica osculatrice (1) si riduce ad un punto. Ed infatti risulta pure (99)

$$f = \frac{3\rho}{\sqrt{(9+\cot^2 c)}} = \rho \operatorname{sen}\{x_2, y_2\}, \qquad g = f.$$

Da questi valori si scorge che il semidiametro f ed il suo conjugato sono sempre fra loro eguali e proporzionali a ρ, e quindi al raggio vettore r. Si scorge inoltre, che il valore di f è la projezione ortogonale del raggio ρ di curvatura sulla retta x_2, ossia sulla direzione di f, come doveasi avverare per un noto teorema di Lancret (*Sur les dévéloppoïdes. Mémoires des Savans étrangers à l' Institut de France.* T. II), attesochè essendo l' angolo $\{x_2, y_2\}$ costante, la linea de' centri di curvatura conica della logaritmica spirale diviene una sviluppata imperfetta di questa curva.

L' eccentricità dell' ellisse osculatrice ha per espressione (32)

$$e = f\sqrt{2\cos\{x_2, y_2\}},$$

e i valori de' semiassi maggiore e minore sono

$$a = f\sqrt{2}\,.\cos\frac{1}{2}\{x_2, y_2\}, \qquad b = f\sqrt{2}\,.\operatorname{sen}\frac{1}{2}\{x_2, y_2\}.$$

Siccome poi dalle formule (41) si deduce

$$\cos 2\{y_2, a\} = \cos\{x_2, y_2\}, \qquad \operatorname{sen} 2\{y_2, a\} = -\operatorname{sen}\{x_2, y_2\},$$

e in conseguenza

$$\{y_2, a\} = -\frac{1}{2}\{x_2, y_2\},$$

si comprende che la direzione dell' asse focale è parallela alla retta che divide per metà l' angolo precedentemente assegnato onde fissare la posizione del diametro f.

Ogni evoluta imperfetta della logaritmica spirale è un' eguale linea curva, che ha il medesimo polo, e che forma sempre lo stesso angolo c col raggio vettore. Infatti per la citata proposizione del Lancret, e per l' ottenuta eguaglianza $r = -\rho \operatorname{sen} c$, si comprende che il raggio vettore r, e il raggio l di qualsivoglia evoluta imperfetta della spirale proposta sono corde del circolo che ha per diametro il raggio ρ dell' evoluta ordinaria. Conseguentemente detto r_1 il raggio vettore guidato dal polo al relativo punto dell'evoluta imperfetta risulta

$$\{r_1, l\} = c, \qquad \{r, r_1\} = \{y_2, l\},$$

ossia (2)

$$\{r, r_1\} = -\{l, y_2\} = \pi - \{-l, y_2\}.$$

E poichè dal triangolo che ha per lati r, r_1, l si ottiene

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\operatorname{sen}\{r, l\}}{\operatorname{sen}\{r_1, l\}} = \frac{\operatorname{sen}(\{r, y_2\} + \{y_2, l\})}{\operatorname{sen} c} = -\frac{\operatorname{sen}(\{-l, y_2\} - c)}{\operatorname{sen} c},$$

ed abbiamo inoltre evidentemente

$$u = \{x, r_1\} - \{r, r_1\};$$

dall' equazione polare della spirale proposta

$$r = b_1 e^{u \cot c}$$

si avrà per equazione d' ogni sua evoluta imperfetta

$$r_1 = \frac{b_1 \operatorname{sen}(\{-l, y_2\} - c)}{\operatorname{sen} c} \cdot \frac{e^{\{x, r_1\} \cot c}}{e^{\{y_2, l\} \cot c}},$$

donde si ravvisa che ogni evoluta imperfetta della spirale logaritmica è la stessa spirale ad angolo c. Solo è da notarsi, che quanto più l'angolo $\{-l, y_2\}$ si accosta al valore di c, sempre più si accorcia il tratto dell'evoluta imperfetta corrispondente ad un dato arco della proposta spirale, di maniera che se la retta $-l$ coincide colla direzione di r, ossia se l'angolo $\{-l, y_2\}$ eguaglia l'angolo $c = \{r, y_2\}$, l'evoluta imperfetta si riduce evidentemente ad un punto, che è il polo della data curva.

Se la retta $-l$ coincide colla retta x_2, l'evoluta imperfetta diviene in particolare la linea de' centri di curvatura conica della data logaritmica spirale. Le coordinate ortogonali di questa linea de' centri

$$X = r_1 \cos\{x, r_1\} = -\frac{r \operatorname{sen}(\{x_2, y_2\} - c)}{\operatorname{sen} c} \cos(u - \{x_2, y_2\}),$$

$$Y = r_1 \operatorname{sen}\{x, r_1\} = -\frac{r \operatorname{sen}(\{x_2, y_2\} - c)}{\operatorname{sen} c} \operatorname{sen}(u - \{x_2, y_2\}),$$

risultano appunto dalle (82), allorchè si ponga

$$\{x, y\} = 90^\circ, \quad f = \rho \operatorname{sen}\{x_2, y_2\} = -\frac{r \operatorname{sen}\{x_2, y_2\}}{\operatorname{sen} c},$$
$$\{y, x_2\} = \{x, x_2\} - 90^\circ,$$
$$\{x, x_2\} = \{x, y_2\} - \{x_2, y_2\} = u + c - \{x_2, y_2\}.$$

Il raggio osculatore R di detta linea de' centri di curvatura conica essendo il valore di r_1 corrispondente a $\{-l, y_2\} = \{x_2, y_2\}$ diviso per $-\operatorname{sen} c$ diviene

$$R = \frac{r \operatorname{sen}(\{x_2, y_2\} - c)}{\operatorname{sen}^2 c},$$

ossia

$$R = \frac{r}{\operatorname{sen} c}\left(\operatorname{sen}\{x_2, y_2\} \cot c - \cos\{x_2, y_2\}\right) = \frac{4r \cot c}{\operatorname{sen} c \sqrt{(9 + \cot^2 c)}}$$

$$= -4\rho \frac{\cot c}{\sqrt{(9 + \cot^2 c)}}.$$

Si ha pure analogamente alla formula già trovata $ds = -\frac{d\rho}{\cot c}$ l'eguaglianza

$$dS = -\frac{dR}{\cot c},$$

ossia

$$dS = \frac{4d\rho}{\sqrt{(9 + \cot^2 c)}},$$

donde

$$S = \frac{4\rho}{\sqrt{(9 + \cot^2 c)}} + C.$$

Questi risultati s' accordano con quelli esibiti dalle formule (87) e da quella che precede la (91). Abbiamo infatti dalla 1.ª delle (87)

$$d\{x, x_2\} = -\frac{ds}{\rho},$$

indi dall' altra

$$dS = d\rho \operatorname{sen}\{x_2, y_2\} - \frac{d\rho}{\cot c} \cos\{x_2, y_2\} = \frac{4d\rho}{\sqrt{(9 + \cot^2 c)}},$$

ed infine dall' eguaglianza

$$\frac{ds}{\rho} = \frac{dS}{R},$$

il valore di R dianzi ottenuto.

§. 10.

Applicazioni ad altre curve: cicloide, curva trattoria, catenaria, logistica, parabole cubiche, e curva parabolica del 3.º ordine.

Nella cicloide, il cui cerchio generatore abbia per raggio a, esiste fra l'arco s preso a partire dal vertice e il raggio osculatore ρ la relazione

$$\rho^2 + s^2 = 16\, a^2,$$

purchè la lunghezza dell'arco s non ecceda la metà d' una delle porzioni eguali e simili di detta curva generate colle replicate rotazioni del circolo generatore sopra la base. Infatti le metà di s e di ρ equivalgono alle corde rispettivamente parallele alla tangente ed alla normale della curva che si suppongono guidate dalle estremità del diametro perpendicolare alla base nel circolo generatore fis-

sato alla metà d' una sua rotazione. Che se l' arco s_1 fosse maggiore di $2a$, ossia eguale ad i volte $4a$ più o meno s si avrebbe

$$\pm s = s_1 - 4ia ,$$

e in conseguenza

$$\rho^2 + s_1^2 - 8ias + 16(i^2 - 1)a^2 = 0 ,$$

corrispondendo il numero $\frac{i}{2}$ a quello della porzione di cicloide in cui si considera collocata l'estremità dell' arco s_1. Ma siccome il vertice della curva si può sempre assumere su quest' ultima porzione, e i raggi osculatori tornano ad avere periodicamente gli stessi valori dall' una all' altra porzione della curva, è sufficiente ammettere la predetta equazione per $i = 0$. Abbiamo quindi

$$\frac{d\rho}{ds} = - \frac{s}{\rho} ,$$

e (94)

$$\rho_1 = - s , \quad \rho_2 = - \rho , \quad \rho_3 = s , \quad \rho_4 = \rho , \quad \text{e così periodicamente.}$$

In conseguenza (96) (97) risulta

$$\cot\{x_2, y_2\} = - \frac{1}{3} \frac{s}{\rho} , \quad \text{sen}\{x_2, y_2\} = \frac{3\rho}{\sqrt{(9\rho^2 + s^2)}} = \frac{3\rho}{4\sqrt{(\frac{1}{2}\rho^2 + a^2)}} ,$$

$$\cos\{x_2, y_2\} = \frac{-s}{\sqrt{(9\rho^2 + s^2)}} = - \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{16a^2 - \rho^2}{a^2 + \frac{1}{4}\rho^2}\right)} .$$

Il rapporto $\frac{s}{\rho}$ equivalendo a quello delle due corde poc' anzi indicate corrisponde alla cotangente dell' angolo formato dalla normale alla curva colla base. Avendosi inoltre

$$-(9\rho^2 - 3\rho\rho_2 + 4\rho_1^2) = -8(\rho^2 + 8a^2) ,$$

si riconosce (103), che la cicloide in ogni suo punto ha una curvatura ellittica. Si trova poscia (99)

$$f = \frac{3\rho^2 \sqrt{(\frac{1}{2}\rho^2 + a^2)}}{2(\rho^2 + 8a^2)} ,$$

e dalla (100) avendosi

$$d(S-f)=\frac{\rho d\rho}{4\sqrt{(\frac{1}{2}\rho^2+a^2)}},$$

si ottiene coll' integrazione

$$S=f+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\rho^2+a^2\right)}+C=\frac{4(\frac{1}{2}\rho^5+a^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+8a^2}+C,$$

Si avrebbe pure (101)

$$R=-4\rho\left(\frac{1}{2}\rho^2+a^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{(\rho^2+20a^2)\sqrt{(16a^2-\rho^2)}}{(\rho^2+8a^2)^2}.$$

L' eliminazione di ρ darebbe una relazione fra R, S rappresentante la linea de' centri di curvatura conica. Per avere l' equazione a coordinate ortogonali X, Y (82) di questa curva converrebbe assumere l' equazione a coordinate ortogonali x, y della cicloide riferita al suo vertice

$$y=\sqrt{x(2a-x)}+a \text{ arc cos } \frac{a-x}{a},$$

che ha per derivata

$$y'=\sqrt{\left(\frac{2a-x}{x}\right)}.$$

In questa guisa si avrebbe meno prontamente

$$dS=-\frac{\sqrt{a}}{2}\cdot\frac{(9a-2x)\sqrt{(9a-4x)}}{(3a-a)^2}dx,$$

ed integrando

$$S=\frac{\sqrt{a}}{2}\frac{(9a-4x)^{\frac{3}{2}}}{3a-x}+c,$$

la quale espressione coincide colla anteriore a cagione di

$$\rho=2\sqrt{2a(2a-x)}$$

La curva trattoria *(tractrice)* riferita a due assi ortogonali, mercè le coordinate $x, y,$ ha per equazione differenziale

$$\frac{y\,ds}{dy} = c\,,$$

attesochè la lunghezza della sua tangente intercetta fra la curva e l' asse delle x è costante. Posta l'origine dell'arco s nel punto che ha per ordinata $y = b$, si ottiene dall' integrazione

$$s = c \log \frac{y}{b}\,.$$

Paragonato il valore di $s' = c\,\frac{y'}{y}$ con $s' = \sqrt{(1 + y'^2)}$, si trova

$$y'^2 = \frac{y^2}{c^2 - y^2}\,,$$

e perciò colla derivazione rapporto ad x si deduce

$$y'' = \frac{c^2 y}{(c^2 - y^2)^2}\,.$$

Quindi, a cagione di $s' = \frac{c}{\sqrt{(c^2 - y^2)}}$, risulta

$$\rho = \frac{-s'^3}{y''} = \frac{-c\sqrt{(c^2 - y^2)}}{y} = \frac{-c}{y'}\,,$$

e viceversa

$$y = \frac{c^2}{\sqrt{(\rho^2 + c^2)}}\,.$$

Pertanto troviamo

$$s = c \log \frac{c^2}{b\sqrt{(\rho^2 + c^2)}} = -\frac{c}{2} \log \left(\frac{\rho^2 + c^2}{c^4}\right) b^2\,,$$

cioè

$$ds = -\frac{c\rho\,d\rho}{\rho^2 + c^2}\,,$$

e in conseguenza (94) abbiamo

$$\rho_1 = -\left(\frac{\rho^2 + c^2}{c}\right), \qquad \rho_2 = \frac{2\rho(\rho^2 + c^2)}{c^2}\,,$$

indi (96)

$$\cot\{x_2, y_2\} = -\frac{1}{3}\left(\frac{\rho^2+c^2}{c\rho}\right),$$

e (103)

$$-(9\rho^2 - 3\rho\rho_2 + 4\rho_1^2) = 2\left(\frac{\rho^4 - \frac{11}{2}c^2\rho^2 - 2c^4}{c^2}\right),$$

L' unico valore reale di ρ per cui questa formula va a zero è dato dalla formula

$$\rho^2 = \left(\frac{11+\sqrt{153}}{4}\right)c^2 = \left(\frac{11+3\sqrt{4^2+1}}{4}\right)c^2.$$

Nel punto corrispondente a questo valore di ρ^2 la conica osculatrice è una parabola. Tra questo punto, e quello ove $y = c$, $s = 0$, la curvatura della trattoria sarebbe ellittica, e nel rimanente del ramo infinito la curvatura è iperbolica. Le medesime conclusioni valgono per l' altro ramo della trattoria, che è uguale e simile al precedente, e che ha del pari per assintoto l' asse delle x. Questi due rami si congiungono nel punto in cui $y = c$, ove ha luogo un regresso della prima specie.

Onde conoscere il valore di y corrispondente a quello di ρ, per cui ha luogo il punto di curvatura parabolica, basta introdurre nella (103)

$$\rho^2 = \frac{c^2(c^2 - y^2)}{y^2},$$

per avere

$$-(9\rho^2 - 3\rho\rho_2 + 4\rho_1^2) = \frac{9c^2}{y^4}\left(y^4 - \frac{5}{3}c^2y^2 + \frac{2}{9}c^4\right).$$

De' due valori di y^2 che mandano a zero questa formula è da adottarsi quello che non supera c^2, attesochè non havvi ordinata della trattoria che sia maggiore di c. Troviamo pertanto

$$y = c\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{4^2+1}}{6}\right)}.$$

L' evoluta della trattoria è la catenaria, $Y_1 = \frac{c}{2}\left\{e^{\frac{X}{c}} + e^{-\frac{X_1}{c}}\right\}$, intorno a cui soggiungeremo i cenni seguenti.

Supponendo la catenaria riferita a due assi fra loro ortogonali, la cui origine sia il punto più basso della curva, e che l' asse delle x sia l' orizzontale tangente alla curva nel detto punto, si ha l'equazione

$$y = \frac{1}{2} a \left\{ e^{\frac{x}{a}} + o^{-\frac{x}{a}} - 2 \right\}, \quad \text{donde} \quad y' = \frac{s}{a},$$

in cui la costante a rappresenta il rapporto della tensione orizzontale al peso dell'unità di lunghezza del filo, e l'origine dell'arco s è quella delle coordinate.

Si ha quindi

$$s' = \frac{\sqrt{(a^2+s^2)}}{a}, \qquad \frac{ds}{dy} = \frac{\sqrt{(a^2+s^2)}}{s}, \qquad y = \sqrt{(a^2+s^2)} - a,$$

$$s = \pm \sqrt{(y^2+2ay)}, \qquad y'' = \frac{s'}{a} = \frac{\sqrt{(a^2+s^2)}}{a^2},$$

$$\rho = -\frac{s'^3}{y''} = -\left(\frac{a^2+s^2}{a}\right) = -\frac{(y+a)^2}{a}, \qquad \rho_1 = \frac{\rho d\rho}{ds} = -\frac{2\rho s}{a},$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 d\rho_1}{d\rho} = \frac{2\rho}{a^2}(2s^2 - a\rho) = -\frac{2\rho}{a}(3\rho+2a), \qquad \rho_3 = \frac{8\rho s(3\rho+a)}{a^3},$$

$$-(9\rho^2 - 3\rho\rho_2 + 4\rho_1^2) = -\frac{2\rho^2}{a}\left(\rho + \frac{5}{2}a\right),$$

$$\cot\{x_2, y_2\} = -\frac{2}{3}\frac{s}{a} = -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{(y^2+2ay)}}{a},$$

$$f = \frac{3\rho\sqrt{(5a^2-4a\rho)}}{2\rho+5a}, \qquad \pm g^2 = \frac{9a\rho^2}{2\rho+5a}.$$

Pertanto la catenaria ha una curvatura parabolica allorchè sia

$$\rho = -\frac{5}{2}a,$$

e quindi

$$y = -a + a\sqrt{\frac{5}{2}}, \qquad s = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

In tutto il tratto della catenaria inferiore alla retta parallela all' asse delle x, e distante da quest'asse d'una lunghezza eguale al detto valore di y, la curva ha per conica osculatrice una ellisse, e superiormente alla parallela suddetta i

due rami indefiniti della catenaria simmetrici rispetto all'asse delle y hanno una curvatura iperbolica, sebbene questi rami considerati estesi all'infinito secondo la forma dell'equazione rappresentativa della curva non abbiano assintoti. Per render ragione di simile proprietà basta riflettere, che ogni curva che non sia una parabola, non può avere che qualche punto speciale di curvatura parabolica, e nel rimanente dee presentare una curvatura ellittica od iperbolica nel senso già attribuito a siffatta denominazione.

Volendosi avere il doppio valore di x corrispondente al predetto valore di y, per cui ha luogo il punto di curvatura parabolica, basta desumere dall'equazione della curva

$$dx = \frac{ady}{s} = \pm \frac{ady}{\sqrt{(y^2 + 2ay)}},$$

per ricavare colla integrazione, avvertendo che $x = 0$ quando $y = 0$,

$$x = \pm a \log \frac{y + a + \sqrt{(y^2 + 2ay)}}{a}.$$

Sostituito in questa formula il detto valore di y, si ottiene

$$x = \pm a \log \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Nel punto in cui $s = 0$, cioè nel vertice della curva preso per origine delle coordinate avendosi $d\rho = 0$, si trova che il diametro dell' ellisse osculatrice è normale alla curva, e quindi che questa ellisse ha colla catenaria un contatto del 5.° ordine. Ivi il $d\rho$ cambia di segno con s, e il raggio ρ ha il più piccolo valor numerico.

Avendosi, a cagione di $\tang\{x, y_2\} = y' = \frac{s}{a}$,

$$\text{sen}\{x, y_2\} = \frac{s}{\sqrt{(a^2 + s^2)}}, \qquad \cos\{x, y_2\} = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + s^2)}},$$

$$(y + a)\,\text{sen}\{x, y_2\} = s, \qquad (y + a)\cos\{x, y_2\} = a,$$

si riconosce che l'evolvente della catenaria, allorchè l' origine dello sviluppo è presa nel punto più basso, ossia nel vertice della curva, è la trattoria che ha

per assintoto la parallela all' asse delle x guidata inferiormente alla distanza a, essendo a la lunghezza della tangente intercetta fra la trattoria e l'assintoto.

Le coordinate X_1, Y_1 dell' evoluta della catenaria sarebbero espresse da

$$X_1 = x - y' \frac{(1+y'^2)}{y''} = x \mp \frac{(y+a)\sqrt{y^2+2ay}}{a},$$

$$Y_1 = y + \frac{1+y'^2}{y''} = 2y + a,$$

e poichè dalla seconda di queste equazioni si ottiene $y+a = \frac{Y_1+a}{2}$, si avrebbe per equazione dell' evoluta della catenaria

$$X_1 = \pm a \log \frac{Y_1+a+\sqrt{(Y_1+a)^2-4a^2)}}{2a} \mp \frac{(Y_1+a)\sqrt{(Y_1+a)^2-4a^2)}}{4a}.$$

Più semplice di questa eguaglianza è quella che ha luogo tra il raggio osculatore ρ_1 di detta evoluta ed il suo arco S_1. Imperocchè rimanendo indeterminata l' origine di quest' arco, si avrebbe $-\rho = S_1 + cost.$, e in conseguenza

$$\rho_1 = -\frac{2\rho 5}{a} = 2\,(S_1 + cost.)\sqrt{\left(\frac{S_1 + cost. - a}{a}\right)}.$$

Fissata l' origine dell' arco S_1 nel punto corrispondente al vertice della catenaria, ove $x=0$, $y=0$, $\rho=-a$, si avrà $cost. = a$, e la detta equazione diviene

$$\rho_1 = \frac{2(S_1+a)\sqrt{S_1}}{a}.$$

È da notarsi, che siccome il punto preso per origine dell'arco S_1 è un regresso della prima specie, il valore di S_1 allorchè la sua estremità passa dall' uno all' altro dei due rami infiniti della curva, che vi si congiungono con soluzione di continuità, si dee sempre riguardare come positivo.

Avendosi dalla formula (100)

$$dS - df = \frac{a d\rho}{\sqrt{(5a^2 - 4a\rho)}},$$

se ne deduce coll' integrazione fissando l' origine dell' arco S nel punto corrispondente al vertice della catenaria, in cui $\rho = -a$, $f = -3a$,

$$S = f - \frac{1}{2}\sqrt{(5a^2 - 4a\rho)} + \frac{9}{2}a = \frac{9}{2}a - \left(\frac{5a - 4\rho}{6\rho}\right)f$$

$$= \frac{9}{2}a - \frac{1}{2}\frac{(5a^2 - 4a\rho)^{\frac{3}{2}}}{a(2\rho + 5a)} .$$

Si avrebbe poi dalla (101)

$$R = \frac{-4s(10a + \rho)f^3}{27a^2\rho^2} = \frac{-4(\rho(10a + \rho)(5a^2 - 4a\rho)^{\frac{3}{2}}\sqrt{-a^2 - a\rho}}{a^2(2\rho + 5a)^3} .$$

Questo valore del raggio osculatore R della linea de' centri di curvatura conica risulta del pari dal sostituire nella (92) i valori di y', y'', e quelli delle successive derivate

$$y''' = \frac{s}{a^3}, \qquad y^{(4)} = \frac{\sqrt{(a^2 + s^2)}}{a^4}, \qquad y^{(5)} = \frac{s}{a^5} .$$

Con simile sostituzione si avrebbero dalle (82), a cagione di $\sqrt{(a^2+s^2)} = y + a$, e di $s = \pm\sqrt{(y^2 + 2ay)}$,

$$X = x \pm \frac{3a(y + a)\sqrt{(y + a)^2 - a^2}}{2(y + a)^2 - 5a^2},$$

$$Y = y - \frac{3(y + a)\{2(y + a)^2 + 3a^2\}}{2(y + a)^2 - 5a^2} = -a - \frac{4(y + a)\{(y + a)^2 + 3a^2\}}{2(y + a)^2 - 5a^2} .$$

Ma l' equazione fra X, Y che risulterebbe dall' eliminazione di x, y fra queste due equazioni, e quella appartenente alla catenaria sarebbe ancor più complessa di quella che si può ricavare fra R S, mercè l' eliminazione di ρ fra le equazioni esprimenti R ed S.

Finora negli esempii trattati non abbiamo incontrato che curve dotate di curvatura in parte ellittica ed in parte iperbolica, oppure di curvatura del tutto ellittica. Per trovare una curvatura sempre iperbolica, basta considerare la logaritmica, la prima parabola cubica, e la curva parabolica del terz' ordine. Infatti assumendo l' equazione della logaritmica riferita ad un sistema d' assi ortogonali $y = be^{\frac{x}{a}}$, in cui a è la sottotangente, e b l' ordinata del punto di tragitto sull'asse delle y, abbiamo

$$y' = \frac{b}{a} e^{\frac{x}{a}} = \frac{y}{a}\,, \quad y'' = \frac{y}{a^2}\,, \quad y''' = \frac{y}{a^3}\,, \quad y^{(4)} = \frac{y}{a^4}\,, \quad s'^2 = \frac{a^2 + y^2}{a^2}\,,$$

e quindi (19) (22)

$$k = \frac{2(a^2 + y^2)}{a^2 + 4y^2}\,, \qquad f = \frac{3}{2}\sqrt{(a^2 + 4y^2)}\,, \qquad g^2 = \frac{9}{2}(a^2 + y^2)\,.$$

Essendo k sempre positivo, la curvatura della logaritmica è sempre iperbolica. La cotangente dell' angolo $\{x_2, y_2\}$ avrebbe per valore (18)

$$\cot\{x_2, y_2\} = \frac{a^2 - 2y^2}{3ay}\,,$$

e poichè questo non può annullarsi che per $y = \frac{a}{\sqrt{2}}$, e per $y = \infty$, si rileva che il solo punto della logaritmica vertice della conica osculatrice, escluso il punto estremo ($x = \infty$, $y = \infty$) del ramo infinito mancante di assintoto, è quello che ha per ordinata $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Dalle formule (82) si ricava

$$X = x + \frac{3}{2}\,a\,, \qquad\qquad Y = -2y\,.$$

Conseguentemente avendosi $y = -\frac{Y}{2}$, $x = X - \frac{3}{2}\,a$ si trova, che il luogo de' centri di curvatura conica della logaritmica è un' altra logaritmica che ha un eguale sotto-tangente, ed è rappresentata dall' equazione

$$Y = \frac{-2b}{e^{\frac{3}{2}}}\, e^{\frac{X}{a}}\,.$$

Data la prima parabola cubica, mercè l' equazione a coordinate ortogonali

$$y = \frac{x^3}{a^2}\,,$$

ne raccogliamo

$$y' = \frac{3x^2}{a^2}\,, \quad y'' = \frac{6x}{a^2}\,, \quad y''' = \frac{6}{a^2}\,, \quad y^{(4)} = 0\,, \quad s'^2 = \frac{a^4 + 9x^4}{a^4}\,.$$

Quindi (19) (22) (18)

$$k = \frac{5(a^4 + 9x^4)}{a^4 + 225x^4}$$

(cioè k sempre positivo, e la curvatura sempre iperbolica)

$$f = \frac{(3x\sqrt{a^4+225x^4})}{5a^2}, \qquad g^2 = \frac{9x^2(a^4+9x^4)}{5a^4},$$

$$\cot\{x_2, y_2\} = \frac{a^4 - 45x^4}{18a^2x^2}.$$

Da questi valori di f, g, e di $\cot\{x_2, y_2\}$ si rileva, che al decrescere indefinito di x il centro dell' iperbola osculatrice tende a confondersi col punto (x, y) della data curva, e che la direzione del diametro x_2 si accosta sempre più a quella della tangente y_2, e poichè f, g tendono a ridursi evanescenti, anco l' angolo degli assintoti indefinitamente decresce. Pertanto nel punto $(x=0, y=0)$ ove la parabola cubica proposta ha un flesso contrario, l'iperbola osculatrice si cangia nella tangente alla curva.

Per la seconda parabola cubica $y = \pm\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}$ avendosi

$$y' = \pm\frac{3}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}}, \quad y'' = \pm\frac{3}{4}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}}, \quad y''' = \pm\frac{3}{8}\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}}, \quad y^{(4)} = \pm\frac{9}{16}\frac{x^{-\frac{5}{2}}}{\sqrt{a}},$$

si trova (19)

$$5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = -\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{x^{-3}}{a}, \qquad k = -\frac{16a}{4a+117x},$$

$$h = \pm\frac{3x(4a+9x)}{\sqrt{a}.\sqrt{(4a+117x)}}.$$

Conseguentemente la curvatura è sempre ellittica, e nel punto $(x=0, y=0)$ ove la curvatura presenta un regresso della prima specie, l' ellisse osculatrice si riduce ad un punto, a cagione di $h=0$.

Infine nella curva parabolica di terz' ordine rappresentata dall' equazione a coordinate ortogonali $y = ax + bx^2 + cx^3$ abbiamo

$$y' = a + 2bx + 3cx^2, \qquad y'' = 2b + 6cx, \qquad y''' = 6c, \qquad y^{(4)} = 0,$$

$$5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = 5.36c^2.$$

Quest' ultima quantità essendo una costante positiva, ed s' non potendo annullarsi, si trova (19) che k è sempre quantità finita positiva, e quindi la conica osculatrice è sempre un' iperbola, la quale nel punto che ha per ascissa

$x = -\frac{b}{3c}$ si riduce alla tangente della curva, a cagione di $y'' = 0$, e quindi di $h = 0$, e di f, g evanescenti.

Nel caso $b^2 = 3ac$ questa curva sarebbe la prima parabola cubica. Le conclusioni stabilite circa alle coniche osculatrici delle due parabole cubiche e della curva parabolica di 3.° ordine si estendono alle curve rappresentate dalle equazioni di simil forma a coordinate obbliquangole.

§. 11.

Modo di determinare l' ultima posizione della retta che divide per metà la corda prossima e parallela alla tangente d' una curva piana nel punto per cui si guida la retta richiesta, la quale è diametro della conica osculatrice.

Se immaginiamo che una secante della data curva $\varphi(x, y) = 0$ si muova rimanendo parallela ed accostandosi indefinitamente alla tangente di detta curva in punto qualunque (x, y), la retta che congiunge questo punto col punto medio della corda intercetta sulla secante dell' arco i cui estremi sono circonvicini al punto (x, y), avrà per ultima sua posizione quella del diametro della conica osculatrice. In altri termini, e col linguaggio del calcolo infinitesimale, questo diametro è la retta che divide per metà la corda parallela ed infinitamente prossima alla tangente nel punto (x, y) della curva proposta. Ciò si desume dall'ordine del contatto che ha la conica osculatrice colla data curva, ma si può dimostrare assegnando col metodo de' limiti l'ultima posizione della retta che passa pel punto (x, y) e divide per metà la corda decrescente parallela alla tangente alla data curva nel punto (x, y).

Sia $y = \psi(x)$ l' ordinata di quel ramo della curva proposta che passa pel dato punto (x, y), e sieno $x^{(-1)}$, $y^{(-1)}$; $x^{(1)}$, $y^{(1)}$ le rispettive coordinate de' due punti circonvicini, ne' quali il ramo medesimo è incontrato dalla secante che rimane parallela alla tangente di detta curva nel punto (x, y). A cagione di questo parallelismo avremo (4)

$$\frac{y^{(1)} - y^{(-1)}}{x^{(1)} - x^{(-1)}} = - \frac{\text{sen}\{x, y_2\}}{\text{sen}\{y, y_2\}} = \frac{dy}{dx},$$

ossia

$$\psi(x^{(1)}) - \psi(x^{(-1)}) - \{x^{(1)} - x^{(-1)}\}\psi'(x) = 0. \tag{107}$$

Differenziando questa equazione determinante $x^{(1)}$ in funzione di $x^{(-1)}$ e della x, che si ritiene costante, avremo

$$\frac{dx^{(1)}}{dx^{(-1)}} = \frac{\psi'(x^{(-1)}) - \psi'(x)}{\psi'(x^{(1)}) - \psi'(x)},$$

e poichè questa frazione per $x^{(-1)} = x^{(1)} = x$ si riduce a $\frac{0}{0}$, ne dedurremo, secondo la nota regola, pel valore particolare $x^{(-1)} = x$

$$\frac{dx^{(1)}}{dx^{(-1)}} = \frac{dx^{(-1)}}{dx^{(1)}},$$

ossia

$$\frac{\overline{dx^{(1)}}^2}{\overline{dx^{(-1)}}^2} = 1 \quad , \qquad \frac{dx^{(1)}}{dx^{(-1)}} = \pm 1 \; ;$$

ma siccome è palese che, qualora la tangente alla curva nel punto (x, y) non sia parallela all'asse delle y, le quantità $x^{(-1)}$, $x^{(1)}$ tendono infine ad assumere il valore x l' una per incremento e l' altra per decremento, ne segue che per $x^{(-1)} = x$ risulta

$$\frac{dx^{(1)}}{dx^{(-1)}} = -1, \tag{108}$$

fuorchè nel caso in cui la tangente nel punto (x, y) sia parallela all' asse delle y, cioè nel caso di $\frac{1}{\psi'(x)} = 0$, nel quale si avrebbe sempre $x^{(-1)} = x^{(1)}$ e quindi

$$\frac{dx^{(1)}}{dx^{(-1)}} = 1 .$$

Di più col differenziare due volte l'equazione (107) ritenendo $dx^{(-1)}$ costante troviamo

$$\frac{d^2 x^{(1)}}{d\overline{x^{(-1)}}^2} = \frac{\psi''(x^{(-1)}) - \psi''(x^{(1)}) \frac{d\overline{x^{(1)}}^2}{d\overline{x^{(-1)}}^2}}{\psi'(x^{(1)}) - \psi'(x)},$$

e poichè questa frazione diviene $\frac{0}{0}$ per $x^{(-1)} = x^{(1)} = x$, ne dedurremo pel valore particolare $x^{(-1)} = x$ (108)

$$\frac{d^2 x^{(1)}}{d\overline{x^{(-1)}}^2} = -2 \left\{ \frac{\psi'''(x) + \psi''(x) \frac{d^2 x^{(1)}}{d\overline{x^{(-1)}}^2}}{\psi''(x)} \right\},$$

donde si ricava

$$(109) \qquad \frac{d^2 x^{(1)}}{d\overline{x^{(-1)}}^2} = -\frac{2}{3} \frac{\psi'''(x)}{\psi''(x)},$$

tranne il caso di $\frac{1}{\psi'(x)} = 0$, ossia della tangente parallela all'asse delle y, nel quale dall' eguaglianza che ha sempre luogo fra le quantità $x^{(1)}$, $x^{(-1)}$ risulta

$$\frac{d^2 x^{(1)}}{d\overline{x^{(-1)}}^2} = 0 .$$

Ciò posto chiamando r la retta che congiunge il dato punto (x, y) col punto medio della corda che ha per estremi i due punti $(x^{(-1)}, y^{(-1)})$, $(x^{(1)}, y^{(1)})$, ossia col punto che ha per coordinate

$$\frac{x^{(1)} + x^{(-1)}}{2}, \qquad \frac{y^{(1)} + y^{(-1)}}{2},$$

abbiamo (4)

$$(110) \qquad \frac{y^{(1)} + y^{(-1)} - 2y}{x^{(1)} + x^{(-1)} - 2x} = -\frac{\operatorname{sen}\{x, r\}}{\operatorname{sen}\{y, r\}},$$

e perciò denotando con f l' ultima posizione della retta r, a cui si arriva col rendere $x^{(-1)} = x^{(1)} = x$, troviamo

$$\frac{\operatorname{sen}\{x, f\}}{\operatorname{sen}\{y, f\}} = \lim \frac{\psi(x^{(1)}) + \psi(^{(-1)}) - 2\psi(x)}{x^{(1)} + x^{(-1)} - 2x} .$$

Onde assegnare questo limite, ossia l'ultimo valore della formula (110) corrispondente ad $x^{(-1)} = x$, si osservi che questa formula per $x^{(-1)} = x^{(1)} = x$ si riduce a $\frac{0}{0}$, e in conseguenza risulta

$$\lim \frac{\psi x^{(1)} + \psi(x^{(-1)}) - 2\psi(x)}{x^{(1)} + x^{(-1)} - 2x} = \frac{\psi'(x^{(1)})\frac{dx^{(1)}}{dx^{(-1)}} + \psi'(x^{(-1)})}{\frac{dx^{(1)}}{dx^{(-1)}} + 1};$$

ma siccome questa nuova frazione per $x^{(-1)} = x^{(1)} = x$ diviene anch'essa $\frac{0}{0}$, avremo infine (109) (110), purchè non sia $\frac{1}{\psi'(x)} = 0$,

$$\lim \frac{\psi(x^{(1)}) + \psi(x^{(-1)}) - 2\psi(x)}{x^{(1)} + x^{(-1)} - 2x} = -\left\{\frac{2\psi''(x) - \frac{2}{3}\psi'(x)\frac{\psi'''(x)}{\psi''(x)}}{\frac{2}{3}\frac{\psi'''(x)}{\psi''(x)}}\right\} = \psi'(x) - 3\frac{\overline{\psi''(x)}^2}{\psi'''(x)},$$

ossia

$$(111) \qquad \frac{\text{sen}\{x, f\}}{\text{sen}\{y, f\}} = y' - 3\frac{y''^2}{y'''}.$$

La coincidenza di questa formula colla espressione (8) del rapporto $\frac{\text{sen}\{x, x_2\}}{\text{sen}\{y, y_2\}}$ dimostra che per mezzo d'equazioni conformi alle (10), postavi in luogo della retta x_2 la retta f, si ottengono per valori del seno e del coseno di $\{y, f\}$ quelli del seno e del coseno di $\{y, x_2\}$ (16), e in conseguenza che la retta f richiesta coincide col diametro x_2 della conica osculatrice.

Nel caso di $\frac{1}{\psi'(x)} = 0$, ossia della tangente nel punto (x, y) parallela all'asse delle y, le due funzioni $y^{(1)}, y^{(-1)}$ sarebbero dissimili perchè spettanti a due rami distinti dalla data curva. Queste funzioni che denoteremo con $\varphi(x^{(1)})$, $\chi(x^{(-1)})$ assumono entrambe il valore $\psi(x)$ per $x^{(-1)} = x^{(1)} = x$; ma le loro derivate tendono ad assumere il valore infinito di $\psi'(x)$ con segni opposti, cosicchè il limite della formula (110), cioè $\frac{\varphi'(x) + \chi'(x)}{2}$, si riduce in tal caso alla differenza indeterminata di due quantità infinite. È facile però comprendere che questo valore particolare deesi dedurre anche in simil caso dalla formula (111), avvertendo che la (111) non cangia di forma per qualsivoglia cangiamento delle coordinate x, y in altre coordinate pur rettilinee. Se dunque immaginiamo mutata la direzione dell'asse delle y, la tangente nel punto (x, y) cessa di essere

parallela a quest'asse, e poichè allora ha luogo la formula (111) si conchiude che essa ha pur luogo nel caso di $\frac{1}{\psi'(x)}=0$.

§. 12.

Altra soluzione del problema dianzi proposto nel § 11.

Del resto si può dimostrare anco nel modo seguente la formula (111) per tutti quei casi in cui le funzioni $y^{(1)}=\psi(x^{(1)})$, $y^{(-1)}=\psi(x^{(-1)})$ si possono sviluppare in serie infinita col teorema di Taylor.

Infatti avendosi

$$y^{(1)}=\psi(x+x^{(1)}-x)=\psi(x)+\psi'(x)(x^{(1)}-x)+\psi''(x)\frac{(x^{(1)}-x)^2}{2}+\text{ec.},$$

$$y^{(-1)}=\psi(x+x^{(-1)}-x)=\psi(x)+\psi'(x)(x^{(-1)}-x)+\psi''(x)\frac{(x^{(-1)}-x)^2}{2}+\text{ec.}$$

ne ricaviamo, a cagione della (107) colla sottrazione e colla divisione per $x^{(1)}-x-(x^{(-1)}-x)$, e per $\frac{\psi''(x)}{2}$

$$(112)\quad x^{(1)}+x^{(-1)}-2x=-\frac{\psi'''(x)}{\psi''(x)}\left\{\left(\frac{x^{(1)}-x}{x^{(-1)}-x}\right)^2+\frac{x^{(1)}-x}{x^{(-1)}-x}+1\right\}\frac{(x^{(-1)}-x)^2}{3}$$
$$-\frac{\psi''''(x)}{\psi''(x)}\left\{\left\{\frac{x^{(1)}-x}{x^{(-1)}-x}\right\}^3+\left(\frac{x^{(1)}-x}{x^{(-1)}-x}\right)^2+\frac{x^{(1)}-x}{x^{(-1)}-x}+1\right\}\frac{(x^{(-1)}-x)^3}{3.4}-\text{ec.},$$

e quindi dividendo per $x^{(-1)}-x$, e ponendo $x^{(-1)}=x^{(1)}=x$ rileviamo essere

$$(113)\qquad \lim\frac{x^{(1)}-x}{x^{(-1)}-x}=-1\,.$$

Poscia dalla somma dell' anzidette due serie otteniamo

$$y^{(1)}+y^{(-1)}-2y-\psi'(x)\left\{x^{(1)}+x^{(-1)}-2x\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\psi''(x)\left\{\left(\frac{x^{(1)}-x}{x^{(-1)}-x}\right)^2+1\right\}(x^{(-1)}-x)^2$$
$$+\frac{1}{2.3}\psi'''(x)\left\{\left(\frac{x^{(1)}-x}{x^{(-1)}-x}\right)^3+1\right\}(x^{(-1)}-x)^3$$
$$+\text{ec},$$

e col dividere i due membri di questa equazione pe' rispettivi membri della (112) abbiamo

$$\frac{y^{(1)}+y^{(-1)}-2y}{x^{(1)}+x^{(-1)}-2x}-\psi'(x)=$$

$$-\frac{\frac{1}{2}\psi''(x)\left\{\psi''(x)\left\{\left(\frac{x^{(1)}-x}{x^{(-1)}-x}\right)^2+1\right\}+\frac{1}{3}\psi'''(x)(x^{(-1)}-x)\left\{\left(\frac{x^{(1)}-x}{x^{(-1)}-x}\right)^3+1\right\}\right\}+\text{ec.}}{\frac{1}{5}\psi'''(x)\left\{\left(\frac{x^{(1)}-x}{x^{(-1)}-x}\right)^2+\frac{x^{(1)}-x}{x^{(-1)}-x}+1\right\}+\text{ec.},}$$

e quindi col rendere $x^{(-1)}=x^{(1)}=x$ troviamo, mercè la (113),

$$(114)\qquad \lim\frac{y^{(1)}+y^{(-1)}-2y}{x^{(1)}+x^{(-1)}-2x}=\psi'(x)-\frac{3\psi''(x)^2}{\psi'''(x)},$$

risultato conforme (110) all' espressione (111).

Se fosse richiesta l'ultima posizione della retta r_1 che passando pel punto (x, y) divide la corda parallela e sempre più prossima alla tangente in due segmenti diseguali, che stieno fra loro nel costante rapporto di m ad n, il punto di divisione di questa corda avrebbe per coordinate

$$x^{(-1)}+\frac{m(x^{(1)}-x^{(-1)})}{n},\qquad y^{(-1)}+\frac{m(y^{(1)}-y^{(-1)})}{n},$$

ovvero

$$\frac{mx^{(1)}+nx^{(-1)}}{m+n},\qquad \frac{my^{(1)}+ny^{(-1)}}{m+n},$$

e in luogo dell' eguaglianza (110) si avrebbe

$$\frac{my^{(1)}+ny^{(-1)}-(m+n)y}{mx^{(1)}+nx^{(-1)}-(m+n)x}=-\frac{\text{sen}\{x, r_1\}}{\text{sen}\{y, r_1\}}.$$

Ora il valore di questa formula ossia della frazione

$$\frac{m\psi(x^{(1)})+n\psi(x^{(-1)})-(m+n)\psi(x)}{mx^{(1)}+nx^{(-1)}-(m+n)x},$$

riducendosi a $\frac{0}{0}$ per $x^{(-1)}=x$, $x^{(1)}=x$, ne dedurremo denotando con f_1 l' ultima posizione della retta r_1 corrispondente al valore particolare $x^{(-1)}=x$

$$\frac{\text{sen}\{x, f_1\}}{\text{sen}\{y, f_1\}}=-\psi'(x)=-y',$$

Del paragone di questa espressione, che ha sempre luogo anco nel caso di $\frac{1}{\psi'(x)}=0$, col valore di $\frac{\operatorname{sen}\{x, y_2\}}{\operatorname{sen}\{y, y_2\}}$ desunto dalla (13) si rileva, che la retta richiesta f_1 coincide colla tangente alla curva nel punto (x, y).

§. 13.

Determinazione della retta che divide per metà l' elemento infinitesimo d' una data curva ed una corda infinitamente prossima a questo elemento. Considerazioni intorno alla formula proposta dal Carnot nella sezione VI n.° 433 della Geometria di posizione, che serve alla generale soluzione di detto problema, e determina il relativo diametro della conica osculatrice, allorchè si assuma la condizione del parallelismo della corda colla tangente alla data curva.

Il problema dianzi trattato è il LXXVI ed ultimo (n.° 433, sezione VI) della Geometria di posizione di Carnot. Questo celebre Autore volendo stabilire un sistema di coordinate atto a rappresentare colla mutua loro relazione una curva piana qualunque in un modo assoluto, cioè indipendente da ogni quantità arbitraria e da ogni oggetto esteriore alla curva medesima, propose di adottare a quest' uopo il raggio di curvatura e l' angolo formato dalla tangente alla curva con quella retta che corrisponde al diametro relativo della conica osculatrice, poichè divide per metà sì nella curva che nella conica osculatrice la corda infinitamente vicina e parallela alla tangente. Ma per determinare la posizione di questa retta l' Autore ottenne una formula che a primo tratto si potrebbe credere erronea, poichè non contiene altre differenziali delle coordinate ortogonali x, y della data curva che quelle di 1.° e 2.° ordine, mentre la formula (8) che risolve il problema, racchiude inoltre la derivata 3.ª dell' ordinata. Si potrebbe altresì presumere che l' apparente erroneità della formula di Carnot provenga dal modo con cui viene enunciato nella Geometria di posizione il problema proposto, e quindi dalla soppressione nella relativa figura dell' elemento della curva che rappresenta la direzione della tangente. Infatti per enunciare il problema secondo i principj del calcolo infinitesimale, co' quali il Carnot ne intraprese la soluzione, converrebbe ricercare la retta che divide per metà l'ele-

mento della data curva e la corda infinitesima prossima e parallela al medesimo ovvero alla posizione della tangente.

In simil guisa è d'uopo considerare quattro punti prossimi consecutivi dalla curva proposta, due de' quali sono gli estremi dell' elemento che rappresenta la direzione della tangente; e gli altri due sono estremi della corda infinitamente prossima che si deve per condizione ridur parallela all'elemento della data curva. Ma sebbene nell'enunciato dal problema esibito dal Carnot, come pure nella relativa soluzione, l'elemento della curva, che deesi pur riguardare diviso per metà dalla retta richiesta, si riduca ad un punto assoluto, e quantunque la soppressione de' termini infinitesimi d' ordine superiore al meno elevato eseguendosi ad ogni tratto nel corso della deduzione, anzichè venir riservata all'equazione finale, possa dar luogo a qualche incertezza, nondimeno dopo un' attenta analisi della questione si riconosce che la formula (E) pag. 479 sez. VI della Geometria di posizione serve a risolvere il predetto problema LXXVI, purchè vi s'introduca la condizione del parallelismo della corda infinitamente prossima coll' elemento della data curva ossia colla tangente. Nè dee recar meraviglia che sia mestieri di tener conto di simile condizione per dedurre dalla formula del Carnot la compiuta determinazione della retta richiesta, benchè nella dimostrazione di quella formula il Carnot abbia supposto che la corda sia parallela alla tangente. Imperocchè mostreremo fra poco che quella formula ha luogo senza mestieri di supporre il parallelismo della corda colla tangente od altra condizione speciale circa alla posizione della corda infinitamente prossima alla tangente, e quindi concluderemo che la formula del Carnot offre la soluzione del problema finchè non si stabilisce la legge con cui succedono i quattro punti, che costituiscono gli estremi dell'elemento della data curva e della corda infinitamente prossima, ossia finchè non si attribuisca alla corda medesima una speciale posizione coll'assumere una relazione fra le differenziali delle quantità spettanti alla curva od una particolare supposizione intorno ad alcuna di queste differenziali che nella formula del Carnot si considerano tutte come variabili.

Rappresentiamo nell' annessa figura

con AB l'elemento ds dell'arco s della data curva, che ha per estremo il punto proposto A riferito a due assi qualunque, mercè le coordinate x, y.

Sia C il punto prossimo successivo a B della curva medesima, e D quello che immediatamente precede A. Sarà CD la corda infinitamente prossima all'elemento AB, che si suppone divisa per metà, del pari che AB, dalla richiesta EF. Dicasi α l' elemento infinitesimo di 1.° ordine AD, si chiamino β, γ le quantità angolari infinitesime di 1.° ordine DAK, CBH e si denoti con λ l' angolo cercato FEB. Infine immaginiamo abbassate da' punti D, F, C sulla tangente AB della data curva le perpendicolari DK, FG, CH. Per le dottrine elementari del calcolo infinitesimale applicato alla geometria avremo, designando con ρ il raggio osculatore della data curva relativo ad A,

$$(115) \qquad \alpha + d\alpha = ds \qquad \beta + d\beta = \gamma = \frac{ds}{\rho}$$

$$BC = ds + d^2 s,$$

poscia otterremo ad evidenza

$$EG = \frac{1}{2} KH - KA - \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} (BH - KA)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ (ds + d^2 s) \cos\gamma - \alpha \cos\beta \right\}$$

$$FG = \frac{1}{2} (KD + CH) = \frac{1}{2} (\alpha \operatorname{sen}\beta + (ds + d^2 s) \operatorname{sen}\gamma)$$

$$FG \cot\lambda = EG \,,$$

e passando a' valori variati prossimi avremo pure (115)

$$EG + d\,.\,EG = \frac{1}{2} \Big((ds + 2d^2 s + d^3 s) \cos(\gamma + d\gamma) - ds \cos\gamma \Big)$$

$$FG + d\,.\,FG = \frac{1}{2} \Big(ds \operatorname{sen}\gamma + (ds + 2d^2 s + d^3 s) \operatorname{sen}(\gamma + d\gamma) \Big)$$

$$\left\{ FG + d\,.\,FG \right\} \left\{ \cot\lambda + d \cot\lambda \right\} = EG + d\,.\,EG \,.$$

Quindi sostituendo nell' ultima eguaglianza i valori variati infinitamente prossimi di EG, FG, e ritenendo i soli termini infinitesimi dell' ordine meno ele-

vato facili a scorgersi, mercè gli sviluppi de' seni e coseni per le potenze degli archi, si otterrà l' equazione finale

$$\gamma \, ds \cot\lambda = d^2 s ,$$

donde risulta pel noto valore di γ (115) la formula

$$(116) \qquad \cot\lambda = -\frac{\rho d^2 s}{ds^2} ,$$

la quale a cagione delle eguaglianze (12) (25) diviene

$$(117) \qquad \cot\lambda = \frac{dx d^2x + dy d^2y + (dx d^2y + dy d^2x)\cos\{x, y\}}{(dx d^2y - dy d^2x)\,\text{sen}\{x, y\}} ,$$

e nel caso in cui il sistema delle coordinate x, y sia ortogonale si presenta sotto l' aspetto

$$(118) \qquad \cot\lambda = \frac{dx d^2x + dy d^2y}{dx d^2y - dy d^2x} ,$$

a cui si riduce la relativa formula (E) della Geometria di posizione del Carnot.

Pertanto la formula (116), e quindi nel caso delle coordinate rettilinee ortogonali anco quella del Carnot, risolve il problema proposto finchè non si stabilisca alcuna legge o condizione sul modo con cui si succedono i punti fra loro estremamente prossimi D, A, B, C, ossia sulla posizione speciale della corda DC, purchè da simile condizione l'angolo formato delle due rette DC, AB che ha per tangente $\frac{CH - DK}{KH}$ risulti un infinitesimo non inferiore al 2.° ordine. Questa speciale posizione della corda infinitesima DC verrà fissata coll' assumere una qualunque ipotesi intorno ad alcuna delle differenziali delle coordinate e dell' altre quantità spettanti alla curva, oppure una relazione qualunque fra alcune di dette differenziali, senza di che la formula (116) ovvero la (117) sarebbe indeterminata nel suo valore, cioè non avrebbe una precisa significazione.

Così se si voglia che la corda DC sia parallela alla tangente, come viene richiesto nel problema del Carnot, converrà assumere quella relazione differenziale che risulta dall' eguaglianza delle due rette DK CH, cioè

$$\alpha \,\text{sen}\,\beta = (ds + d^2 s)\,\text{sen}\,\gamma .$$

Prendendo la variata infinitamente prossima di questa eguaglianza, che sarebbe (115)

$$ds \operatorname{sen} \gamma = (ds + 2d^2 s + d^3 s) \operatorname{sen} (\gamma + d\gamma)$$

e ritenuti, come è d' uopo, i soli termini infinitesimi dell' ordine meno elevato, abbiamo la condizione che si deve associare alla (116) onde risolvere compiutamente il detto problema, cioè

$$2\gamma d^2 s + d\gamma ds = 0 ,$$

la quale pel noto valore di γ (115) diviene

$$d\rho ds - 3\rho d^2 s = 0 ,$$

e ci offre coll' eliminazione del $d^2 s$ dalla (116)

$$\text{(119)} \qquad \cot \lambda = -\frac{1}{3} \frac{d\rho}{ds} .$$

In conseguenza prendendo la tangente AH per asse delle y_2, ed avvertendo (2) che l'angolo λ ossia $\{y_2, \text{EF}\}$ equivale a $-\{\text{EF}, y_2\}$, otteniamo, mediante la 1.ª delle eguaglianze (95),

$$\cot \{\text{EF}, y_2\} = \frac{1}{3} \frac{\rho_1}{\rho} ,$$

che è appunto la formula (96) trovata dal sig. Transon per determinare la direzione del diametro della conica osculatrice ossia dell' asse di deviazione, e quindi si riconosce che questo diametro è appunto la retta EF che si ricerca nel problema di Carnot.

§. 14.

Altra dimostrazione della formula di Carnot. Discussione sul modo di assegnare in generale la retta che divide in dati rapporti l' elemento d' una curva piana e la corda infinitamente prossima al detto elemento. Osservazioni spettanti a' casi in cui nella formula del Carnot si assume costante l' elemento dell' arco della data curva, oppure la differenziale d' una delle coordinate.

La dimostrazione della formula (116) si potrebbe del pari dedurre supponendo che il punto dato sia D e che DA, AB, BC siano tre elementi consecutivi della curva proposta espressi da ds, $ds+d^2s$, $ds+2d^2s+d^3s$. Allora l' angolo di contingenza sarebbe $\beta = -\frac{ds}{\rho}$ e l' angolo HEF sarebbe il valore variato $\lambda + d\lambda$ di quello formato coll' elemento DA ossia colla tangente alla curva dalla retta richiesta, che divide per metà l' elemento DA e la corda infinitamente prossima ad esso. Si avrebbe quindi dalla stessa figura dianzi indicata

$$EG = \frac{1}{2}(BH - KA) = \frac{1}{2}\left\{(ds+2d^2s+d^3s)\cos(\beta+d\beta) - ds\cos\beta\right\}$$

$$FG = \frac{1}{2}(KD + CH) = \frac{1}{2}\left\{ds\,\mathrm{sen}\,\beta + (ds+2d^2s+d^3s)\,\mathrm{sen}(\beta+d\beta)\right\}$$

$$FG\left\{\cot\lambda + d\cot\lambda\right\} = EG\,,$$

ed introdotti in quest' ultima eguaglianza i valori di EG, FG, poscia immaginando sviluppati i seni e coseni secondo le potenze degli archi, e ritenendo i soli termini infinitesimi dell' ordine meno elevato, si giungerà all' equazione

$$\beta\, ds \cot\lambda = d^2s\,,$$

ossia

$$-\frac{ds^2}{\rho}\cot\lambda = d^2s\,,$$

donde risulta il valore già trovato (116) di $\cot\lambda$,

Onde esprimere la condizione del parallelismo della corda infinitamente

prossima all'elemento DA colla tangente alla curva nel punto dato, basta determinare l' eguaglianza delle distanze dalla tangente medesima degli estremi di detta corda collo stabilire l'eguaglianza delle DK, CH che sono i valori variati prossimi delle anzidette distanze.

Rejetti da questa eguaglianza i termini infinitesimi d' un ordine superiore al meno elevato si ottiene

$$2\beta d^2 s + d\beta ds = 0 ,$$

ossia a cagione di $\beta = -\frac{ds}{\rho}$

$$d\rho ds - 3\rho d^2 s = 0 ,$$

cioè la stessa condizione anteriormente dedotta, per cui dalla formula (116) si passa alla espressione (119).

Ove fosse richiesta in generale la retta che divide l' elemento dell' arco d'una data curva nel rapporto di p a q e la corda infinitamente prossima a questo elemento nel rapporto di m ad n, si avrebbe dalla stessa figura e secondo i principj testè enunciati

$$FG = DK_1^2 + \frac{m}{m+n}(CH - DK) = \frac{n.DK + m.CH}{m+n}$$

$$= \frac{n ds \operatorname{sen} \beta + m(ds + 2d^2 s + d^3 s) \operatorname{sen}(\beta + d\beta)}{m+n}$$

$$KG = \frac{m}{m+n} KH = \frac{m}{m+n} \left\{ ds\cos\beta + ds + d^2 s + (ds + 2d^2 s + d^3 s)\cos(\beta + d\beta) \right\}$$

$$EG = KG - KA - AE$$

$$= \frac{m(ds + 2d^2 s + d^3 s)\cos(\beta + d\beta) - n ds \cos\beta}{m+n} + \left(\frac{m}{m+n} - \frac{p}{p+q}\right)(ds + d^2 s)$$

$$EG \left\{ tg\,\lambda + d\, tg\,\lambda \right\} = FG .$$

Quindi si scorge che mentre FG è sempre un infinitesimo di 2.° ordine, EG risulta in generale un infinitesimo di 1.° ordine, e conseguentemente $tg\,\lambda$ sarebbe pure un infinitesimo di 1.° ordine, purchè non sia

$$\frac{2m - n}{m+n} - \frac{p}{p+q} = 0 .$$

Ma quando si verifichi questa eguaglianza, cioè quando sia

$$\frac{m}{n} = \frac{2p+q}{2q+p},$$

ovvero

$$\frac{p}{q} = \frac{2m-n}{2n-m},$$

allora dall' ultima delle superiori eguaglianze, ritenendovi i soli termini dell'ordine meno elevato, abbiamo di nuovo

$$d^2s \,.\, \mathrm{tg}\lambda = \beta ds = -\frac{ds^2}{\rho},$$

ossia

$$\cot\lambda = -\frac{\rho d^2 s}{ds^2},$$

cioè la stessa espressione (116).

Possiamo quindi arguire che, secondo il concetto del calcolo infinitesimale applicato alla geometria, la retta che divide l' elemento ds d' una curva nel rapporto $\frac{p}{q}$ e la corda infinitamente prossima nel rapporto $\frac{2p+q}{2q+p}$, ovvero questa corda nel rapporto $\frac{m}{n}$, e l'elemento ds nel rapporto $\frac{2m-n}{2n-m}$, forma sempre colla tangente alla curva l' angolo λ determinato dalla formola (116). Ogni altra divisione non offre una retta diversa dalla tangente della curva.

Se i due rapporti $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ debbono essere eguali, la condizione

$$\frac{2m-n}{m+n} - \frac{p}{p+q} = 0,$$

per cui EG diviene un infinitesimo del 2.° ordine, non si verifica se non qualora sia $m = n$, cioè quando la retta richiesta divide per metà anco la corda infinitamente prossima all'elemento ds. Altrimenti $\mathrm{tg}\lambda$ e quindi λ sarebbe un infinitesimo del 1.° ordine, lo che si accorda colla conseguenza già dedotta (§ 12) che l'ultima posizione della retta, la quale divide in dato rapporto $\frac{m}{n}$ la corda che si muove rimanendo parallela alla tangente finchè giunga a coincidere colla

tangente medesima, ha la stessa direzione della tangente fuorchè nel caso in cui m ed n siano fra loro eguali.

L' unica supposizione assunta dal Carnot onde applicare la sua formula ad un caso speciale è quella del ds costante. *(Géom. de position,* n.° 434.) Ma perchè questa ipotesi non fosse discorde da quella del parallelismo della corda colla tangente, gli fu mestieri supporre costante anco l' angolo di contingenza $-\frac{ds}{\rho}$ e quindi il raggio ρ di curvatura, nel qual caso la data curva si riduce ad un cerchio.

Ora, omettendo la condizione del parallelismo anzidetto, si può supporre ds costante per una data curva qualunque, cioè riguardare eguali gli elementi infinitesimi compresi da quattro punti prossimi successivi D, A, B, C, e deducendo in conseguenza dalla (116) $\cot\lambda = 0$, si trova che nella detta supposizione la retta richiesta è perpendicolare alla tangente di qualsivoglia curva proposta.

Assumeremo in fine dx costante onde poter facilmente verificare il risultato desunto dalla formula del Carnot con quello che ci offre l' inspezione della figura allorchè vi si guidino le coordinate de' quattro punti D, A, B, C. Imperocchè l' intercetta da queste successive ordinate sull' asse delle x essendo la costante dx, ne viene che il segmento della corda DC compreso fra il punto D, e l' ordinata di A eguaglia il segmento della corda medesima compreso fra il punto C e l' ordinata di B, cosicchè la retta richiesta, che divide per metà l' elemento AB e la corda DC, è quella stessa che divide per mezzo il segmento della corda DC compreso fra le coordinate de' punti A, B, e quindi è parallela all' asse delle y. Ora dalla formula (117) abbiamo nell' ipotesi del dx costante

$$\cot\lambda = \frac{dy + dx\cos\{x, y\}}{dx\,\mathrm{sen}\{x, y\}},$$

ossia

$$\cot\{y_2, \mathrm{EF}\} = \frac{y' + \cos\{x, y\}}{\mathrm{sen}\{x, y\}},$$

e quindi (2)

$$\cot\{\mathrm{EF}, y_2\} = -\frac{y' + \cos\{x, y\}}{\mathrm{sen}\{x, y\}}.$$

Ma questa è l' espressione di $\cot\{y, y_2\}$ (13), dunque la retta EF è paral-

lela all'asse delle y, come venne dianzi osservato. Se invece del dx si assuma costante dy, si troverà del pari che la retta richiesta è parallela all' asse delle ascisse.

Dalle formule esposte nei §§ 9, 10 si può facilmente raccogliere le equazioni fra le due coordinate suggerite dal Carnot, cioè ρ, $\cot\{x_2, y_2\}$, che rappresentano le varie curve considerate in quelle applicazioni. Le relazioni fra queste due coordinate risultano abbastanza semplici per la lemniscata, la spirale logaritmica, la cicloide, la curva trattoria e la catenaria; ma sarebbero alquanto complesse riguardo alla logistica, alle due parabole cubiche, ed alla curva parabolica del 3.° ordine.

Nota. Durante la stampa della presente Memoria, ho potuto rilevare, che negli elementi di calcolo differenziale ed integrale del prof. F. P. Tucci (Napoli, 1850), viene esibita la formula valevole ad assegnare l' inclinazione alla tangente della retta, che divide per metà la corda infinitesima parallela alla tangente in un punto qualunque di data curva piana, e conobbi che questa formula era già stata dedotta dal medesimo autore nelle sue ricerche analitiche sulla somiglianza delle curve (Napoli, 1825). Egli reputa fallace la formula (E) del Carnot perchè colla sostituzione del valore di $d^2y = y'' dx^2 + y' d^2x$, nell' ipotesi del dx variabile, non ne spariscono le differenziali della x, e in conseguenza la formula suddetta non ha una determinata significazione. Ma ciò vale appunto a provare che la formula del Carnot non può applicarsi ad una particolare posizione della tangente, senza stabilire la condizione od ipotesi relativa. Ed infatti, sebbene il Carnot l'abbia conseguita considerando la corda parallela alla tangente, con un metodo non esente da oscurità ed incertezza, si è dimostrato ch' essa si presta alla generale soluzione del problema, qualunque sia la posizione della corda infinitesima rispetto alla tangente, e serve ad assegnare la retta dividente nel caso della corda parallela alla tangente, qualora alla formula (116) si associi la condizione del parallelismo richiesto.

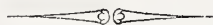
(*Letta il giorno* 19 *febbrajo* 1854).

DELLA

PIANTAGIONE DEL FRUMENTO

NEGLI ANNI DI CARESTIA

MEMORIA

DEL M. E. CAV. D.[R] AGOSTINO FAPANNI

Tutti i grandi avvenimenti, tutti i grandi infortunii, siano essi prodotti o da cause morali, o da perturbazioni atmosferiche, hanno un qualche esempio nella storia. Fortunati quelli, che sanno ammaestrarsi alla scuola del passato, per bene regolarsi nel presente e nell' avvenire: e in analogia di sventure procacciare analoghi rimedii, se non a vincerne, a ripararne almeno in parte le fatali conseguenze. Questo è ciò, che l'agricoltore deve sempre studiarsi di conseguire colla sua antiveggenza e colla sua industria. Sopra tale principio è basata la Memoria, che ho l' onore di leggere oggi a questo i. r. Istituto.

Negli anni nefasti 1814, 1815, 1816, sconsolatissimi per avverse stagioni, per conseguente carestia, per guerra universale, per tifiche malattie, la scarsezza di ogni prodotto del suolo, e specialmente quella de' grani, saliti ad un prezzo esorbitante, indusse e sospinse per necessità e proprietarj e coloni a praticare con più diligenza la coltivazione del frumento, ch' è la pianta più preziosa, più utile, più nutritiva per l'uomo, e che forma il più bel dono ad esso impartito dalla Provvidenza.

Fu in quel disavventuroso triennio, che anch' io mi diedi a tutt' uomo a studiare i modi, onde rendere più proficua la cultura del frumento, di cui era

in tutta Europa grande diffalta. Gli studii e le indagini praticate mi fecero conoscere un rusticano strumento detto *piantatore,* o meglio *piantatoio*, col quale da due anni a quella parte un buon veterano amatore delle cose agrarie era solito a piantare il frumento in un suo poderetto, con rilevante risparmio di semente, e con largo aumento di prodotto. La vista e l' esame di quello strumento, e le informazioni datemi dall' amico coltivatore del buon effetto del medesimo mi determinarono a procacciarmene uno simile: e fu nell'ottobre 1814, che potei sperimentare per la prima volta il nuovo piantatoio.

Di questo stromento mi valsi nei due anni consecutivi 1815, 1816, per la seminagione del frumento in due differenti pezzi di buona terra, di prima classe censuaria, della dimensione ciascun pezzo di mezzo campo a misura trevigiana, corrispondente a tornature 0, 26, 02, 34, in Martellago distretto di Mestre, provincia di Venezia, e n'ebbi il prodotto il primo anno di venti sementi per una, il secondo di ventuna, il terzo di ventidue per ogni semenza; notando, che le seminagioni autunnali furono in cadaun anno perseguitate da pioggie incessanti, che non permisero di eseguirle regolarmente.

Nel susseguente quinquennio, dopo la carestia del 1816, essendo ritornata l' abbondanza delle ricolte di ogni sorte di grani, il loro prezzo decadde niente meno che di due terzi, e fe' sì che proprietarii e coloni, quasi nuotando nell' abbondanza delle vettovaglie, dimenticassero, ed io pur con essi, le premure usate per ottenere copiosi prodotti di grani.

Ma il malaugurato anno 1853, in cui il frumento ed il mais non diedero neppur la metà della solita messe, e in cui fallì del tutto la vendemmia, ammalate per la terza volta le uve dalla crittogama, ci fe' tutti rinsavire, e pensare più seriamente agli espedienti, onde minorare, se non vincere, tanta stretta di biade, e tanta inopia di cose necessarie all' umano sostentamento.

L' alto prezzo di aust. lire 30, con cui si vendeva il frumento allo stajo trevigiano nell' ottobre 1853, mi richiamò alla memoria gli esperimenti, che io avea fatto da circa quarant'anni addietro, per seminare il frumento col piantatoio: quindi lo feci staccare dal soppalco della stanza dei rusticali strumenti, ove pendeva inoperoso; come si vedono pendere polverose negli atrii de' magnatizi palagi le guerresche armature degli antichi tempi feudali.

E qui prima di fare la descrizione del piantatoio, da me adoperato a sparmio di semente nel prossimo decorso ottobre, porgerò alcuni cenni della prima origine sì de' piantatoi, che de' seminatoi da frumento, istrumenti ambidue, che

se non nacquero contemporanei, furono prodotti da cause pressochè eguali, ed hanno fra loro una grandissima correlazione. Queste cause riduconsi essenzialmente a tre, e sono: 1.° risparmio di semente, oggetto assai rilevante negli anni di caro prezzo della medesima; 2.° eguale e regolare distribuzione de' grani sul suolo, collocandoli ad una stessa distanza fra loro, affine di poter coltivare e sarchiare, quando occorra, le germogliate e cresciute pianticelle; 3.° sotterramento de' semi medesimi, ad opportuna ed eguale profondità nel terreno, acciocchè non restino esposti, al di sopra del suolo, all' intemperie della stagione, ed al guasto degli animali; ovvero, se troppo profondamente coperti di terra, questa li soffochi, ed impedisca loro di germinare. Fu adunque per ottenere questo triplice scopo, che s' inventarono i due suaccennati istrumenti.

Pare che l' invenzione del seminatoio abbia prevenuto quella del piantatoio. Vuolsi da alcuni, che l'autore del primo seminatoio sia stato lo spagnuolo don Giuseppe Lucatello; altri attribuiscono questo trovato all' inglese M.r Tull. Il conte Filippo Re, sempre giusto propugnatore delle glorie italiane, anche in fatto di agricoltura, dà il merito a messer Cavallina di Bologna di aver il primo ideato nel secolo XVII un tale ordigno, che fu poi riformato dal padre Lana, e richiamato in onore al principio del passato secolo dal marchese del Borro. Verso la metà del secolo stesso vi fu grande fervore per costruire e diffondere i seminatoi da grano, considerandoli tali da costruire uno dei più notevoli miglioramenti dell' agricoltura moderna. Inglesi e Francesi andarono a gara per fornire l' economia campestre di detti ordigni. Fu a quell' epoca, che Chateauvieux e Duhamel du Monceau travagliarono intorno a' medesimi. Nè operarono con minor calore i nostri Italiani, chè Gio. Battista Ratti corresse il seminatoio di Chateauvieux riformato da Duhamel. L' esempio di questo benemerito piemontese, e del toscano padre Lastri, animò anche gli agronomi delle provincie venete. Quindi i due fratelli veronesi Giovanni e Pietro Arduino, i veneziani Francesco Grisellini, Alvise Dolfin e Francesco Barbaro, ed i trevigiani Giammaria Astori, Giannantonio Giacomelli, e conte Luigi Rizzetti, diedero seminatoio di nuova invenzione, o di migliorata costruzione, come risulta dalle opere a stampa degli autori prenominati. L'entusiasmo pei seminatoi persevera ancora a' dì nostri in Inghilterra, in Francia ed in Germania, ed io mi dilungherei troppo dal mio argomento, se volessi per soli cenni farvi menzione dei seminatoi di Ducket, di Thaer, di Fellemberg, di Dombasle, di Hugues, di Delisle Saint-Martin.

Il tema che ho assunto, mi chiama a parlare dei piantatoi, i quali successero ai seminatoi; e vi successero, perchè la costruzione e conservazione dei piantatoi è più semplice e piana, meno costosa, come più facile, ed ovvio a qualunque anche inesperto colono è il loro maneggio, in confronto de' seminatoi. Questi essendo la maggior parte di complicata fabbricazione, di rilevante dispendio, di difficile conservazione, esigono più esperti ed intelligenti maneggiatori, che non sono gli ordinarj aratori e bobolchi.

Per quanto a me consta, il primo a dare il nome di piantatore ad uno strumento per consegnare regolarmente il grano alla terra, fu il toscano Ignazio Ronconi, che nel 1768 fece eseguire in Venezia il disegno e modello, e poscia anche lo strumento medesimo operativo, e ne pubblicò la descrizione col suo libro a stampa intitolato: *Il piantatore, ossia nuovo metodo di piantare il frumento*, Venezia 1770, tip. Lironcurti, in 4.°, di pag. 22, con tavola in rame rappresentante il detto istrumento. Sebbene il Ronconi abbia nominato *piantatore* questo suo ordigno, giacchè serve (com' egli dice a carte 2) non a *seminare, ma a regolarmente piantare il grano;* pure la costruttura di esso non presentando la semplicità dei piantatori da grano, ma sibbene un apparecchio composto di due ruote aggirantisi sopra un asse, conducenti una terza ruota munita di piuoli o caviglie, che segnano i buchi sul terreno, e portanti esse ruote sopra due stanghe il tamburo, o tramoggia contenente il grano, che deve cadere sul suolo: ed essendo tutto questo apparecchio fatto in modo da essere tirato da animali, mi sembra, che appartenga più presto alla classe dei seminatoi, che a quella dei piantatoi.

Del piantatoio, come istrumento semplicissimo da piantare il frumento, senza ruote, senza tramoggia, senza timone, è perciò adoperabile a mano d' uomini, e non da animali, non rinvenni chi fosse l' inventore. Posso dire soltanto, che, da quanto a me consta, i primi che dettero relazione dell' uso del piantatoio in opere a stampa furono due miei comprovinciali, vale a dire il conte Pietro Caronelli di Conegliano, che nella sua Memoria *sulla piantagione del frumento* (1), rassegnata dall'Accademia di agricoltura, di cui il Caronelli era presidente, al magistrato veneto de' provveditori ai beni inculti, e deputati all'agricoltura, narra, io diceva, di aver esperita detta piantagione nell' anno 1784; ed il padre cappuccino Giambattista da san Martino del distretto di Castelfranco,

(1) Venezia 1788, Perlini, in 4.°

che espone nella sua stampata Memoria *sulla coltivazione del frumento* (1), letta all'Accademia agraria di Vicenza, le sue esperienze di sementazione col piantatoio, eseguite nell' anno 1786.

Parlando da prima del chiarissimo georgico coneglianese, dirò che in detta sua Memoria espose il processo ch' ei tenne nel piantare, coltivare e raccogliere il frumento, dando conto della spesa incontrata e del prodotto ritrattone; di questo io non riferirò che gli estremi: che sono trentadue misure per ogni unità di misura di semente impiegata nella terra piantata: sei misure per ogni unità di semenza impiegata nella terra seminata. Egli però non porge nè disegno, nè figura del suo piantatoio, ma bensì la descrizione, che si legge compendiata nell' istruzione che la prefata Accademia di Conegliano fece stampare e diffondere a vantaggio dei coltivatori, in questi termini: « Per facilitare questa » operazione si fa una stanghetta che si può chiamare il piantatore, tanto lunga » quanto è larga la *vanezza,* con due manichetti al di sopra, e con varie punte » di legno al dissotto, lunghe once e due mezza circa, e poste in distanza di mezzo » piede l' una dall' altra. Con questo strumento anche le femmine ed i ragazzi » possono con tutta facilità e speditezza piantare il frumento. L' uno col detto » piantatore va innanzi preparando le buche, e gli altri seguono, mettendo » colle mani due grani di semenza per ogni buco, e coprendoli di terra. » In calce di questa descrizione l'Accademia coneglianese appose uno schizzo del prefato istrumento.

Il secondo valente agronomo trevigiano, che trattò di proposito del piantatoio da frumento, voglio dire il sullodato padre da san Martino, così si esprime nell'argomento medesimo: « La piantagione del frumento riuscirà pronta e » facilissima, quando si voglia far uso di un istrumento affatto semplice di cui » si valgono alcuni per altri generi di semente. Ad un legno orizzontale, lungo » alquanti piedi, stanno al di sotto conficcati parecchi denti della lunghezza di » due pollici, o più o meno secondo la qualità del terreno, distanti un piede e » mezzo all' incirca l' un dall' altro, e al di sopra del quale vi si erge alla metà » della sua lunghezza un manico. Prende una persona per il manico lo stru- » mento, lo preme in terra, e vi lascia tanti buchi quanti sono i denti, cui segue « un fanciullo, il quale distribuisce un grano di semenza per ogni buco, e il » ricopre tosto col piede. A questa foggia in pochissimo tempo si pianta un vasto » campo di frumento. »

(1) Sta nelle opere di detto autore, vol. I, pag. 70 e seguenti. Venezia 1791, Perlini, in 8.° vol. III.

Chiude il padre da san Martino la sua Memoria, col darci in compendio sulla piantagione del frumento li seguenti risultamenti di calcolo approssimativo, non di fatto; vale a dire, risparmio di semente per ogni campo vicentino libbre centodue, maggior prodotto in grano in confronto del ricolto ordinario, staja ventiquattro vicentini per ogni campo a misura pur di Vicenza.

In Francia fu grande promovitore della cultura del frumento col piantatoio, il signor de la Rochefoucauld, il quale vedutala a praticarsi in Inghilterra, se ne invogliò, e ritornato in patria ne fece varii sperimenti, come racconta nelle sue Memorie (1), dalle quali rilevasi, che il piantatoio adoperato da lui consisteva in un manubrio di ferro, dividentesi in due branche terminanti in due coni rovesci, la sommità de' quali era destinata a formare i buchi, in cui doveansi collocare i grani. Un uomo teneva per ciascheduna mano un piantatoio, e camminando all' indietro in linea de' solchi, faceva quattro buchi per volta.

Per verità sì fatta descrizione non offre un' idea molto favorevole del piantatoio del signor de la Rochefoucauld. Il precitato *Nouveau dictionnaire d'agriculture* presenta le descrizioni e i disegni di varii altri piantatoi da frumento, adoperabili a mano di uomo, ma costrutti in modo, da far poco lavoro, e servibili più presto ad uso di civaje negli orti, che da piantar grani in estesa campagna; che però il metodo di piantare il grano sia tuttora vigente nelle più industriose nazioni agricole, ce ne dà prova un moderno catalogo di macchine ed istrumenti agrarii pubblicato in Brusselles nel 1853, nel quale si riportano figurati e descritti due piantatoi, l' uno intitolato di Newington, l'altro di le Docte.

Vengo ora a descrivere il mio piantatoio, ch' è l' identico da me adoperato, ora sono presso che quarant' anni, in consimile circostanza di luttuosa carestia. E duolmi di non aver potuto mai sapere chi ne sia stato il benemerito primo costruttore o riformatore, chè vorrei dargliene la dovuta lode. Giudico opportuno di corredare la mia descrizione col disegno dello stromento: primieramente perchè si conosca la forma, le dimensioni e le particolarità di quello da me adoperato nella piantagione del grano nell' ottobre 1853, della quale verrò in appresso narrando i risultamenti; secondariamente, perchè in nessuno dei sopraccitati autori nostrali, che trattarono del piantatoio, trovai chi ne abbia dato conveniente disegno o figura colle analoghe esatte dimensioni.

Il mio piantatoio (tav. I) si compone di un telajo parallelogrammo, lungo metro uno, largo centimetri 84: poggiano sopra di esso sei regoli trasversali, di-

(1) *Nouveau dictionnaire d'agriculture*. Vol. XVII, art. *semailles*. Paris, 1839, Pourret, in 8.°

stanti fra loro, nonchè dai lati del telajo, centimetri 12: sotto ciascuno dei detti sei regoli, nonchè sotto i traversi del telajo stesso stanno attaccati, in distanza l' un dall'altro centimetri venti, sei piuoli o denti fatti a forma di cono rovescio, lunghi centimetri nove, della grossezza in testa di centimetri cinque. Questi piuoli o denti sono in numero di 48, non compresi i due ultimi posti in cima del piantatoio, i quali servono di direzione nel procedere del piantatoio da stazione a stazione. Due traversi ricurvi tengono legato il telajo, e portano ai loro lati due stanti verticali, alti centimetri 73 circa, in testa dei quali si attaccano orizzontalmente due manubri, con cui si maneggia l' ordigno. E detti due traversi ricurvi servono, oltre ciò, di appoggio al piede di ciascheduno dei portatori del medesimo, per premerlo nel terreno, onde i piuoli o caviglie vi facciano i buchi ad eguale profondità. Avverto che quest' ordigno dev' esser fatto di legno bene stagionato, duro e forte, come sarebbe a dire, di olmo, di noce o faggio, solidamente unito nelle commessure, acciocchè duri lungamente senza scomporsi. Il valore complessivo di un piantatoio consimile, tra materiale e fattura, è di austr. lire trenta all' incirca.

Vengo ora a dire come lo si deve adoperare. Premetto che il terreno da scegliersi per piantare il frumento, giova che sia piuttosto sciolto e leggero, che non tenace e compatto. Fa d' uopo che si rivolti bene, e si apparecchi in agosto e settembre con quelle replicate arazioni, che i diligenti agricoltori fanno precedere all'ordinaria seminagione del frumento. Poi si concimi a suo tempo la terra con conveniente misura di buon letame, e si riduca il campo a tal punto, che per seminarlo a mano null'altro vi manchi che l'ultima aratura. E qui fa d'uopo avvisare, che chi vuol piantare il frumento deve avere apparecchiata buona semente di grano secco, ben nutrito, maturo, e della migliore qualità: poi deve nettarlo a mano da qualunque zizzania, indi assoggettarlo alla medicatura, infondendolo in acqua, in cui sia stemperata la calce viva, od il vetriuolo, perchè non soggiaccia alla golpe o al carbone.

Verso la metà di ottobre, in momento opportuno, in cui il terreno non sia troppo umido, gli si faccia passar sopra l'erpice quanto può occorrere per appianarlo, e sminuzzarne le zolle. Indi si comparta il campo in tante gombine, od ajuole della larghezza di metri uno e centimetri venti per cadauna, e questa ripartizione si segni per maggior esattezza con cordicella, formando poi i solchi col badile, a divisione di una porca dall' altra.

Ciò compiuto, due operai portando sulla prima vanezza del campo il pian-

tatoio, e postolo in guisa che resti distante dal solco dieci centimetri da una parte e dall' altra, premalo ognuno di essi col piede, affinchè si formino i buchi nel sottostante terreno, ne' quali deve esser posto il grano. Fatta la prima impressione de' buchi, trasportisi avanti il piantatoio al sito mostrato dagl' indici, e quivi calchisi di nuovo: e per tal guisa via via progredendo, si segnino i buchi di tutta la vanezza.

Questi stessi due operai, od altri due se vi sono (al qual secondo lavoro possono servire e donne e fanciulli dodicenni) portando in un grembiale il frumento, ne pongono due grani per buco, camminando l' uno pel solco a destra, l' altro pel solco a sinistra della vanezza. Ciò compiuto, i due lavoratori depongono il piantatoio, e preso invece in mano il rastrello, distendono la terra a chiudimento dei buchi, ed appianano la piantata ajuola, così procedendo sino al compimento di tutto il campo.

Non lascio qui di notare, che all' atto della piantagione del grano nel decorso ottobre, considerando che il maneggio del descritto piantatoio esigeva l' opera di due uomini, dei quali il più delle volte non può disporre un povero contadino, fittaiuolo di poca terra: e considerando pure che può tornar utile e necessario questo stromento al povero coltivatore, più che ad ogni altro, perchè mancante di mezzi, onde provvedersi in tempo di carestia dell'occorrente semente, ideai di far costruire un piantatoio adoperabile da un solo uomo, ed è quello, di cui qui aggiungo il disegno (tav. II); esso è lungo centimetri 80, largo centimetri 39, ed alto centimetri 69; per l'uso del medesimo si dovranno analogamente ripartire le ajuole o vanezze da piantarsi. Segnando questo soli quindici buchi, si fa con esso un lavoro minore di più di due terzi, che non col grande piantatoio: offre però il comodo di servire ad uso di una povera famigliuola lavoratrice di un ristretto campicello. Con ciò mi parve di aver provveduto al bisogno e vantaggio dei più necessitosi coltivatori, pei quali, dicea saviamente Alberto Thaer, *il piantatoio dev' essere specialmente benefico.* Il valore di questo minore ordigno è di sole austr. lire dodici.

Seguendo il descritto metodo, e valendomi del grande piantatoio, seminai a' 27 ottobre del 1853 nel mio podere lavorato per economia, che circonda la mia casa di villa in comune di Martellago, distretto di Mestre, provincia di Venezia, due pezzi di terra argilloso-calcarea, della superficie a misura trevigiana di quarti due, e tavole 198 di campo, equivalenti a tavole 34, 26, 78, della tornatura metrica italiana censita di classe II. La semente impiegatavi in tutti

due i pezzi di terra fu di un quartiero di frumento, a misura pure di Treviso, che forma la sedicesima parte di uno stajo trevigiano, pari detto quartiero a pinte 5, copi 4 della soma metrica: il valore del quartiero di frumento in ragione di austr. lire 30 (lire trenta) allo stajo, valse austr. lire 1:72, a cui aggiunte le spese di mano d'opera ai giornalieri piantatori, in somma di lire 10:54, si ebbe il complessivo dispendio di lire 12:26.

Di contro ed in prossimità della terra seminata col piantatojo, destinai un' eguale superficie di terreno, di consimile qualità e classe: e fattala concimare con eguale misura di letame, previe le consuete arature, la feci seminare a mano, o a getto, o alla volata, come dicono i Francesi. In detta seminagione, a solito metodo del paese, vi si è impiegato un mezzo stajo trevigiano di frumento, equivalente a mine quattro, pinte tre, copi quattro della misura metrica, calcolate del valore, col sopraddetto corrente prezzo di austr. lire 15:00, alle quali aggiunta la spesa ordinaria dell' ultima aratura, e del seminamento in austr. lire 4, si ebbe il complessivo dispendio di lire 19, che supera di lire 8:74 la spesa incontrata pel piantamento.

Al frumento seminato non si praticò verun lavoro, sino al momento della messe. A quello piantato, al riasciugarsi della terra, allo spirare di benigna temperatura, a' 3 di aprile feci dare una sarchiatura con appositi sarchielli, accumulando intorno ad ogni pianticella o cespo la terra, e liberandolo dall' erbe parassite natevi intorno; operazione che contribuì mirabilmente a farlo quasi rivivere, e successivamente cestire, vincendo del doppio in grandezza quello seminato col solito metodo. Questo sarchiamento non costò di fattura che sole austr. lire 4:20, che aggiunte alle lire 12:25 sopra notate, fanno ammontare la spesa totale in lire 16:51, che rimangono minori di lire 3:51, delle lire 19, che si dovettero spendere, come si disse di sopra, per la seminatura col metodo ordinario.

Fortificato il frumento, per valermi dell' espressione di Palladio, per la sarchiatura fattagli intorno, potè tollerar meglio, che non il grano seminato, la fredda e secca temperatura dei decorsi mesi d' aprile e maggio, e quella troppo umida e incessantemente piovosa di giugno, cosicchè al finire di detto mese, secondato da più favorevole stagione, mostrava più rigogliosi i cespiti, più elevati i culmi, più grosse e più granite del doppio le spighe in confronto del frumento seminato.

E per venire finalmente all' ultimo risultamento di tale coltivazione, rife-

rirò che il quartiero di frumento piantato nei pezzi di terra della superficie di quarti due e tavole 198 trevigiane, mietuto al debito tempo, battuto e vagliato co' soliti metodi, mi diede il prodotto in grano secco, maturo e netto da zizzania di staja quattro trevigiani, che sono quartieri sessantaquattro, del peso ciascuno stajo di libbre trevigiane 137, pari a libbre metriche 70:45 : ed inoltre si ebbe un carro ed un quarto di bella e grossa paglia : mentre la terra contigua di egual superficie seminata a mano con quartieri otto di semente mi diede il prodotto di staja tre di buon grano secco, che sono quartieri 48, corrispondenti al sei per ogni semente ; mentre il frumento piantato mi diede il prodotto del sessantaquattro per ogni semente ; questo nettissimo da ogni mondiglia, quello mescolato di semi di gittaione e rubiglie, che però non lo facevano scadente nel peso, come scadeva nella bellezza ed uguaglianza del grano, e nel prodotto della paglia, più minuta e più fragile, e minore in quantità di due quarti di carro.

Dalle cose pertanto qui esposte si può giustamente dedurre, che la piantagione del frumento, in confronto dell'ordinaria seminagione a mano o *alla volata* sia preferibile :

1.° Perchè con essa risparmiasi una quantità di semente, il valor del quale risparmio compensa non solo le spese dei lavori richiesti dal piantamento, ma porge un sopravanzo, e questo tanto più considerevole negli anni di carestia, e pel colono sprovveduto di mezzi, quanto maggiore è il valore del grano da seminarsi.

2.° Perchè il prodotto, che si ritrae dal grano piantato da una data superficie di terra è più che decuplo di quello, che si ricava da un' eguale superficie seminata col solito volgar metodo.

3.° Perchè il grano proveniente da frumento piantato è di migliore, più netta e più scelta qualità, che non quello proveniente da grano seminato.

4.° Perchè il grano piantato offre altresì maggiore quantità di paglia, e di migliore qualità in confronto del frumento seminato.

5.° Perchè il frumento piantato lascia la terra netta dall' erbe parassite, e quindi più atta a ricevere e farvi prosperare un secondo prodotto.

Nè vale l'obbiezione che il piantamento del grano non è applicabile ai lati fondi, a motivo che esige troppo lungo tempo e troppo minuto lavoro.

A ciò si risponde, che qualora si voglia anticipare la piantagione a' primi di ottobre, e non posticiparla alla fine di detto mese, con esito sempre infelicissimo, si può estendere questo metodo anche alle vaste possessioni, in que' paesi

specialmente ove abbonda la popolazione, e manca ad essa il lavoro. E non si piantano annualmente nel basso Polesine migliaja e migliaja di campi a grano turco? E la quasi certezza di ottenere col piantamento un decuplo prodotto di grano non deve far superare queste infingarde obbiezioni?

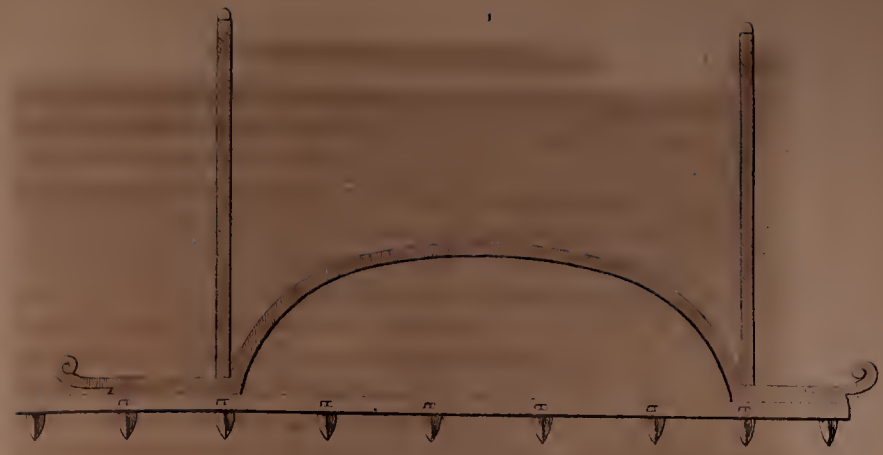
Gerone, quell' antico re di Siracusa nella frumentosa Sicilia, solea dire: « Mostratemi un uomo, che sappia darmi due spighe in luogo di una, ed io lo » stimerò più dello stesso Archimede. » Io, coltivatore degli studii georgici, non fo commenti a questa sentenza tanto lusinghiera pegli agricoltori.

Chiuderò bensì il mio discorso coll' esortare caldamente e proprietarii e coloni a coltivare con sempre maggior impegno il frumento, che costituisce la prima ricchezza dei cittadini e dello stato, valendosi o del metodo di piantagione, che ho esposto, se lo credono opportuno, ossia di qualunque altro sperimentato migliore: e rammenterò loro di nuovo quella regola prudenziale, che agronomi e statisti non dovrebbero mai dimenticare, che le grandi calamità, le straordinarie carestie non solamente si devono riparare od alleviare, quando ci flagellano, ma, riparate che sieno, fa di mestieri procacciare i mezzi per quanto è da noi, con cui impedirne il ritorno.

(*Letta nel giorno* 17 *agosto* 1854.)

1

2

3

Piantatojo adoperato da due uomini

Piantatoja adoperabile da un solo uomo.

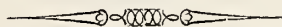
SULLA DESTINAZIONE

DI

UN' ANTICHISSIMA OPERA MURALE

SCOPERTA IN VENEZIA

CONGETTURE

DEL M. EFF. INGEGN. GIOVANNI CASONI

A semplicitate tua peto ut quod de libello meo dicturus es aliis, mihi dicas.
PLIN. JUN. Lib. IV. Epist. XXIV.

Per istabilire l'antichità di alcune fra queste nostre isolette e per restare convinti sulla frequenza in esse di abitatori fino da remote età, tacendo di altri scrittori, i quali espressamente o incidentalmente ne parlano, abbiamo indicazioni anco da Virgilio (1) là dove canta d' un *Antenore,* o piuttosto, come osservava l'eruditissimo nostro Gallicciolli, *tolta l'algebra della mitologia* (2), di un condottiere trojano, che sbarcato a questi margini co' suoi fuggiaschi compagni fondava in Padova quasi una nuova Troja. Ma messe a parte questa e simili narrazioni, le mille volte ripetute da posteriori cronisti e da storici e che appartengono a' fatti di quel tempo prima, che le allegorie, le favole, le patriarcali tradizioni, altronde utilissime pella istruzione e pel governo dell' umana famiglia, cedessero il luogo alla severità e all' esattezza di una storia positivamente cronologica, ricorderemo piuttosto il fatto accennato da Livio, di quel

(1) Virgilio — *Eneide* lib. primo.

(2) Gallicciolli — *Delle Memorie venete antiche profane ed ecclesiastiche.* — Venezia 1795. T. I, pag. 42.

Cleonimo (1) spartano, il quale tre secoli prima di Cristo, spinto da procelle a questi stessi lidi approdava, e su pel Medoaco o Prealto spargeva i suoi male avveduti corsari a rapinare sulle campagne de' padovani, il qual cenno di quell' insigne storico basterebbe per sè solo senz' altri soccorsi, senz' altre asserzioni a provare che questi lidi, queste spiaggie non solamente erano allora conosciuti anco in regioni lontane, ma che avevano pure particolare notorietà e qualche fama, se poterono invitare que' girovaghi stranieri a sbarcare, ad esplorarli, e valsero a destare in essi la speranza d' un qualche bottino.

Strabone, che fioriva ai tempi di Augusto, ci ragguaglia come in queste nostre lagune, prima ancora di lui, si elevavano argini ed operavansi altri lavori di eguale natura (2), e ciò certo con l' intendimento di migliorarne la condizione e per ricavare da questo suolo medesimo maggiore profitto, adattandolo ad usi più opportuni e più soddisfacenti all' interesse di chi lo frequentava. Anche Plinio (3), di poco posteriore a quell'esimio geografo, tocca di fosse e di consimili operazioni consigliate dal bisogno e dalla brama di sopperire alle esigenze sempre crescenti della società e della civilizzazione: questi provvedimenti punto non dubito che attribuire si debbano specialmente alla solerzia dei padovani, siccome a quelli che, fra gli abitatori della Venezia terrestre, immediato interesse aver dovevano riguardo a questi estuarj pertinenti alla loro giurisdizione perchè contigui ed aderenti al territorio da essi occupato, e co' quali Padova stessa aveva facile comunicazione per mezzo del Medoaco o Prealto, fiume che poco fa nominava.

Oltre a ciò, ell' è cosa generalmente consentita e logicamente dedotta dalle circostanze locali che gli stessi padovani, assai prima che queste isole di Rivoalto fossero assieme congiunte, e che i separati abitatori di esse, con i fuggiaschi dal continente si unissero a comporre una sola società e dessero a questa stupenda creazione dell' uman senno, dell' ingegno e dell'ardimento, il nome di *Venezia,* avevano in esse, ricoveri, magazzini, e vi ricapitavano per oggetti di commercio esterno alla via di mare; ed è provato altresì, malgrado la contraria argomentazione dell' erudito Temanza (4), che si servivano immediata-

(1) Tito Livio — *Dec. prima.*

(2) Strabone — Libro V.

(3) Plinio — Libro, III cap. 6.

(4) Temanza Tommaso — *Dissertazione sopra l' antichissimo territorio di Sant' Ilario nella diocesi di Olivolo.* — Venezia 1761, 4.°

mente, siccome ad essi il più vicino, di quel porto ove sfociava il *Medoaco minore* ed altri fiumicelli con lui, che oggi si nomina di *Lido* o di *san Nicolò di Lido,* non lunge dalla celebre *Olivolo,* isoletta a lui presso, onde assumevane il nome e che lo storico *Sabellico* (1) confortato dall' autorità di Tito Livio, il quale su questo punto riferisce avvenimenti che lo precedettero di circa XII secoli, ed anche il cronista Caroldo, più reverente alla rimota antichità che moderato amatore del probabile e del vero, illuso forse dalla comparsa di alcune vetuste muraglie ivi sporgenti dal suolo, asseriva con altri ancora, che alla comparsa de' trojani venne prima denominata Troja, poi *Pagos Oligos* (2) e finalmente Olivolo, ora *san Pietro di Castello* e *Quintavalle,* la quale espressione Castello, che pure è antica, vorrei fosse appunto derivata da quelle muraglie, forse residui di antichissimo castello, o luogo fortificato in vicinanza del porto, e probabilmente opera posteriore de' padovani, perchè quegli avventurieri per certo male accolti dagl' indigeni, più che ad una difesa verso gli attacchi di mare, che la distanza da esso e le maremme ed i boschi gli facevan barriera, avranno in prima collo scarso numero al confronto di quelli, pensato a tutelare il nuovo asilo, la loro nuova Troja contro le insidie e gli agguati de' padroni di quel suolo da essi clandestinamente e per sorpresa occupato, come riferisce anco lo stesso Livio. La costruzione di opere murali grandiose, quale un castello, annunzia la esistenza d'un potere assodato e confidente ne' proprj mezzi. Che que' ruderi dunque veramente appartenessero ad epoca trojana non posso credere. Nè valgono a distormi da questa opinione i nomi di *Zimole, Gemine, Gemelle,* ecc., co' quali vorrebbesi che in antico fossero distinte due isolette poste al sito ove stanno i circondarj di san Martino, della Bragola, san Lorenzo, ecc., perchè in esse davasi culto ai *Dei Cabiri* o *Dioscori,* che queste sono indicazioni assai vaghe, destituite di attendibile fondamento, ed opino piuttosto col Gallicciolli che Gemelle

(1) Marci Antoni Sabellici — *Historiae rerum venetarum etc. Decadis prima,* lib. I, pag. 18. *Venetiis* 1718, 4.° Caroldo — *Stiffone* — lib. V.

(2) Bernardi Justiniani — *De origine urbis venetiarum, etc.* — Venezia, 1495, fog., lib. IV.

Antenoris adventum in intimum maris hadriatici sinum, non solum veneti testantur, etc. come dall' antecedente nota.

Tito Livio non andò esente da osservazioni. Noterò che Sesto Ruffo, nel suo libro dell' *Istoria de' Romani,* diretto a Valentiniano, comincia da' fatti positivi e tralascia le antecedenze.

Inoltre Messala Corvino nel sunto di *Storia Romana* dato ad Ottaviano, sul proposito di Antenore e di Enea e delle loro gesta, mostra qualche particolare dubbiezza. Vedasi Titi Livii Patavini — *Latinae Historiae* Lugdun. 1553, foglio.

si dicessero a queste due isolette (1) perchè in esse il gregge era più spesso che in le altre, fecondo di frutti *gemelli,* cosa assai frequente, secondo *Scimmo,* nella Venezia marittima, come egualmente potrebbe darsi che due isolette, eguali per figura e per grandezza, si sieno nominate Gemelle, e che questo suono, abbia fatta ricorrere la mente a que' due numi gemelli, che ordinariamente erano venerati in siti di mare, e quindi, non il culto de' *Dioscori,* ma la forma del terreno abbia dato il nome alle isolette medesime. Pongo dunque anche quest' etimologia con quella del *Pago Olivolense,* e progredisco.

Le asserzioni di storici e di geografi ripetute da altri posteriori cronisti e storici sono confermate ed avvalorate dalla comparsa di monumenti d' alta antichità romana, e ciò che più importa non da altrove recati, ma a queste isole indubbiamente spettanti, che furono in varj incontri qui dissotterrati a grandi profondità, come fra tanti ne avvisa il ricordato *Sabellico*, *Bernardo Giustiniano,* e *Bernardo Trevisano* (2), e come vedemmo, ed andiamo noi stessi vedendo, pelle frequenti scoperte dei marmi conformati a speciale figura, di marmi con iscrizioni ed altre notevoli reliquie con impronte anteriori alla bell' epoca romana, le quali passano, quando che sia, a decorare i nostri musei e porgono tema agli studj ed alle elucubrazioni degli archeologi e de' pazienti indagatori delle rovine lasciate dal tempo.

Che se in taluno pure sorgesse ombra di dubbio in punto a ciò che andava dicendo; se la critica che procede con passo lento e guardingo andasse indecisa intorno all' ammettere o rifiutare codeste testimonianze monumentali perchè consistono in oggetti di facile trasporto, perchè non aventi base stabile o fondamenta nel terreno, perchè isolati, dispersi, solinghi, perchè rinvenuti in siti dove nessun vestigio forse scorgevasi nè traccia veruna di edifizj od altri manufatti a' quali potessero in qualche modo aderire od appartenervi; subentrano allora in vece loro e con diritto maggiore alla nostra fiducia monumenti di specie diversa, sparuti, desolati in vero, ma che pur sono muraglie e sono ruderi

(1) Gallicciolli — *Delle Memorie venete profane ed ecclesiastiche.* — Tomo I, pag. 210. Ven. 1796, 8.º

(2) *Est et a mediis retro fundamentis huc deflectus brevi angiportu est res ipsa jam aere confecta ut pote jam inde a Longobardico tumultu condita: ingens area, etc.*

Marci Antonii Sabellici — *Opera, etc.* — Venezia 1502, 4.º pag. 86, 6. *De situ urbis.*

Idem — pag. 84. — *Quae regionis novissima occasum hinc dextero rivo ad Amagianas Columnas pene perpetuis fundamentis itur quae regione mea pte terminat locum e citra crucis phanum, etc.*

Della laguna di Venezia — Trattato di Bernardo Trevisano. — edizione II. Venezia 1718, 4.º, pag. 9, 14, 61, 62, 63, 67, 84, 92, 93, specialmente a pag. 67.

d' incontrastabile antichità anteriori ad ogni moderna ricordanza tradizionale, i quali avendo ampia base molti piedi sotto il segno del limite cui ora giunge o s' innalza il flusso marino, hanno con ciò la fede ad un tempo di loro vetustà e della loro originalità locale, e mostrano su quelle logore superficie, ricoperte di antico musco, i solchi evidenti e le ingiurie che col suo roteare vi ha impressi il secolo forse per venti sue rinnovazioni.

Quelle muraglie ricordate dal Sabellico, siccome opera de' tempi longobardici, che quasi inosservate stavano nei dintorni di *sant' Antonino* e di *Bragola,* ho vedute, ho esaminate, ne delineava anche l' aspetto, a mia grande ventura, prima che nel maggio 1823 un estatico apatista che poteva proibirlo, ne permettesse invece la demolizione. Il campanile di san Paterniano di base pentangona all'esterno, circolare all' interno, tengo che in origine fosse torre posta all' angolo d' un ricinto antichissimo che l' acqua da due parti, all' ovest ed al sud bagnava (1). Sorge e si conserva tuttora, in centro al fortissimo castello di sant'Andrea della Certosa, il tronco inferiore d'una delle torri menzionate da Pietro Giustiniano anticamente erette a custodia di quel porto: l' altra però, alla punta opposta, quasi adequata al suolo e convertita ad altri usi, lascia scorgere appena qualche residuo di costruzione, qualche muraglia sopra cui ed al suo ridosso vennero posti moderni fabbricati di poco rilievo, in parte rovesciati per una esplosione ivi accaduta in luglio 1797 poco dopo l' abdicazione del veneziano Governo. La torre del faro antichissima, da Bernardo Giustiniano menzionata quale di maravigliosa altezza ed a' suoi tempi, cioè oltre la metà del XV secolo, rifatta a cura del patriarca Maffeo Gherardo (2), perchè di vecchiezza rovinava, ignoro ove fosse; certo però innalzavasi su questo lido a destra del porto, mai altrove, ciocchè ebbi a dimostrare altra volta, togliendo

(1) Petri Justiniani — *Rerum venetorum, etc. Historia etc.* Venezia 1576.

Le cronache, fra cui la nuova cronaca veneta del padre Zucchini. — Venezia 1784, sestiere secondo, pag. 480, indica che questo campanile venne eretto dopo l' anno 909 da alcuni operai veneziani fuggiti dalla schiavitù de' Saraceni. Io penso che questo singolare fabbricato sia più vecchio, e ad appoggio di quanto espongo in questa memoria, invito i curiosi ad osservare che appunto all'ovest di questa torre evvi l'antico rivo Baduario, poi rio Menuo e di san Moisè; e al sud altro rivo ora interrato, col nome Rio Terrà a san Paterniano, che si dilunga fino al campo maggiore di san Luca.

Le case circostanti a questa torre sono moderne, nessuna ragione, pare almeno, poteva suggerire così bizzarra figura di costruzione; la cella per le campane rozzamente aperta nelle muraglie manifesta non una fabbrica appositamente eretta, ma un adattamento. Anche il coperto a coppi mostra nella sua rozzezza essere colà posto per coprire alla meglio quel vecchio tronco.

(2) Bernardi Justiniani — *De origine urbis venetiarum etc.* Venetiis 1492, fog., lib. IV.

un goffo abbaglio riconfermato vieppiù da una moderna iscrizione erronea e bugiarda (1).

Ciò che andava esponendo sembravami bastante a stabilire l' antichità di queste isolette senza ricorrere a tempi antistorici, cui di spesso si raccomandano coloro i quali pensano dipendere la nobiltà delle nazioni e de' popoli da rimota e lontana derivazione, quasi non fosse che sempre le più cospicue virtù ornarono i fasti di tutti i popoli, come i più abbominevoli vizj gli hanno in ogni tempo deturpati, e che il difetto scorgesi più grave, appunto quanto più portiamo l' occhio a' tempi lontani, se non si voglia tenere in conto di celebrità da imitarsi alcuni antichi fatti storici, alcune nefande imprese che costituiscono la tinta nera nel portentoso quadro delle umane vicende. Forse nello sviluppo della Memoria che sto leggendo, altri argomenti mi si faranno davanti, valevoli essi pure a vieppiù constatare, oltrechè la frequenza di abitatori in queste isole stesse, anco la importanza in che si tenevano, e la cura che in ogni tempo se n' ebbe pella conservazione, per l' aumento e per la loro prosperità anco in epoche da noi molto distanti.

Nel numero de' scopritori di patrie memorie, e molti ve n'ebbero e ve ne sono, vorrei pure comprendermi, ma però con ben diverso titolo ed assai più modesto; posciachè, non che io abbia scelti e preassignati i luoghi dove intraprendere le mie esplorazioni, ad un determinato fine, che ciò stato sarebbe il

(1) Casoni Giovanni — *Breve storia dell'arsenale di Venezia*, inserita nel volume I, parte II, pag. 84 e seguenti nell' opera *Venezia e le sue lagune*. — Venezia 1847.

Ecco la iscrizione, a pag. 98, ed il brano che vi si riferisce

VETVSTAE PHARI RVDERA
QVAE HIC ADHVC SVPERERANT
ABLATA
ANNO — MDCCXCVIII.

Vedasi la tavola III che qui unisco con la pianta e la veduta di quel supposto faro.

« Erano que' ruderi riguardati con particolare reverenza, e la pubblica autorità che la loro custodia com-
» messa aveva alle gelose cure dell'eccelso Consiglio de' Dieci, contribuivano innocentemente a far tenere esatte
» le popolari tradizioni. Queste poi negli ultimi anni crebbero in vigore, quando, cioè nel 1798, fatte scompa-
» rire quelle rovine, vi si è sostituita una iscrizione curiosa che le ricorda siccome avanzi del vetustissimo faro
» di cui più sopra abbiamo fatto cenno. Ora però l' equivoco è tolto, l' inesattezza delle popolari tradizioni è
» riconosciuta, ed è dimostrata la erroneità di quella iscrizione, essendosi per noi chiaramente scoperto, in que-
» gli a torto celebrati residui, le ignobili ed impellicciate muraglie d' una fornace da cuocer mattoni pel servigio
» dell' arsenale, colà eretta a' tempi del doge Giovanni Soranzo in obbedienza a decreto del senato 17 marzo
» anno 1327. »

frutto di un profondo studio, e di estesissime cognizioni, di che sono sprovvisto, ma quasi sempre vi sono riuscito per caso, per fortuita eventualità, in guisa che, sparito ogni altro merito, possa solo aspirare all' umile titolo di scopritore fortunato, ed il fatto che sto per narrare sarà una prova di questa verità.

Sul finire dell' anno 1821, per ordine superiore, venni incaricato quale ingegnere dell' i. r. Marina di Guerra, a ricostruire la muraglia di cinta verso levante all'isola delle Vergini in questa città, posta lungo il canale denominato di san Pietro di Castello, su cui stava una pietra con l'anno MDXLI, (1) la quale minacciava rovina. Data mano allo disfacimento, piantata la solita *tura* necessaria per escludere l' acqua, onde non impedisca l' escavo del terreno e le successive fabbricazioni inferiori, allargata la fossa si cominciavano ad asportare le prime macerie; quando il giorno 20 febbrajo 1822, portata la escavazione a metri 1.528 dal fior di terra, i picconi urtarono in qualche cosa di maggior resistenza, che si scoperse essere muratura regolare di mattoni cotti, la cui superficie trovai che alquanto inclinava verso l' interno dell'isola; tenutane nota, pur questa feci demolire. Ma più sotto altri metri 1.159, che tanta era l'altezza di questa costruzione in mattoni, comparve a giorno una sassaja, a gettata, senza cemento, cui stava ridossato, dal lato del canale un rivestimento composto di grossi massi di pietra calcare d' Istria posto a scaglioni di varie altezze; alcuni della lunghezza in fronte di metri 1.790; altri di metri 2.500, grossi, chi metri 0.450, chi metri 0.750; assieme uniti senza verun cemento, ma trattenuti in senso lon-

(1) XPS · REX · VENIT
IN · PACE · DEVS · HOMO
FACTVS · EST
MDXLI.

Stava sopra una vecchia muraglia che, nel 1821, dall' ingegnere Casoni fu fatta demolire lungo il canale di san Pietro di Castello, dove poi venne eretta la nuova muraglia su cui leggesi la seguente epigrafe assai bene adattata al luogo (allora i. r. bagno marittimo od ergastolo) postavi dallo stesso ingegnere.

VMILIATVM · EST · IN · LABORIBVS
COR · EORVM
PS · 106
MDCCCXXII.

Così Cicogna Emanuele — *Delle iscrizioni veneziane raccolte ed illustrate.* — Volume V. Venezia, 1842, pag. 95, 96.

gitudinale a mezzo di barre o grossi arpioni di ferro, che reciprocamente gli aggrappavano, senz' indizio alcuno di piombo, e sì strettamente ed esattamente combaciavano da non mostrare segno alcuno di movimento.

Codeste apparizioni destarono la mia curiosità: andava persuadendomi che quel manufatto appartenere dovesse a qualche antica opera importante; allora mi si presentò alla memoria il castello Olivolo, la grande muraglia menzionata dal cronista *de-Monacis* (1) e la fantasia spaziavasi su queste reminiscenze, il perchè di buona voglia profittai del permesso, per buone ragioni concessomi d'innalzare la nuova muraglia alquanto più ritirata della vecchia, ciocchè importava il bisogno di allargare di più l' escavo verso l' interno dell' isola.

Venne dunque continuato l'asporto de' terreni, senonchè spinta la escavazione a metri 4.700 dal fior di terra, dovetti farla cessare, temendo, e non a torto, che ne andasse compromessa la sussistenza de' vicini fabbricati, e più di tutto quella dell'ampio abside della vecchia chiesa, da molti lustri convertita ad uso profano. Ciò nondimeno mi è riuscito riconoscere per intiero la forma ed il nesso di quel manufatto, e quindi mi fu agevole, coll' impiego di lance ferree, di appiombi e con altri ripieghi ed avvedimenti indicati per simili casi dall'arte che professo, averne l'esatto ed intiero profilo che sottopongo a' vostri esami (2) e sul quale intendo appoggiare le seguenti mie congetture.

E qui facendomi a descrivere le condizioni particolari di quest' antica opera murale, sia rispetto alla forma sua, sia alla qualità, alla provenienza dei materiali, alla distribuzione, all' impiego ed al posto loro assegnato in quella costruzione; comincierò dal dire che la muratura da me scoperta vidi pella lunghezza di metri 11 circa nel tratto ove più profonda fu condotta la escavazione a metri 25 circa alla superficie della muratura di cotto; il restante continua sotterraneamente in linea retta colla direzione di est-nord-est, verso il mezzo del canale san Pietro, e per ovest-sud-ovest, verso la ricordata chiesa delle Vergini e gli altri fabbricati dell' isola, sotto a' quali sparisce, ne va coperta e sepolta chi sa per quale lunghezza (3). Inoltre, come è chiaro a comprendersi, era attraversata in senso obbliquo dall' altra vecchia muraglia di cinta che demolivasi, cui per un tratto serviva di base e sostegno, al quale medesimo uffizio si presta

(1) Laurentii de Monacis Veneti — *Chronicon de rebus venetis ab V. C. ad annum* 1354. — Venezia 1758, 4.°, pag. 63.

(2) Profilo tavola I.

(3) *Piano di situazione*, tavola II.

ancora rispetto alla nuova muraglia, che alla prima si è sostituita abbenchè eretta su d' una linea alquanto piu ritirata, come ancora diceva.

La chiarezza che mi sono proposto di usare in questa esposizione mi toglie di poter alleviare d' alquanto quel tedio che provar dovete in assistere a questa lettura. Mi è d' uopo notare alcune misure, sì perchè la conoscenza di esse serve a dar qualche idea delle sue proporzioni, e sì ancora pel bisogno di fare varj riferimenti, d' istituire varj confronti, l' effetto dei quali associato ad altre considerazioni, ad altri rapporti, presta argomenti per istabilire alcuni principj, valevoli a guidare le mie conclusioni sulle traccie della verità, di cui ansiosamente vado in cerca.

Misure e riferimenti.

A. Il suolo odierno dell' isola delle Vergini sta metri 1.343 sopra l' odierno segno di comune alta marea.

B. La profondità in cunetta del contiguo canale di san Pietro, è metri 3.265 sotto il ricordato segno di comune.

C. L' antica muratura di cotto in cemento di calce si è trovata metri 1.528 sotto l' odierno suolo dell' isola, perciò metri 0.200 sotto l' odierno segno dell' alta marea.

D. L' altezza di quella muratura di cotto è di metri 1.159. La sua grossezza media metri 0.900; succedono poscia la sassaja, e suo rivestimento di pietra istriana, i quali continuano fino a metri 6.478 sotto l'odierno suolo dell' isola, in guisa che l' altezza totale dell' antico manufatto è di metri 4.951.

E. Guidato dal principio che, come noi adopriamo, anco i nostri antichi, a' quali per certo non era ignota l' azione costante ed efficace della marea a danno de' manufatti, abbiano esposto al tocco della comune la faccia d' un corso di quel rivestimento anzichè presentarla ad una commessura; così giudico che nel caso presente questo corso, già esposto alla marea, siane stato il terzo, contando dall'alto, e quindi ritengo che l' antico limite dell'alta marea, riferito all' epoca in cui venne eseguita l' opera che descrivo, sia metri 2.150 inferiormente all' altro segno dell' odierna comune.

F. La grossezza all'alto, dove cioè comincia la sassaja, è di metri 1.050. Quella corrispondente all'antico presunto segno di alta marea metri 1.400, e finalmente la grossezza in base metri 3.300.

G. Questa base sta metri 2.900 sotto l'antico limite della marea; sta sotto l'odierno metri 5.050, ed è inferiore metri 1.870 al fondo in cunetta del ricordato canale.

H. Quel rivestimento è conformato di N. 11 filari; di questi, numero cinque in tutti, dell' altezza complessiva di metri 1.750 ho veduti e toccati: gli altri numero sei ho potuti esplorare e verificarne l'altezza, pure complessiva, che ho ritrovata di metri 2.100. L' ultimo corso alla base, che lo scandaglio accusava avere l' altezza di metri 1.440 sarà forse combinato di quattro corsi, ma però senza i soliti risalti, come alla parte superiore.

I. Alcuni di codesti corsi sono lunghi in prospetto 1.790; altri metri 2.500, e grossi, mediamente, metri 0.600; le così dette catene o ritegni si trovarono di grossezza maggiore.

K. Le barre o li grossi arpioni di ferro che trattenevano in senso longitudinale fra loro i massi del rivestimento sembravano posti allora; si potevano contare gli ultimi colpi del martello che gli avea così conformati; nessun indizio di ossidazione, la quale, tosto esposti al tocco dell' aria, si manifestava colla eruzione, sempre crescente di bolle umide e numerose, ed in pochi giorni si sformarono e decomposero affatto.

L. Coll' appoggio di questi dati, parmi poter determinare assai prossimamente che l' antico suolo praticabile dell' isola fosse colà dove ha principio, all' alto, la muratura di cotto, vale a dire metri 2.100 sopra il medesimo presunto segno antico di comune.

M. Il prospetto anteriore di questo grande manufatto mostra notabile inclinazione, poichè si allontana metri 2.200 dalla perpendicolare innalzata all'unghia della base, e perciò sta la scarpata all' altezza come 1 = 3 circa: la parte posteriore invece trovasi quasi a piombo.

N. Questa inclinazione non è dunque originaria al manufatto, ma posteriore, accidentale e di tutta la massa; scorgendosi nel nesso aderenza reciproca fra i materiali e nessun spostamento parziale: sennonchè a mezzo di livellazione mi sono potuto convincere che la parte di muratura, comparsa a giorno per circa metri 25, declina non poco verso il canale di san Pietro: lo che mi fa supporre che sia anco di quelle parti che non ho potute vedere.

O. Non mi è riuscito conoscere se codest' opera riposi sopra un battuto di pali, ovvero su di un zatterone od altro apparato di legnami; penso però che così non sia perchè colà lo scandaglio, spinto al di sotto, non incontrò resi-

stenza e perchè là giù trovai essere il terreno denso, misto di sabbia fluviatile e marina; però la perfetta regolarità che si osserva nel rivestimento mi fa sospettare che sotto, o davanti di esso, siavi un qualche ostacolo forse di legname che gli abbia impedito percorrere sulla propria base verso il canale. La sassaja è a gettata, o, come si suol dire, a pietra perduta.

Quanto poi alla qualità dei materiali ed alla loro provenienza posso asserire che i mattoni, ossieno le pietre cotte, sono della medesima qualità, per creta, per impasto e per cottura, come anche per le misure identiche a quelle che si usavano nelle fabbriche dell' antichissima *Altino;* che la sassaja è composta di trachite euganea, volgarmente masegna, in pezzi parte angolari, e parte a grossi ciottoli, e che di pietra calcare d' Istria lavorata sono, come ancora diceva, li corsi o filari della fronte o del rivestimento che ho potuti vedere.

Spero dunque di appormi al vero, se dalle maschie misure che ho riferite e dalla situazione ove l'ho scoperto mi persuado: 1.° Che questo grande manufatto era opera pubblica diretta a pubblica utilità; 2.° che serviva ad uffizio importante e di vantaggio municipale; 3.° e finalmente che in tempi abbastanza precisi venne posto a difendere dal tocco di una corrente viva e costante il lembo di quella terra, fosse dosso o tumba, che ebbe poscia nel secolo XII il nome d' isola delle Vergini, ed è perciò da considerarsi come opera idraulica, i quali assunti procurerò, per quanto in me sia, di sviluppare e provare nel seguito di questo mio ragionamento.

Per inoltrarmi in queste investigazioni e per riuscirne con qualche utilità, sta nella natura dell' intrapresa trattazione che io procuri determinare, anzi tutto, a quale corrente di acqua quel molo, quella valida barriera era destinata a resistere; su di che mi è duopo richiamare la cortese vostra attenzione su quanto in fatto di queste lagune, de' suoi canali e delle sue isolette poco fa ricordava, bisognandomi ora toccare a più minuti, ma più essenziali particolari.

Qualora io mi faccia a considerare l' antica idrografia delle lagune e delle paludi, che in lungo arco distese, sono appendici al vicino continente, quale ci viene rappresentata da Polibio, da Strabone, da Plinio e da altri autori, a' quali il comun voto de' critici, più o meno, accorda diritto di autorità storiche, e ciò che egualmente vale fama di esatti scrittori; se la raffronto all' idrografia de' secoli di mezzo ed anco alla moderna topografia del paese più interno a noi circostante; e qualora, usando di ben dovuta circospezione e riserva, io mi faccia ad

esaminare le carte congetturali pubblicate da Bernardo Trevisano (1), dal nostro Temanza, da Bernardino Zendrini, dall' erudito Filiasi, in parte ripubblicate dallo straniero Giovan Federico Le Bret, storico critico delle cose veneziane, ed assegni ad esse quella misura d' attendibilità e di fiducia che può meritare la natura di loro genesi: finalmente, se me ne valgo e se metto a profitto le osservazioni locali da me istituite sulla disposizione, sull' andamento, sulla tortuosità de' nostri primarj canali, e sulla qualità del terreno e degli strati che incontransi al loro fondo, per tutti questi confronti e pelle considerazioni che ne derivano m' è giocoforza ammettere, come cosa incontrastabile e come principio di fatto.

Che molto prima del secolo XIV un branco del *Medoaco maggiore,* da poi denominato Brenta, il quale col *Retrone* passava nelle vicinanze di Padova, staccavasi al sito dell'odierno Fiesso *(Flexus)* dove assumeva il nome di fiume *Una* ovvero Prealto.

Che lambiva alcuni vici o borgate, il cui nome, benchè con varietà di suono, tuttavia si ricorda.

Che giunto questo branco ne' dintorni di *Lizza Fusina* sboccava in laguna.

Che ivi scorreva frammezzo alle paludi per un alveo tuttora distinto col nome di *canale de' Burchi,* già *fiume vecchio,* ed anco *ramo di Brenta* (2).

Che giunto a non grande distanza dal *Tumolo* o *Barro,* fra noi celebre un giorno col nome *Luporum vadus,* ovvero *Punta dei lovi,* già sporgente dalla

(1) *Della laguna di Venezia,* trattato di Bernardo Trevisano. — Edizione seconda, Venezia 1718, pag. 17, e 45.

Nell' edizione 1715, pag. 17, e 49.

Temanza Tommaso — *Dissertazione sopra l' antichissimo territorio di sant' Ilario nella diocesi di Olivolo.* — Venezia 1761, 4.°, tavole I, V, VI.

Pensieri d' un cittadino (Girolamo Ascanio Giustinian) *sul fiume Brenta.* — Riporta la tavola I, V e VI del Temanza e la tavola I dello Zendrini.

Filiasi Jacopo — *Memorie storiche de' Veneti primi e secondi.* — Padova 1811, tomo III e V.

Zendrini Bernardino — *Memorie storiche dello stato antico e moderno delle lagune di Venezia.* — Padova 1811, 4.° Tomo I, tavola I.

Johann Friedrich-Le-Bret. — *Stantsgeschichte der republik Venedig, etc.* — Leipzig und Riga 1769. Volume I, libro III, cap. IX, § 16, pag. 158, 159, riproduce due tavole, una del Temanza a pag. 44, altra dello stesso a pag. 150.

(2) Questi nomi si leggono anco in foglio a stampa rarissimo che sembra del secolo XVI, rappresentante la laguna media, e precisamente tra sant'Andrea della Certosa ed il canale Spignon, che versa nel bacino interno del porto di Malamocco.

terra-ferma, ivi si divideva in due rami, di cui uno, ed era il sinistro, piegando alquanto verso tramontana, prendeva la strada del nostro *Canal grande.*

Che al sito ove ora sta la chiesa di san Geremia, capitava ad ingrossarlo porzione delle acque de' fiumicelli *Mestria* o *Marzinicus,* del *Butinicus,* del *Muxon,* del *Tergula* e del *Pionca,* le quali, passate pe' bassi fondi in laguna tuttora indicati col nome di *Sottobrenta,* vi si meschiavano pell' odierno *rivo di Canaregio,* e così progredivano unite fra l' antico Rialto e fino alla punta di *Dorsoduro* e *Scopulo,* detta della Trinità, la quale ora chiamiamo *Punta della dogana da mare.*

L' altra porzione d' acqua di codesti fiumicelli variamente serpeggianti correva a tramontana delle isole, e riunita in un canale, cui davasi il nome di *Canale biria,* continuava via via fino all' isola di *Olivolo* o san Pietro di Castello.

La seconda branca del ridetto fiume *Una* o *Prealto,* da quelle vicinanze della ricordata *Punta dei lovi,* piegava invece suo cammino a destra; incontrava per via parte delle acque dello stesso *fiume Una,* che divergeva presso *Lizza Fusina,* incontrava le acque del *Visignon,* del *Lenzina,* del canale de *Vico,* discendenti dal margine tra *Lizza Fusina* e quello dove fu la borgata, coll' abbazia di *Sant' Ilario* di fronte all' isoletta *Sant' Angelo di Contorta,* infletteva fra i tumuli o dossi di *Spinalunga,* ora isola della Giudecca a mezzogiorno, e le gore e tumbe che denominavansi di *Scopulo* e di *Dorsoduro* a tramontana, costituendo appunto il canale *Visignon,* quello medesimo ora denominato *canale della Giudecca.*

Alla punta della Trinità, le due descritte branche si riscontravano, ed assieme riunite, parte lambendo, parte internandosi e circondando le isolette *Zimole* o *Gemole, Bragola, l'Adrio,* ec. giungevano presso l' isola di *Olivolo,* al qual punto, porzione progrediva pella *punta verde,* ora *Motta dei giardini* verso il porto; altra entrava pel canale san Pietro, oltre il quale incontrava l'acqua del *Biria* e spingevasi con questa allo stesso vicino porto *Olivolo,* dove finalmente tutte affatto sgorgavano.

Ecco dunque correnti d' acque dolci, correnti vivaci e gagliarde, se valsero a dare ed a far che rimanga fra noi conservato il nome degli alvei che da esse erano solcati nel profondo della laguna; ecco dimostrata la possibilità di avere tanti molini in queste isolette quanti ne accennano i nostri cronisti, e molini fermi, e molini a *sandonos,* cioè su barche galleggianti, e ciò che chiamavano

Aquimoli (1), che a me pare esser dovessero, non già spazj entro a' quali fosse a taluno concessa la facoltà di porre molini, come alcuni pensano; ma credo che fossero piuttosto *moli da acqua*, fossero ricinti assegnati per *chiusure o pescaje*, entro a' quali ne' periodi della marea montante, o del flusso, radunare una maggiore quantità d'acqua di fiume, e condurla verso i molini; ecco molini ove ora è san Benedetto sul canal grande; eccone a' margini dell'isola *Memmia*, ora san Giorgio maggiore; molini alle isole *Zimole* o *Gemole*; molini a san Lorenzo, presso il sito *Bragola*, forse vocabolo composto di *Brago* e *gora*, posti in movimento dalle acque dell'*Una* o *Prealto*, dal *Visignon*, ec.; ecco molini a *Canaregio*, eccone a *san Daniele*, ove adesso sta il riparto dell' arsenale detto novissimo (2), i quali erano mossi dalle acque congregate nel *Biria*, e da porzione di quelle scorrenti lungo la parte opposta delle isole, che pegli antichi rivi di san Lorenzo, di san Francesco, per quello di san Domenico, ora strada de' giardini, pel canale che ora è detto di san Giuseppe, e finalmente per altro ampio canale, traversante il sito ove ora si allunga la motta detta di *sant'Antonio* o de' giardini, interrato allora della peste 1630 (3), vi penetravano, quelli appunto essendo gli alvei antichi naturali, che quando la terra era in quel tratto assai più ristretta servivano alla reciproca comunicazione di codeste acque.

Queste isolette, ne' vecchi tempi, non marginate da muraglie come ora sono, si trovavano esposte a continui dilavamenti ed a corrosioni sia pelle correnti dolci che accrescevano di forza, o diminuivano secondo l' avvicendarsi delle maree, sia pell' alternativa periodica delle stesse maree, dal che il bisogno di provvedere alla loro sussistenza, alla loro preservazione, co' mezzi artifiziali suggeriti dalle varie circostanze a' quali ricorsero sovente i padri nostri, ed è questo un riflesso che torna a proposito dell' opera murale da me scoperta, la quale sempre più mi confermo in credere che colà fosse disposta a presidiare il lembo dei terreni a levante dell' isola de' *santi Giovanni e Paolo* (più tardi così nominata per una chiesetta a que' santi dedicata su quel paludo) (4), ed

(1) Gallicciolli — *Memorie, ec.* — Tomo I, pag. 309 e seguenti.

(2) Casoni — *Breve storia dell' arsenale di Venezia.* 1847, 4.°

(3) Casoni. — *La peste di Venezia dell'anno* 1630. Origine del tempio di santa Maria della Salute. — Venezia 1830, 8.°

(4) *De monasterio sanctae Mariae de Virginibus. Ecclesiae venetae antiquis monumentis illustratae: auctore* Flaminio Cornelio S. V. — Venezia 1789. Decad. VI, pag. 2 e seg.

Cornaro Flaminio S. V. — *Notizie storiche delle chiese e monasteri di Venezia e di Torcello.* — Padova, 1758, in 4.°, pag. 93 e seg.

ora isola delle Vergini, dall' urto incessante prodotto dalle acque dolci, correnti che ivi piombavano dal lato meridionale pei canali o veicoli da me poco stante accennati.

La stessa descrizione topografica di questi siti mi fa egualmente credere, e forse, signori, sarete dello stesso mio avviso, che la comunicazione tra *Padova* ed i fondaci o magazzini nelle isolette di *Rialto* pel *fiume Una,* poi per gli alvei della laguna e fino all'antico porto di Olivolo, ora san Nicolò del Lido; era la più corta, la più facile, la più opportuna al commercio de' padovani, e perciò che loro non occorreva allungare il cammino fino ad un supposto porto intermedio fra questo di Olivolo e quello di Malamocco, come, appoggiato ad una sentenza del 1284, inserita nel famoso *Codice del Piovego,* supponeva il celebre Temanza (1), alla cui autorità non ardirei contrastare, nè mi opporrei in quanto un porto intermedio vi fosse più al nord del paese di Malamocco antico; ma nessuna traccia o memoria d' un varco o passaggio rimane su quel litorale, nè indizio alcuno di canale che a quella via del continente percorresse, come egli stesso, il Temanza, dichiara: circostanze in vero poco favorevoli a quella sua opinione, e bastami aver provato, quasi per legittima deduzione, che in ogni tempo si servivano pe' loro traffichi alla via di mare, del ripetuto porto di Olivolo, siccome quello, che anco ne' secoli posteriori, e fino quando la marina soggiacque ad essenziale modificazione nella forma e nella portata dei navigli, ha sempre servito a' bisogni di una fra le primarie potenze marittime, come fu la veneziana fino alla crisi commerciale del XV secolo.

Dalle quali mie osservazioni vengo a inferire che in quei tempi l' azione dei molini, in queste lagune era favorita specialmente dalle correnti de' fiumi, in che mi allontano dal Gallicciolli (2), il quale sembra la ascriva a' soli moti del flusso e del riflusso marino, effetto che dal più al meno seguirebbe anco adesso, ciò che non accade, malgrado accurati tentativi ed esperienze fatte anco di recente. Inoltre poi credo che le diversioni del Brenta ne' suoi tronchi inferiori più volte tentate da' padovani anche nel XII secolo, intendevano, a quanto parmi, a privare i veneziani del grande benefizio che ad essi recavano quelle acque stesse (3), vantaggio cui nel XIV secolo volontariamente rinunziarono

(1) Temanza Tommaso — *Dissertazione sopra l' antichissimo territorio di sant' Ilario nella diocesi di Olivolo.* — Venezia, 1761, 4.°, pag. XVIII e seg.

(2) Gallicciolli — *Memorie, ec.* — Tomo I, pag. 208 e seg.

(3) Temanza Tommaso — *Lettera intorno ai tagli fatti dai padovani nella Brenta l' anno* 1143. — Venezia 1816, pag. 114 e seg.

per gli acquisti fatti nella terraferma, e per l' esilio dei fiumi dalle lagune, che altrove rivolsero.

Forse alcuno dirà che oltre misura ammetto in queste isolette l' ingerenza de' padovani; pure credo in così fare di non male avvisarmi, stantechè essi ne perdettero definitivamente l' uso, quando la sede ducale de' veneziani, da *Malamocco* venne trasferita a *Rialto,* ed allora Rialto divenne città; allora, o poco dopo, cambiava il nome in quello di Venezia. Dichiaro però, e con ischiettezza il pronuncio, che ciò dicendo non penso ammettere le asserzioni del così detto *monumento Patavino* (1), dopo che con erudita dimostrazione venne smascherato dal Gallicciolli, che con invincibili argomenti lo provava apocrifo e bugiardo; ma questa città per opera de' veneziani cominciava a sorgere, come dissi, solo al principiare del IX secolo, quando *Angelo Partecipazio* doge decimo, qui stabiliva quel seggio, e la stessa chiesa di san Giacomo in Rialto fabbricata nel 421 da un *Entinopo di Candia,* e con essa varie altre chiese, a mio parere, sorgevano sotto gli auspicii de' padovani, che, pella preponderanza dei nostri, più tardi e per sempre da qui sgombrarono.

Per queste medesime ragioni inferisco che la famosa lettera di Cassiodoro ai tribuni marittimi (2), se per avventura non era diretta a' padovani, lo era invece a' veneti rifugiati nell' isola di *Eraclea* (3), primo luogo di loro convegno, ed Eraclea, con *Jesolo* ed *Equilio,* aveva suo porto all' antica foce del Piave per dove ora scarica il *fiume Sile,* anzi a sinistra di esso porto anticamente innalzavasi una torre di faro, pella custodia e pel servizio della quale furono emanate leggi anco nel 1282, e questo appunto di *Jesolo* (4) pell' opportunità del sito è stato il primario porto usato da' nostri antenati, come egualmente l' altro di *Olivolo* era da' padovani adoperato, come testè ricordava.

E su questo proposito de' tribuni marittimi e della lettera loro inviata dal ministro di *Teodorico,* parmi che il Gallicciolli abbia versato in un anacronismo, colà dove dice: *Successivamente* (cioè dopo trasportata la sede in Rialto)

(1) Gallicciolli Giov. Batt. — *Delle memorie, ec.* — Tomo II, pag. 337 e seg.

Qui le chiese di allora consistevano in piccoli tugurj di legno coperti di paglia. Vedasi il succitato Gallicciolli, tomo III, pag. 27 e seg.

(2) M. Aurelii Cassiodori Senatoris V. D. — *Opera omnia* Apud Philippum Pamonet; 4.°, pag. 406. *Tribunis maritimorum senator Pref. Pret. XXIV.*

(3) *Chronicon venetum,* Johanni Sagornino, vulgo *tributum.* — Venetiis 1765, pag. 5.

(4) Filiasi Jacopo — *Memorie storiche de' veneti primi e secondi.* — Padova 1811, 8.° tomo III, pag. 115.

i nostri tribuni presero l' appellazione di marittimi, come consta dalla celebre lettera di Cassiodoro ad Tribunos marittimos (1); imperciocchè Teodorico divenne padrone d' Italia dopo l' anno 493 e morì li 30 agosto del 526 e Cassiodoro in età quasi di 92 anni cessava nel 562 ; come dunque quella lettera poteva esser diretta a' tribuni di Rivoalto, i quali, secondo lo stesso Gallicciolli, presero nome di marittimi dopo l' anno 809 (2), cioè quasi due secoli e mezzo dopo la morte di quell' insigne epistolografo ?

Ciò posto sembrami abbastanza provato per induzione esservi errore in tutte le iscrizioni ed altri monumenti che qui abbiamo datati *AB-VRBE-CONDITA,* quando però, come quella esistente sulla porta del nostro arsenale, riferiscano all'anno 421, che è quello appunto del già nominato Entinopo di Creta, e quello pur anco del ricordato monumento patavino, che tutti, meno il Darù, sanno essere un' antica impostura. Questo è dir molto, ma la serie ordinata degli avvenimenti, le osservazioni fatte dal Gallicciolli e queste mie deduzioni conducono a tale concludente sviluppo.

Poichè il discorso mi portava a nominare *Eraclea,* dalla cronica sagornina annoverata per *quarta quidem insula, in qua dudum ab Heraclio imperatore fuerat civitas magnopere constructa, etc.,* noterò che oggi giorno ancora quel suo sito, ove in mezzo al putridume di affondate paludi s' innalzano poche gibbosità, denominate le *motte di Cittanova,* composte di rottami e di macerie, quel sito, dissi, di figura oblunga disteso dal nord al sud circondato da vetusti alvei o piuttosto da più bassi pantani, presenta le traccie ed i caratteri più manifesti di antica isola, oltre alla quale, dalla parte verso Jesolo, oggi misero villaggio *Cava zuccarina,* avvi altro spazio che i pochi e malinconici abitatori del vicinato chiamano alle *archette,* perchè vedono da quell' immonda salamoja tratto tratto spuntare le estremità di sarcofaghi ivi dispersi ed affondati, su quali fin ora non si è rimarcata iscrizione di sorte alcuna, ma che da alcuni segni sembrano appartenere ad una necropoli cristiana ; nel qual caso crederei che quella ad *Eraclea* e ad *Equilio* e *Jesolo* promiscuamente servisse, prima cioè che si suscitassero dissidj tra quei cittadini, alle quali considerazioni mi hanno di molto giovato alcune gite che molti anni addietro ho colà fatte e le informazioni ricavate dai proprietarj di que' fondi, e soprattutto mi è stata di grande soccorso

(1) Gallicciolli. — *Delle Memorie, ec.* — Tomo I, pag. 323.

(2) Moreri — *Le Grand Dictionnaire historique.* — Paris 1718, tomo V, pag. 70, 71 e tomo II, pag. 135.

una topografia a penna, che rappresenta il corso delle acque del basso trivigiano, con parte della laguna veneta, rilevata da un *Domenico Marchetti,* che ho conosciuto di persona, perito ingegnere del magistrato eccellentissimo alle acque (1), per pubblica commissione, e che reca la data 27 febbrajo 1788, more veneto, cioè 1789. Ma io che parlo di correnti mi sono lasciato trasportare quasi fuori di strada dalla corrente di erudizione, forse affibbiata male a proposito: ripiglio quindi il mio assunto.

Ma quando e da chi codesto edifizio murale, codesta opera idraulica venne fatta eseguire? egli è questo un quesito per me di non facile scioglimento. Due cose però potrebbero favorirmi in tali ricerche: *La qualità e la provenienza de' materiali, co' quali è composto; l'antica linea di comune alta marea cui poterlo riferire.* Che se la prima indagine è per sè stessa scabrosa, altrettanto difficile e circondato di tenebre e d' incertezze è lo studio della seconda, causa i moltiplici e non bene determinati elementi che producono le differenze e le oscillazioni nel livello ordinario de' mari, per cui ogni analogia, ogni proporzione fra tempo e misura non corrisponde ai fatti, nè da quei criterii di calcolo possono aversi che risultamenti ipotetici, incoerenti, che si discostano dalla verità di che ne abbiamo a dovizia le prove e gli esempi.

Pure se si volesse ritenere per uno dei dati che, allora di questa costruzione, il livello ordinario dell' alta marea toccasse al segno, che per gli esposti raziocinj su quel profilo ho indicato, e che cade a metri 2.150 sotto la linea dell' odierno flusso; questa differenza tra il culmine delle due maree montanti, ammesse le deduzioni del chiarissimo nostro che fu *Angelo Zendrini* e quelle pur anco del rinomato ingegnere *Emilio Campilanzi* (2), entrambi i quali

(1) In questa grande delineazione figurano i siti ove esisteva *Eraclea, Melidissa* o *Ciltanova,* di *Jesolo* ed *Equilio.*

Lo spazio di Eraclea è di figura oblunga e si estende dal nord al sud quasi il doppio che dall' altro verso; gli antichi alvei che lo circondano sono:

Verso tramontana	— *Ramo di canal.*
Verso levante	— *Canal di san Bernardo.*
Verso mezzogiorno	— *Canale dei stretti.*
Verso ponente	— *Canale Cieeregna e la palude del Prete, già*

lago del Piave, e che pare fosse anticamente un' insenata di mare.

(2) *Sull' alzamento del livello del mare.* — Memoria dell' abate Angelo Zendrini, 1806.

Nuove ricerche sull' alzamento del livello del mare. — Di Angelo Zendrini, memoria tratta dagli atti dell' i. r. Istituto di scienze, lettere ed arti. Milano 1821.

Sulla corrispondenza dei cangiamenti del livello del mare osservati negli avanzi del tempio di Serapide. — Memoria dell' ingegnere Emilio Campilanzi, inserita a pag. 51 del fascicolo pel bimestre 2.°, anno 1840, degli Annali delle scienze del regno lombardo-veneto. Padova.

con poca diversità sentenziano essere il progressivo apparente alzamento del livello del mare in queste regioni, prossimamente di metri 0.100 per ogni secolo, allora quel manufatto murale rimonterebbe alla età di XXI secoli, circa che potrebbe dirsi prossima al vero, se tante cause e tanto svariate non si frammettessero ad accrescere il dubbio ed a dimostrare quella misura al pari suscettibile di aumento o di diminuzione.

Ma di diminuzione, in questo caso, anzi di grande diminuzione, a me pare debba soggiacere quella misura di XXI secoli, quando volga il pensiero al peso specifico de' materiali, alla sassaja gettata su d' un fondo incerto, alla mancanza di palizzate e di zatteroni o griglie che servito avrebbero a costipare il terreno, a tener assieme ed a solidare la base, e quando penso all'azione delle correnti cui indubbiamente, ne'primi secoli di sua esistenza trovavasi esposta quell' opera, e finalmente quando osservo la sensibilissima inclinazione, verso l' interno dell' isola che ho rimarcata appena comparsa a giorno la superficie della muratura a mattoni di cotto, e l' altra inclinazione in senso di lunghezza verso il mezzo del canale san Pietro, scorgo in ciò tante cause, le quali concorrono ad assicurarmi esser ivi accaduti grandi avvallamenti in quel nesso, tanto uniformi quanto parziali e notevoli depressioni a' sottoposti strati del suolo, tutto indipendentemente dal livello del mare, il perchè mi confermo nel parere che quei XXI secoli ridurre si possano ad un assai minore periodo, la quale riduzione, che partirebbe da dati affatto ipotetici, darebbe anche espressioni inesatte e di puro azzardo, laonde rifiuto di più vagare in una via buja, dove non ho lusinga di scorgere lume alcuno cui poter affidarmi.

Forse miglior guida mi sarà l' esame de' materiali, perchè la qualità loro e la provenienza in qualche modo si annodano alla storia di queste isolette. Difatti, cominciando dalle pietre o mattoni cotti che sono di *Altino,* me ne avvidi che i qui adoprati sono vecchi, che appartenevano già ad un fabbricato anteriore, e perciò qui da colà trasportati, forse nel VII secolo, quando cioè la sede vescovile venne da *Altino* trasportata a *Torcello* da un vescovo *Paolo,* come sta nella *Cronaca Altinate* (1), e con più di probabilità al principiare del IX secolo, allora quando quella misera città, un tempo residenza d' imperatori, e stazione al passaggio delle legioni romane, per amenità di sito, e pella ridente ubertà dei suoi lidi, emulava l' incantevole baja, causa le ripetute invasioni de' barbari mi-

(1) *Chronicon venetum, quod altinate nuncupatur.* — Archivio storico italiano, tomo VII, pag. 36 e seg., pag. 54 e seg.

seramente depauperata, resa deserta de' suoi abitatori, distrutta finalmente e rasa da' fondamenti, quei magnifici suoi ruderi si tolsero per vestire e per impellicciare i nuovi fabbricati di Torcello, di Venezia, e delle altre isole nella parte superiore dell' estuario, null' altro restando in quel sito che un tumulo, un mucchio di rottami e di frantumi (1), e quel celebre nome, che ora si ripete nello squallore e nella solitudine di malsane paludi, davanti gli avanzi colossali della strada romana, che col nome di *Claudia Emilia Altinate* (ora Agozzo) staccandosi dall' *Emilia Parmense* (2), traversava regioni e provincie fino al lontano Danubio.

Ne' primi secoli, posteriori alla traslocazione del trono ducale in Rialto, i materiali pelle costruzioni si limitavano a pochi e vecchi quadroni di terra cotta de' tempi romani, alle pietre ossia mattoni cotti asportati da *Altino,* da dove a miriadi ne giungevano, ed era per allora superfluo confezionarne di nuovi, ed alla masegna o *trachite dei monti Euganei.* Poco uso allora facevasi di quella specie di pietra *japidica,* che questi artieri distinguono col nome di *pietra bandita,* la quale sembra essere qui comparsa poco dopo la spedizione del doge *Ordelafo Faliero* nella Croazia, ciocchè avvenne nel 1117, stando alle tavole cronologiche dell'eruditissimo nostro Cicogna. Anco la pietra rossa di Verona era impiegata in gran copia. Più tardi si è adoprata, con maggior profusione nelle più grandi fabbricazioni, la pietra calcare d' Istria, dopo cioè la conquista di Pola, città in quella penisola fatta da' veneziani nel 1146 essendo doge *Pietro Polani,* le quali mie indicazioni, oltrechè appoggiate all'autorità degli scrittori delle cose nostre, e per di più corroborate dal fatto, potendo io medesimo assicurare che qui dove nacqui e dove ho esercitata l' arte mia d' ingegnere, fui testimonio a più e più demolizioni, ho veduti intieri fabbricati di sole pietre altinati e gran numero di muraglie qua e colà con que' mattoni costruite, in guisa, che senza punto esitare potrei dichiarire che il caseggiato di Venezia consta per forse $^1/_5$ di *altinelle* e *mattonelle,* che appunto con questi nomi vengono distinti quei materiali.

Molti egualmente sono gli edifizii, le cui basi e le parti sporgenti sono di

(1) Filiasi — *Memorie storiche de' veneti primi e secondi.* — Padova 1811, tomo II, pag. 246, 245 e seguenti.

(2) Filiasi — *Memorie de' veneti primi e secondi.* — Padova, 1812, 4.°, tomo V, tavola unica e tomo II, pag. 258 e seg.

Guarnieri Ottoni-Aurelio — *Dissertazione intorno al corso dell'antica via Claudia dalla città di Altino sino al fiume Danubio.* — Bassano 1789, 4.°

masegna euganea; il basamento della torre di san Marco (1), cominciata circa il 910, è di quel materiale, ma causa il continuo sovrapporsi di nuovi imbonimenti e di selciati alle piazze ed alle strade della città per liberarle dalle sopracomuni alte maree, quel basamento, colla porta antica che in esso si apriva, rimase poco a poco sotterra nascosto, e solamente ora si può vederne l'ultimo corso o rango superiore, ricoperto di tavole e che serve di sedile entro le botteguccie de' *scribi* e de' *mediatori* e de' *goli* (2), che colà in agguato tengono occhio di lince sui movimenti degli affaccendati.

Quell' *Angelo* od *Agnello Partecipazio* più volte qui nominato, che l'anno 814 sedette primo doge in Rialto, vien proclamato dalle cronache e dalle storie quale uomo di senno, di moderazione e grandemente interessato a' vantaggi ed all'incremento di questo Rialto, avvedutamente da lui scelto fra le tante isole della laguna, che assumer poi doveva nuovo nome e nuova destinazione (3). Prima cura di lui si fu stabilire stanza condegna alla sovrana magistratura, il perchè, lasciata l'antica sede tribunizia de' padovani ne' confini dei *santi Apostoli,* ove qualche dubbia traccia vorrebbesi scorgere fra le mura di un vecchio fabbricato, come n' era persuaso il chiarissimo nostro che fu canonico Giovanni Antonio cavaliere Moschini, dispose le fondamenta di nuovo palazzo in sito più aprico e più cospicuo presso una chiesa di *san Teodoro* (4), che per questo divenne cappella ducale, prima di *san Marco,* acquistando più splendida forma e più decorosa che non quella di *san Giacomo,* fabbricata dal greco Entinopo circa quattro secoli prima di allora.

Prova del genio intraprendente ed operoso di quest' uomo e dell' affetto ch' egli nutriva a vantaggio della nazione che lo avea eletto a suo capo si è la

(1) Gallicciolli — *Delle Memorie venete, ec.* — Tomo I, pag. 237, Venezia 1795.

(2) *Goli.* — Con questo nome erano anticamente chiamati i sensali di matrimonii nelle pubbliche carte.

(3) *Assumer poi doveva,* ec. secondo il Gallicciolli, tomo I, pag. 138 dice: *sebbene non prima del finire del XII secolo a me riuscì di trovare Venezia e Rialto appellati col nome di città.*

Bernardo Trevisano, nel suo *Trattato della laguna di Venezia,* edizione 1718, a pag. 57 tiene col de-Monacis e collo Zeno nell' opera: *Origine de' Barbari,* che queste isole abbiano ricevuto il titolo di città ed il nome di Venezia nel 569. Io però colla scorta delle fatte argomentazioni mi trovo autorizzato ad opinare diversamente.

(4) Gallicciolli D. Gio. Batt. — *Delle Memorie venete antiche profane ed ecclesiastiche.* — Venezia 1795, tomo I, pag. 193.

Moschini Gio.^r Antonio. — *Nuova guida per Venezia.* — Venezia 1840, pag. 69. *Qui presso ov' è la corte del Verde, sede dei tribuni, restandovi tuttora vestigi di torri, archi e volte e grandi traccie di luoghi di magistrati specialmente nella casa al n.° 5251.*

cura datasi in riedificare la desolata *Eraclea* (1) cui diede il nome di *Città nuova,* ed anco la premura di rimettere la vicina *Equilio,* onde non è a sorprendersi se alacrità e solerzia egli ponesse pel migliore adattamento e pel migliore ben' essere di queste isolette, e se adoprando di sua posizione elevata, le infondesse anco negli ottimati che gli stavano d' intorno.

Anche i privati cittadini, facendo a gara co' lori governatori, allargavano i ricinti proprj, accrescevano i comodi alle loro abitazioni, e tutti infine miravano a procurare decoro e lustro a queste isolette: ma quello che merita speciale ricordanza è la efficacia degli ordini da quel doge divulgati, fra cui primeggia la istituzione de' *ponti* per congiungere le varie isole, separate da' canali e dai braghi, con che le reciproche comunicazioni si rendessero più spedite e più agevoli.

Penetrato dalle sgraziate vicende alle quali di continuo erano sottoposte le più lontane isole *Ammiana, Marcellina,* e *Costanziaco* pelle correnti de' fiumi e pelle furiose procelle del mare, che mano a mano scalzandone il suolo portavano la rovina ai maestosi edifizii, di che, quasi esse fossero sobborghi d'Altino, erano decorate, il perchè accrescevasi lo spavento degli abitatori che più tardi terminarono coll' abbandonarle del tutto, pensò quel doge essere oggetto di primaria importanza che i margini di queste isole *Rialtine,* come quelle egualmente esposte alla corrente de' fiumi ed all'azione delle maree, fossero presidiati da palizzate e da muraglie, ciocchè divenne un dovere de' proprietarj, ma un dovere avvedutamente blandito dalla concessione di dilatare i loro poderi, d' interrare a tale scopo le piscine e le gore d' intorno, e dalla facoltà di erigere chiese su que' nuovi imbonimenti e forse, moderando in ciò le antiche discipline della chiesa d'occidente, nominarvi il *plebano,* diritto solenne, che più tardi, quando cioè le proprietà delle singole isole andarono suddivise, rimase ai possessori delle case ne' rispettivi circondarj fino al cadere della repubblica e dopo ancora.

Con queste vigorose, ma salutari misure, sostenute dall' autorità di apposito magistrato istituito dal doge medesimo anco pella sopravveglianza degl' interramenti e delle bonificazioni, la città divenne più ampia (2), più unita, più estesa per ogni verso e perciò capace a ricoverare maggior numero di abitatori e di

(1) Filiasi — *Memorie storiche dei veneti primi e secondi.* — Tomo VI, pag. 11 e seguenti. Padova 1812, 8.°

(2) Trevisano Bernardo. — *Trattato sulla laguna.* — Pag. 27.

Temanza Tommaso. — *Antica pianta dell' inclita città di Venezia.* — Venezia 1781, pag. 55.

accogliere i fuggiaschi che dalle altre isole della Venezia e dalle città di terraferma, per sottrarsi alle incessanti sevizie de' barbari riparavano in esse.

Egli è facile pensare che questo genere di lavori, operati da privati cittadini, comunque in generale e nel loro complesso diretti a pubblica utilità, ciò non pertanto essere non potevano nè di essenziale efficacia, nè di sussistenza perenne, perchè non lo comportavano gli scarsi mezzi di loro facoltà che gli obbligavano a provvedere più presto a quello che direttamente importava all' immediato loro interesse: da ciò ne conseguiva, com' è di ragione, che i presidj maggiori, le opere di più estesa rilevanza, dovevano stare a carico, come ognora succede, di chi presiedeva alle pubbliche cose, quindi essere intrapresi dalle forze riunite della nazione; ed io credo che la grande opera murale della quale tratto, e che veramente è un *molo,* sia appunto eseguita con l' impiego, in quanto a pietra d' Istria, di materiale vecchio tolto in *Altino,* come fatto aveasi delle *pietre cotte,* ed appartenga a' tempi di quel provvidentissimo doge dall' 809 all' 827, od almeno a quel torno, poichè dotato egli com' era di non comune talento, colla propria influenza morale sapeva guadagnarsi l' altrui fiducia, sapea conservarsela, e trarre i bene impressionati ne' suoi generosi divisamenti.

Che quell' opera fosse di primiera rilevanza, me ne fa persuaso oltrechè la mole, anco la sua posizione su quel lembo, fra tutti il più esposto all'urto della corrente, la maggiore che dilavasse queste isole e che poco fa ho descritta. Ivi appunto tutte le acque riunivansi provenienti dall'alveo dell'ora *canal grande* e dal *canal Visignon,* che ne' periodi del riflusso assai vivaci esser doveano e rigogliose, e per questo canale di Olivolo percorrevano una via più corta verso il porto onde insorgeva il bisogno di opporre un *molo* poderoso per rintuzzare quelle acque stesse e per divergerne possibilmente una parte al mezzogiorno di *Olivolo* e difendere così dalle corrosioni quell' isola delle Realtine la estrema, posta sul canale di Olivolo stessa, soggetta, non solamente a questi attacchi, ma eziandio a quelli del *canale Biria* che la rodeva all' altro lato di tramontana, periglio di cui grandemente se ne temeva anco alla metà del XIV secolo, per quanto lasciò scritto *Bernardo Trevisano,* e che venne tolto quando nel XV secolo la repubblica ingrandiva l' arsenale con la terza aggiunta che si conosce col nome *Arsenale novissimo grande* (1).

(1) Trevisano Bernardo. — *Della laguna di Venezia,* trattato — Edizione II, 1718, a pag. 72.
Casoni Giovanni — *Breve storia dell' arsenale di Venezia.* — Venezia 1847, compresa nell' opera: *Venezia e le sue lagune.* — Vol. I, parte II, pag. 84 e seg.

La traccia di quel molo, da me rilevata sul luogo, e con accuratezza delineata sul piano che avete sott' occhio, mostra che quegli era colà posto con tutta proprietà a sostenere l' urto obbliquo di una corrente che proveniva dal sud, lo che tanto più rinfranca le mie congetture e serve altresì a dimostrare che fra noi, in quell' età, fra tutte nefasta per eccessi di violenza e di arbitrio, non erano poste in dimenticanza le semplici leggi pratiche di una idrodinamica naturale.

Mi si chiederà e a buon dritto, perchè non assegni questo manufatto ad un' età più lontana che non al principio del IX secolo, al quale proposito, se mi si parlasse di ciò che tocca al riferimento delle *maree,* tornerò a dire : prima che avrei potuto determinare il segno antico di comune ad un limite più alto, lo che stava in mio arbitrio e così mi sarei tolto d' imbarazzo, facile allora essendomi combinare le differenze ; ma la smania di riuscire in un assunto non mi farà mai rinunziare all' intimo convincimento, e però tengo fermo il segno indicato ; poi non trovo appoggio per valutare con positivo giudizio, nel caso che lo riguarda, la differenza nell' apparente livello del mare come in addietro ho fatto conoscere, e che non è questo per altra parte egualmente il caso di ricorrere ad *epoche geologiche,* laonde per questa via non riescendomi avere un dato neppur approssimativo abbandonava colla speranza anco il pensiero di riuscirvi. In secondo luogo me ne distoglie la qualità dell' assieme ; la maniera con che trovo ridossato il rivestimento alla sassaia, senza cioè quelle tali precauzioni dell' arte, che, a malgrado le grandi misure di quel progetto, fanno supporre una tal quale economia, una ristrettezza di mezzi più confacente ad un potere incipiente, che non ad una provetta autorità amministrativa. Si aggiunge ad alienarmene, l' uso che si è fatto di barre di ferro per tenere congiunti i massi in senso longitudinale, ben sapendo quanto gli antichi erano parchi, anzi alieni dall' impiegare quel metallo nelle loro costruzioni, causa la grande facilità di alterare volume e figura a danno degli altri materiali posti al suo contatto, e come essi saggiamente preferivano, quando occorrevano duroni od altri mezzi di congiunzione, il legno duro, quale il cedro e l' ulivo, il bosso, di che, senz'addurre altri esempj, posso mostrarne a prova solenne alcuni *duroni,* tolti nel 1830 alle colonne del tempio di Minerva sul *capo Sunio,* i quali dai tempi di *Pericle* a questa parte per *ventitrè secoli* si conservarono intatti e sanissimi.

Per tutti questi motivi parmi non doversi ammettere, come non am-

metto, che questo manufatto debba annoverarsi fra le opere di argini ed altri lavori fatti in queste lagune e nominati da Strabone e da Plinio, perchè questi lavori, a mio credere, e il dissi ancora, essere doveano precipuamente diretti a trarre profitto, dirò così individuale dalle singole località, lo che egualmente potrebbe essere delle *doccie,* delle *gradinate,* delle traccie di *siepaje* e dell'antica vegetazione osservate dal nostro *Zendrini* ne' dintorni dell'isola di san Giorgio maggiore l'anno 1810 (1), esistenti ad una profondità pressochè eguale a quella dell'opera murale che ho descritta, e ciò, tanto meno ho voglia di ammettere quando considero che nei tempi anteriori a' due sommi che testè nominava, le acque fluviali, che scorrevano fra questi *tumuli* di Rialto si spandevano lateralmente sulla superficie allora più ampia della laguna, nè potevano essere obbligate a scorrere costrette quasi in alvei, come dev'essere avvenuto posteriormente, mano a mano che la laguna andavasi restringendo, ed allo specchio d'acqua viva succedevano, presso il continente, le *barene,* poi le *velme,* indi le *valli,* i *bassi fondi* e le *paludi,* nè certamente importava ricorrere a presidj di tal fatta, alla costruzione d'un molo così poderoso, se non quando la popolazione in Rialto stesso, che in prima aveva stazione quasi passeggera, e per oggetti di traffico, grandemente aumentava fissandovi stabile dimora, come appunto accadeva prima anco cominciasse il secolo IX.

E qui pongo termine a questa Memoria, che parmi aver condotta sulle orme di verità, e senza parzialità alcuna in favorire piuttosto una che l' altra gente, le quali, in varie età, qui ebbero giurisdizione e dimora, tale essendo il principio che m' era prefisso. Se azzardava qualche parere, se alcun poco mi sono scostato da ciò che altri scrittori opinavano, penso averlo fatto colla guida di rigorosi confronti, che dove mancano altre prove e dove questi confronti stieno in legame co' fatti posteriori, confortano almeno il pensiero e servono a coordinare fra loro alcuni storici periodi.

Adempisco quindi alla promessa espressa nella nota (26) di una mia *Memoria sopra una contro-corrente marina* (2), di trattare cioè, quando il potessi, su quest' antica *opera murale,* di cui allora ne annunziava la scoperta.

Ho esternato sole congetture senza pretesa alcuna di aver pronunciata sen-

(1) Vedi nota 34.

(2) *Sopra una corrente marina che si osserva lungo una parte dei lidi veneti.* — Memoria dell' ingegnere Giovanni Casoni membro effettivo dell' i. r. Istituto veneto, inserita nel volume I delle Memorie dell' i. r. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti.

tenza: io le assoggetto a quest' i. r. Istituto; le ho lette davanti a chi può insegnarmi, e sa correggermi. Chiudo colla rispettosa preghiera, che a queste mie congetture siami permesso aggiungerne anco una ed è: che dalla vostra esemplare pazienza in ascoltarmi possa congetturare che mi siate cortesi di compatimento.

(*Letta il 4 giugno* 1853).

PROFILO DI UN' ANTICHISSIMA FONDAZIONE

RINVENUTA LI 20 FEBBRAJO 1822 NELLA CIRCOSTANZA DI ESCAVARE LA TERRA PER COSTRUIRE LA FONDAMENTA AD UN MURO DI CINTA NELL' ISOLA DELLE VERGINI IN VENEZIA LUNGO IL CANALE DI S. PIETRO DI CASTELLO

SUOLO PRATICABILE ANNO 1822

COMUNE ALTA MAREA

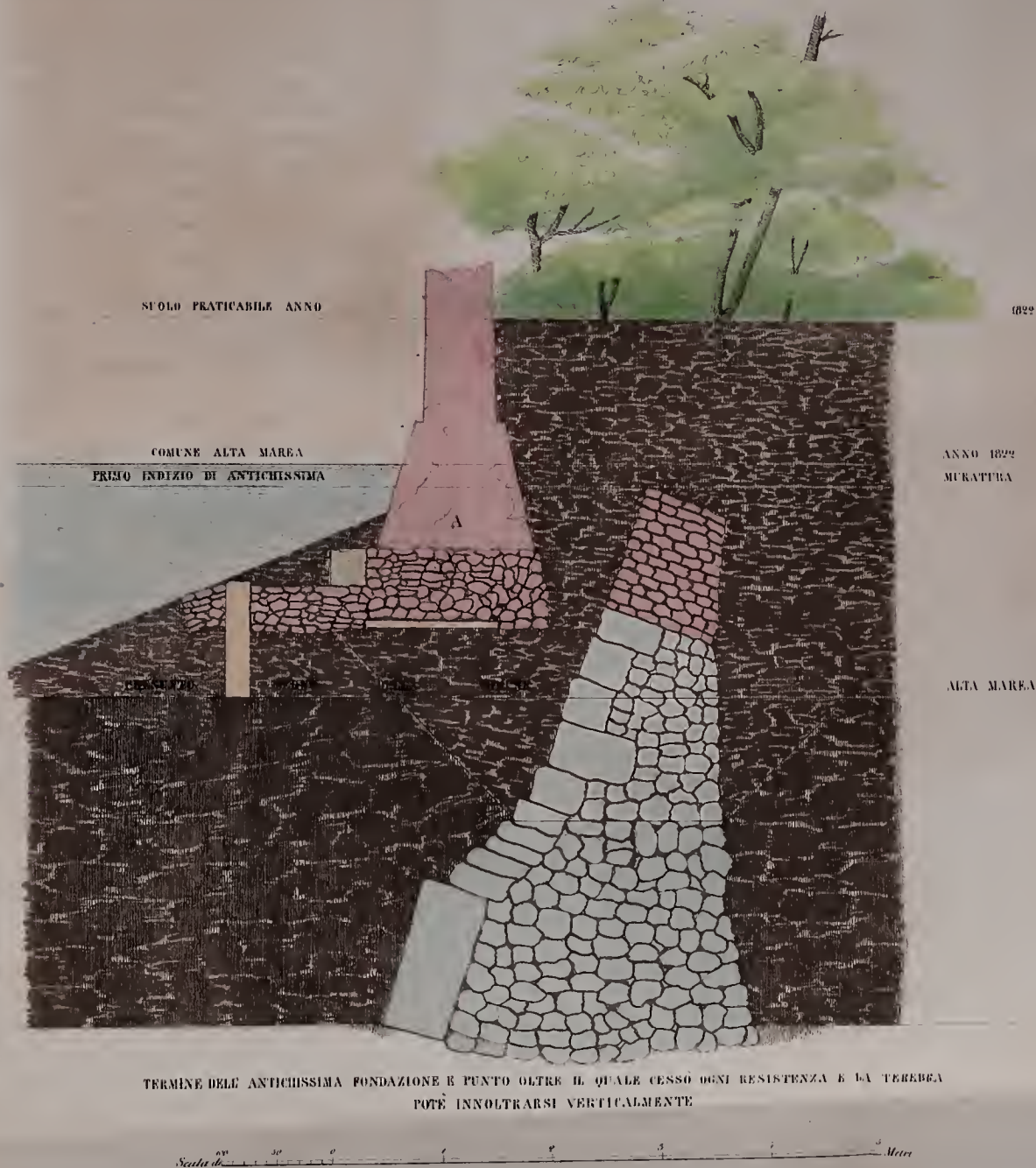
PRIMO INDIZIO DI ANTICHISSIMA

ANNO 1822

MURATURA

A

ALTA MAREA

TERMINE DELL' ANTICHISSIMA FONDAZIONE E PUNTO OLTRE IL QUALE CESSÒ OGNI RESISTENZA E LA TEREBRA POTÈ INNOLTRARSI VERTICALMENTE

A Sito della sotto fondazione al vecchio muro di cinta demolito nel 1821 alla sommità del quale era posta l' epoca MDXLI.

Prem. lit. Kier, Marzo 1856

PIANO DI SITUAZIONE

DELL' ANTICA ISOLA OLIVOLO ORA S PIETRO DI CASTELLO E DELL' ALTRA DELLE VERGINI

Prem. Lit. Kier Marzo 1856

Tav. III

ASPETTO DEL SUPPOSTO FARO ANNO 1797

PIANO
DI SITUAZIONE
DEL
SUPPOSTO
ANTICO FARO

ORTAGLIA
PIANTA DEL FARO
CASE ERARIALI
CAVANA
CASE ERARIALI
CALLE DELLA CHIESA
RIVO DETTO DELLA TANA
PUBBLICI FORNI
RIVO DELLA MADONNA
FONDAMENTA DELLA MADONNA
GRANARI PUBBLICI
CASE DI PRIVATI
CAMPO S. BIAGGIO
CHIESA
PONTE DELL' ARSENALE
RIVA SCHIAVONI
RIVA S. BIAGGIO
PONTE VENETA MARINA
RADA SAN MARCO

Prem Lit Kier Marzo 1856

ILLUSTRAZIONE DELLE PIANTE

NUOVE O RARE

DELL' ORTO BOTANICO DI PADOVA

MEMORIA III.

DEL M. E. PROF. ROBERTO DE VISIANI

Proponendomi di far note con questo scritto alcune novelle piante, che crescono rarità e pregio alle numerose collezioni che si coltivano nel giardino botanico di Padova, m' affretto a cogliere con ardore questa opportunità per tenere breve ragionamento di un errore, che serpeggia da qualche tempo fra i cultori delle scienze naturali e fra' botanici segnatamente, errore che vuol essere anche fra noi rilevato, onde antivenire le gravissime conseguenze, che dal progredimento di quello avverrebbero senza fallo alle scienze stesse ed alle loro utili applicazioni.

Le scienze naturali, come ognun sa, considerano gli esseri o ne' loro caratteri esterni per distinguerli fra di loro, descriverli ed ordinarli in associazioni più o meno omogenee, o li considerano nella loro intima tessitura e composizione, nelle loro relazioni col mondo esterno, e nei fenomeni svariati con che ci rivelano la loro natura e le lor proprietà. La prima è la parte descrittiva di tali scienze; la seconda è la parte fisica delle stesse, che, secondo lo speciale oggetto delle sue indagini, è chimica, organografica, fisiologica, patologica, geografica od altro. Fu grave errore de' tempi andati quello di credere che la botanica e la

zoologia tutte si comprendessero nella prima di tali parti, ed un avanzo ed una conseguenza di tale errore si è appunto il nome di botanica e di zoologia propriamente detta, che tuttora conserva la parte descrittiva di tali scienze. Ma questo errore può trovare scusa, se non giustificazione, nelle condizioni di detti studj a que' tempi. Le scienze di osservazione, e ciò vuol essere specialmente inteso di quelle che più particolarmente diconsi naturali, han dovuto di necessità incominciare dalla rilevazione, descrizione e raffronto dei caratteri esterni degli esseri che si offerivano alla contemplazione degli studiosi, e soltanto dopo avvertiti questi, si è passato alla ricerca di caratteri più interni e riposti. Era dunque nella natura delle cose che la botanica descrittiva, a cui di proposito dirigesi il mio discorso, precedesse le altre parti di questa scienza, e che i fitografi, i nomenclatori, i sinonimisti, i classificatori anticipassero e in certa guisa preparassero il successivo avvenimento degli anatomici, de' fisiologi, de' patologi, de' geografi. La botanica d' allora non era adunque nè poteva essere che descrittiva. Fu soltanto col progressivo crescere della scienza che da' caratteri esterni si fe' passaggio alla struttura intima degli organi, alla loro composizione chimica, alle loro funzioni, alle alterazioni morbose, alle abnormità, alla loro distribuzione geografica, ecc., e se ne dedussero principj generali, se ne determinarono leggi più o men costanti, e si crearono tanti rami di scienza quanti sono i diversi aspetti, sotto cui può essere considerato il vasto e vario regno de' vegetabili. La botanica veniva così naturalmente a dividersi in pratica ed in teorica, ma le due parti congiunte insieme per istrettissima comunanza di subbietto e di scopo, e per reciprocità di vantaggi, doveano formare un tutto unico ed inseparabile.

Cresciuta mirabilmente in questo ultimo secolo la fisica vegetale, i botanici d' ogni terra si volsero in gran numero a coltivarla, trascurando ed abbandonando la parte descrittiva della scienza, da cui era pur mestieri pigliar le mosse. Egli è per ciò che i fitografi si vanno rendendo rari un dì più che l'altro, e poco studiandosi il linguaggio tecnico, poco la elegante brevità della frase, poco il valore de' caratteri differenziali, poco le affinità reciproche delle piante, si corre risico di ritornare la botanica, riguardo alla distinzione ed ordinamento delle medesime, a quel fitto bujo, da cui tanto penarono, dopo la Linneana riforma, i fitografi a rilevarla. Eppur egli è ben facile il dimostrare come lo studio pratico delle piante e la loro distinzione specifica sia indispensabile alla scienza in sè stessa ed a tutte le molteplici sue applicazioni nelle arti che se ne giovano. Non si possono studiare compiutamente le piante senza indagarne i caratteri

esterni di forma, di proporzione, di situazione, di relazione, e ciò spetta esclusivamente al fitografo. Non se ne possono rilevare le affinità naturali senza riconoscere i caratteri su cui si fondano, e ciò pure spetta al fitografo. Non si possono far conoscere le scoperte delle nuove specie, di che intrepidi viaggiatori ed osservatori pazienti arricchiscono continuamente la scienza, senza saperne cogliere le differenze, e rappresentarne i caratteri generali e specifici con quella prontezza d' intuizione e con quel tocco franco, sicuro ed esatto che è il frutto dell' esperienza, la quale non può trovarsi che nel fitografo. Aggiungasi, ch' egli è dall'osservazione degli esterni caratteri, cioè dalla simmetria o bizzarria della forma, dalla maestà o snellezza del portamento, dal contrasto o dall'armonia delle parti, dalla vivacità o varietà dei colori che furono sin da principio, e sono continuamente tratti gli uomini ad invaghirsi delle piante, a bramarne e cercarne la conoscenza, e che perciò mettendo in non cale questo efficacissimo eccitamento, ed occupandosi solo della struttura elementare e de' fenomeni della vita, si perde per la scienza uno de' precipui fini a cui sembra data tanta ricchezza di esterne prerogative, l'allettamento cioè allo studio delle qualità più intime e più nascoste.

E sarà qui d'uopo il soggiungere quanto e qual danno apporterebbe alla botanica applicata alle arti la trascuranza dell' esatta descrizione e distinzione de' vegetabili che in quelle si adoperano? Chi non vede qual confusione perniciosissima ne verrebbe all'agricoltura ed orticoltura che con minuziosa diligenza si affaticano a distinguere, nonchè le specie, fino le varietà e le razze de' vegetabili che coltivano, se mancata la botanica descrittiva, non sapessero più coglierne e deteminarne i caratteri? quale alle arti industri, che sol per essa rilevano le vere piante che somministrano quei prodotti, di cui giovasi il lor magistero, e solo mercè di questa possono evitare le dannose ed arbitrarie sostituzioni, e gli scambi de' buoni co' tristi, dei veri coi falsi? alla medicina, a cui la sola fitografia, illustrando la vera origine di tanti farmaci e svelando gli errori della vecchia farmacopea, valse a raccertare per sempre la legittimità e quindi ancor la efficacia de' più preziosi medicamenti, indicando l' esatto nome e i caratteri delle piante da cui provengono, e le differenze ch' esse presentano da quelle con cui erano dannosamente confuse? all' economia domestica infine, che facendo suo pro di tante e sì varie piante, alcune delle quali fatalmente simili ad altre nocive, rimarrebbe, senza la botanica descrittiva, nell'affannosa e continua perplessità di prender una per altra pianta, e quindi di scambiare l'erba alimentare con quella che non lo è, il fungo mortifero col mangereccio, il tubero saporito ed

innocente coll' acre ed insipido, il frutto rinfrescante e piacevole col lazzo o indigesto, l' alimento in ultimo col veleno? Ora queste distinzioni non possono essere indicate esattamente che dal fitografo, al quale solo si appartiene di fissare i caratteri peculiari ed immutabili delle specie, ne' quali sta il vero e sicuro ed unico mezzo di evitare i pericoli dello scambio.

Nè minor vantaggio reca al botanico ed alla scienza la fitografia per le escursioni a cui l'obbliga, e per le attitudini che vi sviluppa. Chi non sa quanto invaghiscano della botanica quelle esplorazioni di vario corso che s' imprendono da' giovani amatori di questa scienza, onde indagare le piante nel natìo luogo, e farne tesoro pei propri studj? Gli è appunto in queste che origina e svolgesi l' amor delle piante e si fa passione viva e gagliarda tanto, da vincere tutti gli ostacoli che la gracilità del corpo, la mollezza delle abitudini, la timidità del carattere, la fatica delle salite, la lunghezza dei viaggi, l' intemperie de' climi, i disagi d' ogni sorta, e gli stessi più prossimi e minacciosi pericoli oppongono di sovente indarno a chi sente ardersi in petto la sacra fiaccola di che si accendono i fervidi e coraggiosi cultori di questa scienza. Ed è per questo che a' botanici devesi l' esplorazione delle vette alpine più eminenti ed inaccessibili, de' climi più torridi o più glaciali, delle regioni più barbare o più deserte: e gli è ad essi che vanno debitrici del ritrovamento ed introduzione delle più preziose sostanze disseminate dalla natura nelle varie parti del mondo, le arti tutte che da esse traggono vita, incremento e profitto. Ed è nelle esplorazioni e nei viaggi fatti allo scopo di raccogliere le piante e rilevarne le qualità, che si spiega oltre l' amore di questa scienza, il talento di osservazione, lo spirito di confronto, la facoltà di astrarre, generalizzare e dedurre, l'abilità di ravvicinare e distinguere. È là che il botanico impara cosa sia famiglia e genere, cosa specie, e cosa sia varietà; là ch' egli addestra l'occhio a cogliere con sicurezza i caratteri del portamento, que' caratteri che non si possono descrivere con parole, ma che pure son sì spiccati ed evidenti per chi s' è alcun poco esercitato a vedere e raccoglier piante, son sì utili alla distinzione delle specie, perchè ne fanno a prima giunta intravedere ed indovinare le differenze; è là che imparansi l' indole dei vegetabili, le loro abitudini solitarie o sociali, le loro simpatie od antipatie, il suolo, l'elevazione, l'esposizione che prediligono; è là che si acquistano le prime e principali nozioni della loro organografia; è là, infine, per chiudere colle parole testè pronunciate dal prof. Decaisne nel tessere l' elogio funebre dell' illustre Adriano di Jussieu, è là che apprendesi ad osservare, e che rivelasi la vocazione

del naturalista (Decaisne, *Not. hist. sur monsieur Adrien de Jussieu, séanc. publ. du* 8 *nov.* 1854 *de la soc. d'agriculture. Paris* 1854, *pag.* 56). Ora tutti questi vantaggi li deve l' amena scienza alla fitografia, e rinunziando ad essi col negligere di quest'ultima l'esercizio e lo studio, niuno è che non vegga quali e quanti danni ne siano per derivare alla prima. Coltiviamo adunque la fisica vegetale con quell' amore e con quella diligenza che ben si merita l' importanza gravissima delle sue indagini, ma facciamole sempre precedere lo studio dei caratteri esterni del vegetabile e del modo di bene esprimerli, giacchè su questi sta il fondamento di ogni classificazione, senza di cui nessun ordine è possibile nella scienza.

Ho stimato acconcio di additare, con quanto dissi fin qui, il funesto pericolo, cui vanno incontro le scienze del regno organico col trascurare quella utilissima parte di esse, che alcuni con assurdo dispregio chiamano la parte empirica, sì perchè le conseguenze ne sarebbero dannosissime tanto alle scienze stesse quanto alle loro utili applicazioni, sì ancora per giustificare, se fosse d'uopo, lo scopo precipuo di questo scritto, ch' è vôlto ad illustrare parecchie piante che a me sembrano nuove. E dico che tali esse mi sembrano, giacchè nel numero infinito delle opere speciali, degli atti accademici e de' giornali che registrano le incessanti scoperte di tali esseri, è impossibile oggidì a chi che sia l' affermare ciò con sicurezza.

Mancano però esse nelle opere più generali e più classiche fra le recenti, per cui non sarà inutile il proporre di aggiungervele, e di porgerne a tal fine la descrizione e la storia. Che se per avventura si trovasse in appresso, che alcune di queste piante fossero state descritte altrove, tutto il danno, se ve n' ha alcuno, consisterà nell' avere creato un nuovo sinonimo, che sarà facile l' obbliare; ma la descrizione che or se ne porge resterà sempre, se non a rettificazione od a compimento, almeno a conferma di quella datane dal primo autore, e questa duplice rilevazione de' lor caratteri sarà sempre utilissima a fondar meglio il giudizio del lor valore specifico.

1.° Fra le piante che or prendo a descrivere, siccome per grandezza di proporzioni, così ancora per importanza e per pregio vuol esser posto in capo alle altre un pino osservato già sin dal 1819 sul monte Ida dell'Asia Minore dal nostro socio l'egregio viaggiatore naturalista sig. Alberto Parolini, delle cui scoperte botaniche in quelle regioni ho qui letto un saggio fino dai primi mesi in cui ebbi l' onore di appartenere a questo i. r. Istituto, il quale accolselo nel

primo volume di sue Memorie. Dai semi ch' ei recò seco dall' Ida bitinico nacquero parecchie piante, che ora rendono singolare, colla bizzarra ma pittoresca stranezza del portamento, il ricco ed elegante giardino del Parolini a Bassano, ov'ebbi l'agio di ammirarlo e descriverlo. Si è questo un albero che colà giunse in 34 anni ad un'altezza di 15 metri, mentre alla base il suo tronco ha già due metri di circonferenza. Questo tronco è assai profondamente solcato per lo lungo da spesse e larghe screpolature, che ne fendono la corteccia in brani assai lunghi e grossi; i rami nascono verticillati a tre a cinque e più, divergono dal tronco dai 45 agli 80°, son torti, flessuosi, coperti di epidermide grigia, sparsi regolarmente di squame carenate, bislunghe, acuminate, che poi col tempo perdono la loro punta, e nella parte superiore vestiti di foglie sottili, un po' rigide, piano-convesse, verdi, acute, scabre nel margine per esser questo cartilagineo, e finissimamente seghettato di denticelli volti all' insù, chiuse a due a due nella base entro a guaine circolarmente rugose e lunghe da 5 a 6 millimetri. Le foglie son lunghe invece dai 13 ai 18 centimetri, larghe da uno a due millimetri, e nella superficie piana striate. I fiori trovansi nelle ascelle delle foglie superiori: i maschi disposti in amenti lunghi, cilindrici, ottusi, ravvolti alla base da brattee lanceolato-lineari, pettinato-lacere, ed argentino-membranacee nel margine. La cresta delle antere è quasi orbicolare ed intaccata all' intorno. Gli strobili giovinetti, che stanno sotto gli amenti maschili, sono sostenuti da un peduncolo coperto di brattee simili alle precedenti e di poco più corto di essi; sono eglino verticillati e per lo più in numero di cinque, eretti, ovali, ottusi, con isquame la cui parte esteriore è fornita un po' sopra del mezzo di un uncinetto breve ed acuto, e ciò specialmente osservasi nelle superiori; il quale uncinetto svanisce col crescere delle squame, riducendosi nel vecchio cono ad una brevissima ed ottusa verruca. Gli strobili o coni, maturi e chiusi, trovansi disposti in verticillo da 2 a 5, assai raramente solitarii per aborto degli altri, sono di figura ovato-conica, troncati alla base, brevissimamente peduncolati, e ritti o quasi orizzontali sul ramo, più brevi delle foglie di una metà. Le loro squame hanno la lor superficie esterna, od apofisi, lucida, di color castagno chiaro, di figura romboidea e divisa mediante una linea rilevata ed acuta in due metà, delle quali la superiore è convessa, l' inferiore piana e traversata verticalmente da un' altra linea più acuta e saliente. Nel mezzo dell' apofisi havvi una specie di cicatrice o scudo *(umbo)* ovale, grigiastra, schiacciata ed inerme, da cui partono spesso irregolarmente delle screpolature o strie che si perdono

a guisa di raggi nelle due metà dell' apofisi. La squama intera ha forma ovata a rovescio e porta due nocciuoli o semi incassati nella parte sua inferiore e nella superficie interna di questa. Li nocciuoli sono di forma ovale romboidea rotondati alla base, convessi nelle due faccie, e circondati nella parte superiore da un' ala membranosa, trasparente, segnata di lineette di colore rossiccio-bruno, la quale ha forma di trapezio nella parte superiore, e prolungandosi all'ingiù circonda la metà inferiore del seme con un margine membranoso, che è più cospicuo nella faccia superiore ed interna di quello che nella esterna. Quest' albero adulto ha la chioma disposta in ombrella, disseccandosi, col crescere, i verticilli inferiori dei rami, specialmente quando cresce fra mezzo ad altri, e mal si regge diritto, per cui tanto spontaneo che colto, ha il tronco inclinato e quasi rovesciato verso la terra. Altro carattere, che già in esso notò il suo scopritore, si è quello di mandare dai rami e dal tronco copiosissima resina, che viene raccolta nell' Ida con molta cura dagli abitanti dell' isola di Salamina, che ivi si trasferiscono in gran numero a tale oggetto. Nel modo istesso, dice il sig. Parolini, che nelle pianure lungo le spiaggie dell' Arcipelago abbondano le selve di quercie formate dalla *Quercus Aegilops* che somministra la vallonea, dalla *Q. pseudococcifera,* dalla *Q. infectoria,* e dalla *Q. trojana* Webb, le pendici e le vallate del monte Gargaro o Ida son ricoperte da questo pino, che predomina sulle altre piante in que' monti. La prevalenza di una specie di pino in un dato luogo, con esclusione delle altre specie, venne altrove osservata, ed il Parolini cita ad esempio il *Pinus Cedrus,* che predomina nelle giogaje del Libano, ed il *Pinus halepensis,* su tutte le spiaggie del Mediterraneo, il *Pinus Pinea,* che costituisce la grande pineta ravennate (se pur questa non è il prodotto dell'arte), il *Pinus canariensis,* che regna nelle isole di cui porta il nome, cui potrebbe aggiungersi il *Pinus brutia* del Tenore, che forma ampie selve nella Calabria, il *Pinus Laricio* Poir, che cinge de' suoi boschi metà dell' Etna, il *P. Pinsapo* Boiss. che ne forma di ancor più vasti nella parte occidentale del regno di Granata in Ispagna. Questo pino fu confuso finora or col *P. Pallasiana* Lamb., ora col *P. halepensis* Mill., ed ora col *P. maritima* Lamb. Distinguesi evidentemente dal primo (sotto il qual nome fu primieramente indicato dal Parolini l' anno 1842, nel catalogo dei semi dell' orto suo) che è una varietà del *P. Laricio* Poir., per la forma della sua chioma foggiata ad ombrella, nè già piramidale come nell'altro, pegli strobili una metà più grandi, per l'apofisi delle squame liscia e lucente, per lo scudo che sta nel mezzo della medesi-

ma, piano, nè già elevato e nel centro scavato come lo è nel *P. Laricio.* Dal *P. halepensis* disparesi pure per la forma ad ombrella, le foglie più forti e più lunghe, lo strobilo quasi sessile, più largo alla base, ed orizzontale od eretto, l'apofisi lucida, lo scudo piano. Più che ad ogni altro accostasi pe' suoi caratteri al *P. maritima* descritto e figurato dal Lambert, con cui ha pure comune la copia grandissima di resina che mette dalle screpolature del tronco e de' rami, e l'uso che di questa fanno i Greci per conciliare un miglior sapore ed una maggior durata a' lor vini. Il pino maritimo del Lambert è una specie assai contrastata, e perciò confusa ora col *P. Laricio* Poir., come fecero l'Aiton ed il Koch, ora col *P. Pallasiana* Lamb., come fece il Pallas, or col *P. Pinaster*, Soland., come il Lamarck, ed ora col *P. halepensis* Mill., come il Boissier, il Tenore e più altri. Questa discordia gravissima degli autori sul sentenziare di detta pianta deesi probabilmente a ciò, che il Lambert nella splendida opera sua intitolata: *A description of the genus Pinus.* Lond. 1828 ed. II, rappresentò nella tavola 6 fig. AA un ramo fruttifero di un pino con cono fornito di grosso e lungo peduncolo rivolto all' ingiù, molto simile al *Pinus halepensis,* e nelle fig. FG della stessa tavola, due coni a peduncolo più corto, più grosso ed eretto, e di forma più largamente ovata, più acuminata e maggiore, e più simile al nostro, che sembrano perciò diversi da quelli rappresentati dalle fig. AA. Checchè sia di tali differenze, il pino marittimo, secondo le descrizioni datene dal Lambert nell'opera testè citata, dal Link nelle sue *Abietinae H. R. Berolinensis cultae,* pubblicate nel volume XV della *Linnaea,* nonchè dall' Endlicher nella *Synopsis coniferarum,* Sangall. 1847, differisce da quello dell' Ida per gli strobili per lo più solitarii forniti di lungo e grosso peduncolo ricurvato all' ingiù, più corti, più ovati, per l'apofisi senza carena e depressa, mentre nel nostro è segnata da una carena trasversa prominente ed acuta, e quest' apofisi è convessa nella metà superiore. Le foglie ancora nel marittimo superano di due volte la lunghezza del cono, mentre in quello dell' Ida di poco il sorpassano. Finalmente nei coni giovani le squame sono mucronate nel nostro, inermi nel pino marittimo. Per quest' ultimo carattere potrebbe forse assomigliare al pino da me descritto il *P. maritima* dello Steven (*De Pinubus tauro-caucasicis,* n.° 4), che secondo quanto ne tocca il Link nel luogo sopra citato, ha le squame superiori mucronate come nel nostro, ciocchè, a detta di que' botanici, non fu ancora osservato nel *P. maritima* Lamb. Nella recente opera intitolata: *Traité général des conifères,* Paris 1854, il sig. Carrière riportò il pino del Parolini al *P. pyrenaica*

del Lapeyrouse, e vi associò pure in parte il *P. maritima* del Lambert, cioè le due fig. FG ,della tavola 6.ª di questo autore. Non avendo io veduto il vero *P. pyrenaica,* od almeno i suoi coni, non posso dare alcun sicuro giudizio sulla esattezza di tale raccostamento: ma s' è giusto il sinonimo che gli appone il Carrière del *Pinaster III hispanicus* del Clusio (Hist. pl. r. p. 33), egli è facile a riconoscere come nè la figura, nè la descrizione data di questa specie da quel vecchio ma accurato botanico rispondano alla pianta del Parolini. Non la figura perchè rappresenta un pino con un cono solitario lungamente peduncolato e pendente qual è quello del *P. maritima* Lamb., tab. 6, fig. A, con foglie assai corte. Non la descrizione perchè il pino del Clusio non passa la statura di un uomo, ha scorza poco grossa e poco rugosa, foglie esili, coni gracili e piccoli, i quali caratteri son del tutto opposti a quelli del nostro. Il *P. pyrenaica* Lap., parrebbe ancora diverso per le foglie pennicillate sulla cima dei ramicelli, che nel resto son nudi, per l' apofisi delle squame conica, che nel nostro è appena convessa, pel lato inferiore della medesima longitudinalmente solcato e non carenato. La figura del cono che ne dà l'Antoine (*Conifer.* tab. I, fig. IV), è la metà minore del nostro, e rappresenta le apofisi assai rilevate: quella del Lambert, tab. 6, fig. FG, citata dal Carrière, gli somiglia nella forma e nella grandezza, ma ne diversifica per essere ambedue i coni visibilmente peduncolati. Per le quali ragioni e per essere il *P. pyrenaica* Lap. (*Suppl. à l' hist. des pl. des Pyr.,* pag. 146) una pianta dubbia, come lo sono molte altre di quell' autore, che lo descrive come un albero che cresce diritto, ha i ramoscelli coperti di scaglie rotonde e le squame del cono piane con 4 a 6 angoli, ciocchè non si scorge nel nostro, avvi ragione a credernelo ben distinto, per cui dal nome del primo suo scopritore ed introduttore mi è grato d' intitolarlo

PINUS PAROLINII Vis. Tav. I.

P. foliis geminis rigidiusculis, margine cartilagineo-serrulatis scabris, vaginis rugosis longiusculis, strobilis ovato-conicis, basi truncatis, oppositis verticillatisque, subsessilibus, patulis erectisve, folio paullo brevioribus, squamarum apophysi latere superiore convexa, argute carinata, nitida, umbone depresso radiatim rimoso; junioribus ovatis, pedunculatis, erectis, squamarum dorso recurve mucronatis, seminum ala trapetioidea nuculam ter superante ejusque basim obtusam anguste marginante.

Syn. P. Pallasii Parol. sem. h. bot. Parolin. 1841, pag. 3.

Hab. in devexitatibus, vallibusque montis Idae in Bithynia, ubi haec sola species vastas conficit sylvas. Observavit ibidem jam ab anno 1819 inque hortum proprium e seminibus eduxit pluribusque communicavit cl. Albertus Parolini. Fl. Apr. Maj.

Spiegazione della tavola I.

1. Due porzioni di foglia per farne scorgere la forma piano-convessa, e i margini seghettati.

2. Base di due foglie chiuse nella vagina.

3—4. Amento maschile.

5—6—7. Antere.

8. Amenti femminei verticillati.

9. Strobilo un po' più avanzato nel suo sviluppo.

10 a 15. Squame del medesimo in diversi gradi, ed in diverso aspetto.

16—17. Squame di un cono più adulto.

18. Strobilo o cono maturo.

19. Squama di tale strobilo nella sua faccia esterna.

20. La stessa nella sua faccia interna coi semi.

21. Seme, o nucula, veduto dalla parte che guarda la superficie del cono.

22. Seme, o nucula, veduto dalla parte che guarda l' asse, ov' è più evidente l' orlo membranoso che ne circonda la base.

2.° Altra conifera sempreverde coltivasi da molti anni nell'orto di Padova sotto il nome di *Juniperus thurifera* L., ma questo nome per le ragioni che addurremo in appresso non le appartiene. È un albero di 3 a 5 metri di alzata, a tronco ritto, cilindrico, vestito di corteccia, la cui buccia esteriore è fosca e si sfoglia in larghi brani, a rami distesi orizzontalmente, piuttosto radi e assai lunghi, a ramicelli tutti coperti di minutissime fogliuzze opposte, addossate l' una sull' altra a simiglianza degli embrici, ovate, coi lati della base ineguali e perciò di figura che tien del rombo ; di colore verde-chiaro un po' glauco. Nei ramoscelli più giovani trovansi talvolta altre foglioline più lunghette, più acuminate e colla punta più divergente dal ramo. Alla base de' ramicelli e da quel lato di essi che guarda l' apice della pianta sorgono altri ramettini minori rive-

stiti al par degli altri di fitte e minute foglie, i quali portano in capo tre o quattro fioretti femminei costituiti da un pistillo a tre stigmi, cui succede un frutto o coccola quasi rotonda, grossa più del ginepro comune o in quel torno, di un colorito nericcio velato di cilestro, da cui s' alzano quattro o cinque bitorzoletti opposti ed ottusi, e contiene 3 o 4 semi ossei rotondeggianti, convessi nell'esterna lor parte, rettangoli verso l' asse del frutto ed a maturità nereggianti. Dal *J. thurifera* di L. o *J. sabinoides* del Grisebach, con cui fu scambiata sinora cotesta pianta, e con cui presenta la maggior somiglianza, distinguesi pe' frutti rotondeggianti, nè già conici alla lor base, e pel colore verde glauco delle sue parti. Per lo che potendo essa considerarsi distinta dalle altre finor descritte, potrà essere definita nel seguente modo, e porterà il nome del benemerito professore, sotto cui la detta pianta fu introdotta nell'orto nostro, il dott. Giuseppe Antonio Bonato

Juniperus Bonatiana Vis. Tav. I.*

J. arborea glaucescens, ramis patentissimis, foliis oppositis decussato-imbricatis, adpressis, ovato-rhombeis, apice gibboso-trigonis acutiusculis, dorso glandula oblonga impressa notatis ecarinatis, junioribus acuminatis pungentibus erecto-patulis, ramulis tetraquetris, fructiferis strictis brevissimis, galbulis pedunculatis globosis tuberculatis.

Syn. J. thurifera H. Pat. non L.

Hab. Colitur in H. Patavino ubi fructificat Majo, Junio. Galbuli nigro-coerulei, 4—5 tuberculati.

Obs. Affinis *J. sabinoidi* Griseb., *J. turbinatae* Gusson., *J. thuriferae* L., quae differt colore totius plantae laete viridi, et galbulis obovato-ovoideis, basi breviter protractis.

3.° Un altro ginepro ancora mi fu dato di veder coltivato sotto nome non vero nel giardino del nob. sig. Jacopo Cabianca alla Longa nella provincia Vicentina, che il ricevette dagli orti del Belgio per il *Juniperus phoenicea* di Linneo. Si è questo un arbusto di circa due metri, a rami spessi e distesi, o leggermente incurvantisi colla punta all' insù, a ramoscelli, per la disposizione incrociata delle foglie, quadrangolari, a foglioline tutte adossate l'una sull'altra, ovate acute un po' romboidee. Il frutto è coperto di un polviglio leggermente

ceruleo e maturando diventa bruno rossiccio, opaco, rotondo, ma schiacciato e quasi infossato nell' apice, che spesso dividesi in due o tre lobi grossi e rotondi, cui corrispondono nell' interno i due o tre o quattro nocciuoli o semi ossei contenuti nel frutto stesso. Questi è portato in vetta da un ramicello o gambetto brevissimo e più corto di esso. Diversifica questo ginepro dal *J. phoenicea* L., per la forma e colore del frutto, per le foglie acute e i ramicelli quadrangolari, nè già cilindrici come l'altro. Ritenendolo nuovo, ne intitolo la specie all'egregio orticultore sig. Cabianca, che con raro vincolo accoppia l'amore de' naturali studj al culto felicissimo delle lettere.

JUNIPERUS CABIANCAE Vis. Tav. I.**

J. arborescens, viridis, ramis erecto-patulis, foliis oppositis, omnibus decussato-imbricatis adpressis ovato-rhombeis acutis, dorsi convexi medio glandula oblonga impressis, ecarinatis, ramulis tetraquetris, fructiferis strictis brevissimis, galbulis pedunculatis subglobosis, apice retusis sublobatisque, opacis, laevibus, demum nigro-coeruleis.

Hab. Colitur in *H. Cabianca,* sub nomine *J. phoeniceae,* cui similis, sed a qua differt foliis acutis, ramulis tetraquetris et forma galbuli apice truncati vel etiam emarginati et bi-trilobi. Color etiam fructus qui zizyphinus et nitidus in *J. phoenicea,* in nostra fuscus opacus.

4.° Son pochi gli amatori di piante che non conoscano e non posseggano quel grazioso arboscello giapponese, la *Daphne odora,* che rallegra le stanze eleganti colla verdezza nitida delle sue foglie e più ancora coll'olezzo soavissimo che tramandano le ciocche bianco-rosate de' leggiadri suoi fiori. Questo genere adorna delle sue specie ogni parte del globo, e fra quelle che sono in Europa si notano per proprietà mediche la *Daphne Mezereon,* che fornisce una corteccia vescicatoria e la *Daphne Gnidium,* che dà il Cocco Gnidio e la scorza di Timelea, mentre distinguesi dalle altre per modestia di proporzioni e per soavità di profumo il Cneoro, che piacesi della vetta solitaria delle più alte montagne, e schernisce e sdegna gli sforzi de' più abili orticultori, che inutilmente si adoprano a dimesticarlo e crescerlo nei giardini. Ora una nuova specie e d' indole più mansueta e gentile ci venne dal Messico ad accrescere il novero delle piante odorose, che per la maggior parte degli amatori son sempre le più pregiate. È

un piccolo arboscelletto, che appena aggiunge a un piede di altezza, a tronco eretto cilindrico vestito di scorza levigata e bruna, che superiormente dividesi in pochi rami. Le foglie sono affollate sulla sola cima di questi; son sempre verdi, d'un verde scuro sulla faccia che guarda il cielo, pallide ed un po' glauche al di sotto, di forma bislunga, all'apice un po' più larghe ed ottuse, delle quali le giovanette lucidissime e prive di peli nelle due faccie, ma cigliate radamente di lunghi peli sparsi pel margine. In capo al ramo sta il mazzolino di fiori, che è senza gambo, ma circondato di foglie fiorali più corte delle altre, e più addentro a queste da brattee bislunghe acute ed ottuse molto minori dei fiori stessi e delle altre foglie. Il perianzio del fiore è peduncolato, ipocrateriforme, con tubo cilindrico carnoso bianchiccio, ed il lembo è spartito in quattro parti ovali e quasi cuoriformi alla base, ondeggiate ed orizzontali. Nell' interno di esso sono attaccati gli stami in due serie, quattro superiori e quattro inferiori, fra di loro alternantisi, con filamenti tre volte più brevi delle antere, che sono ovate un po' acute, chiuse nel tubo, e mettono un polline di colore ranciato. Il pistillo ha un ovario bislungo un po' assottigliato alla base, pedicellato, sericeo, più grosso all' apice ed ivi vestito di folti velli, con una sola cavità contenente un ovicciuolo pendente; uno stilo brevissimo, ed uno stimma foggiato a disco, grosso, ombelicato e coperto di minutissime papille. L' ovario è sostenuto da un gambo o ginoforo elevato verde, glabro, più breve di esso, che sorge da un disco ipogino, verde, liscio ed intero, che l' attornia alla base. Questa pianta venne mandata anni sono dagli orti del Belgio al nob. sig. Cabianca col nome di *Daphne ex Mexico*. Riconosciutala nuova, nè potendo serbarle il nome della sua patria, perchè il medesimo distingue già un'altra specie diversa da questo, ho stimato atto di giustizia l' imporle il nome di nobile e coltissima giovinetta, la sig. Elisa Parolini, la quale ad una rara perizia nel disegnare le piante, di cui porgono sì bell' esempio le tre tavole precedenti da essa sì maestrevolmente condotte, accoppia cognizioni tali in ogni ramo della botanica, da succedere degnamente alle Perpenti ed alle Fiorini ove le piacesse di dedicarsi di proposito a coltivare l' amena scienza.

Daphne Elisae Vis. tab. II.

D. floribus terminalibus aggregatis pedunculatis, extus lanuginosis, laciniis perianthii subcordato-ellipticis, apice rotundatis emarginatisve, foliis oblongo-obovatis obtusis coriaceis glabris margine subrevolutis, juniori-

bus floralibusque flore brevioribus margine pilosiusculis, caulis erecti ramis puberulis.

Hab. in Mexico. Floret vere. Flores albo-rosei suaveolentes.

Syn. D. Delahayana Hortul.

Obs. Inter *Daphnem Cneorum* et *D. collinam* media, illi floribus a foliis exsertis, huic foliis similis. Differt vero *D. collina* floribus sessilibus, laciniis perianthii ovatis, foliis subtus villosis, floralibus flores superantibus: *D. Cneorum* foliis obverse lanceolato-linearibus glabris, laciniis perianthii oblongis, tubo nervoso, pedunculato, caulibus decumbentibus.

Spiegazione della tavola.

A. Fior ingrandito con una foglia fiorale.

BB. Perianzio ingrandito ed aperto.

C. Antera con apice acuto formato dal connettivo.

D. Pistilli col disco nettarifero, l' ovario irsuto, lo stilo brevissimo, e lo stimma grande orbicolare.

5. Fino dal mille ottocento e quaranta visitando io l' orto botanico della reale Università di Torino vidi coltivarvisi un *Eupatorio* nato da semi, che mandò dal Chilì il benemerito ed infelice Bertero, e sembrandomi nuovo gl' imposi il nome del chiarissimo botanico e direttore dell' orto stesso il prof. Giacinto Moris. La facilità di coltivarlo e moltiplicarlo, e la copiosa e leggiera fioritura di questa pianta per gran tempo dell' anno, lo resero ben presto comune presso tutti gli amatori di piante, che in esso acquistarono un ornamento durevole delle stufe, anche nella stagione in cui più scarseggiano i fiori. Si è questo un frutice di oltre un metro di altezza, a tronchi e rami cilindrici lisci, glabri, a foglie opposte, sode e quasi carnose, con nervature pennate e poco prominenti, ristrette a conio ed intere alla base, dentate più o meno leggermente dal mezzo in su, a denti quasi ottusi, e che finiscono con una ghiandola, pallide al di sotto, ove vedute colla lente appajono punteggiate di minutissime ghiandolette. Una folta cima di fiori orna la sommità de' rami, ed è formata di brattee lineari acuminate. I peduncoli e i piedicelli sono coperti di pelurie minuta e crespa, e questi ultimi soverchiano in lunghezza l' involucro del proprio fiore, ed hanno una o due brattee simili alle precedenti, ma un po' più piccole. Ogni capitolo contiene

dentro un involucro cilindrico formato di 8 a 10 brattee ineguali piegate a doccia e carnosette, ed ora disposte irregolarmente, ora ordinate in due o tre serie, da sei a dieci fioretti bianchi imbutiformi eguali, spartiti nel margine in quattro o cinque punte ovate, acute, orizzontali od arrovesciate, nel di cui tubo sta rinchiuso il tubetto stamineo, ch' è bianco con cinque striscie nere, e fuor di essi sorge il pistillo con due stimmi lunghissimi subulati ottusi, divaricati o riflessi. Gli achenii o frutta son lineari, pentagoni ottusi, neri, glabri, coronati da un pappo di molte setole scabre, che non superano il tubo del fiore. Trovasi questa pianta indicata ne' cataloghi de' commercianti sotto l' erroneo nome di *Aceratium* (forse *Ageratum) Ganitri.* Non essendo ella descritta fra le specie numerosissime di questo genere registrate dal Decandolle e dal Walpers potrà definirsi così:

EUPATORIUM MORISII Vis.
Orto botanico di Padova 1842, pag. 80, tab. III, Passerin, mazzett. di fior. Parm. 1855, pag. 10.

E. fruticosum sempervirens, ramis teretibus glabris, foliis oppositis petiolatis ovalibus utrinque cuneatis, laxe crenulato-serratis, dentibus glandula terminatis supra nitidis, subtus penninerviis, basi integris, capitulis terminalibus cymoso-corymbosis, pedicellis puberulis, involucri cylindracei 6—10—*flori squamis arcte imbricatis obtusis, apice piloso-laceris glanduloso-verruculosis estriatis.*

Hab. in Chili. Colitur ubique in hortis, et floret toto anno. Fl. albi.

Obs. Locum habet inter *Eupatoria imbricata cylindrocephala* DC. prodr. syst. natur. V, pag. 141, sed involucri squamae pauciseriales.

Spiegazione della tavola III.

1. Capitolo di fiori dell' *Eupatorium Morisii* Vis. ingrandito.
2. Fiorellino ingrandito dello stesso.

6. Dall' orto botanico di Bombay nell' Indie vennero a quello di Padova i semi di una Ruellia mandataci dall' illustre dott. Gibson sino dall' anno 1847 col nome di *Ruellia deccanensis,* della quale diedi una breve frase specifica nel-

l' atto di pubblicare il catalogo de' semi da noi raccolti in quell' anno, sotto il nome di *Ruellia undulata,* non sapendo trovare alcun significato al nome primitivo, con cui mi venne comunicata. È un' erba annuale di 4 a 5 pollici di altezza, a radice fibrosa assai lunga e ramificata, a tronco poco ramoso eretto od ascendente, a foglie opposte picciuolate, ovate, ottuse, ondeggiate ed intere nel margine, a fiori ascellari solitarii, sessili, guerniti ognuno di due fogliette fiorali picciuolate, bislunghe. Il calice è diviso profondamente in cinque parti lineari-lanceolate, quasi eguali, ed addossate strettamente alla corolla. Tutti questi organi sono coperti di fitta, breve e molle peluria. La corolla, ch' è d' un color lilla pallido, è ipogina, con tubo augusto quasi cilindrico, fauce panciuta imbutiforme un po' curva, lembo diviso in cinque lobi rotondeggianti, smarginati, percorsi da una solcatura longitudinale nella interna lor faccia, e l' infimo di essi in questa faccia medesima segnato di due pieghe, ciliati in una metà del contorno, nell'altra glabri. Nel tubo sono inseriti quattro stami didinami con filamenti diritti, antere cuoriformi-bislunghe, bilobe alla base per cui s' attaccano al filamento, ottuse e mozze in ambe l'estremità. Il pistillo ha un ovario verde, glabro, ovale acuto, uno stilo filiforme villoso, uno stimma diviso in due parti, l' una delle quali è brevissima e troncata, l' altra bislunga arrovesciata all' ingiù e scanalata nell' interna sua faccia. Il frutto è una capsula ovale acuminata in ambe le estremità, liscia, gonfia, bivalve, aprentesi per deiscenza delle logge, divisa da un setto che nasce dal mezzo delle valve, con quattro semi per loggia, e questi lenticolari, piani, marginati, embriciati l'uno sotto dell'altro, attaccati al tramezzo per una briglietta o retinacolo che ve li unisce. Non trovando descritta siffatta specie nel Prodromo di De Candolle, nè in altre recenti opere fitografiche, credetti opportuno ripubblicandone la frase specifica di darne una descrizione circonstanziata nonchè la figura.

RUELLIA UNDULATA Vis.
Sem. rar. H. Pat. 1847, pag. 4, tab. IV.

R. herbacea velutina pumila, caule subramoso, foliis ovatis petiolatis, margine undulatis integris, floribus axillaribus oppositis sessilibus, bracteis binis oblongis petiolatis basi munitis, calycis laciniis linearibus strictis, corolla infundibuliformi, capsula spathulato-ovali acuminata.

Habui semina sub nomine *Ruelliae deccanensis* ex horto botanico ad Bombay a cl. *doct. Gibson* communicata. Fl. lilacini. Planta annua.

Spiegazione della tavola della Ruellia.

1. Capsula con brattee.
2. La stessa matura.
3. Seme.
4 — 4. Capsula ingrandita ed aperta.
5. Seme ingrandito.

7. Coltivasi in parecchie collezioni di piante una specie di *Clerodendron* col nome di *Clerodendron splendens fl. albo,* che non ha punto che fare colla vera pianta di questo nome. È un frutice di due a quattro piedi, tutto coperto di fitta e corta peluria, con rami quadrangolari a lati piani o leggermente scanalati e di color cenerognolo. Le foglie sono opposte ed incrocicchiate, con picciuolo di mezzo pollice e disteso quasi orizzontalmente, con lamina lunga quasi tre pollici, ovale-lanceolata, ristretta in punta ad ambe l'estremità ma più verso l'apice, interissima, o più o meno sinuata nel margine, che talvolta è un poco ondulato, verde-bianchiccia superiormente, più pallida nel di sotto. I fiori sono distribuiti in panocchia rada, composta di cime incrocicchiate trifide, o per aborto del ramoscello centrale bifide, sostenuta da corto peduncolo. I piedicelli de' fiori son più lunghi del calice, sparsi di brattee alterne acute e di peli distesi, con ghiandolette incospicue. Il calice è un cotal poco carnoso, senza nervi, che ampiamente cinge il tubo della corolla, e nel frutto cresce alcun poco e rigonfiasi. La corolla è bianca o pallida, senza odore, glabra soltanto inferiormente; il di lei tubo allargasi leggiermente presso ad ambe l'estremità, il lembo è ottuso e quasi regolare. Gli stami sono filiformi e lungamente sporgono fuori della corolla con antere saettato-ovate attaccate al filamento un po' sopra la loro base e nereggianti. Il pistillo ha un ovario libero a quattro loggie con un ovulo per ciascheduna, uno stilo filiforme che supera gli stami di una metà, ed uno stimma diviso profondamente in due parti fatte a subbia ed acute. Il frutto è una drupa o piuttosto un nuculanio chiuso nel calice un pocolino ingrandito, e contiene da uno a tre e talor quattro nocciuoli. L'ebbe la prima volta l' orto di Padova dagl' ii. rr. giardini di Monza, al cui benemerito direttore il chiar. sig. Giuseppe Manetti m' è piaciuto d' intitolarla fin dal 1848.

Clerodendron Manetti Vis.
Sem. h. patav. coll. ann. 1848 et 1849, N. 2, tab. IV.

Cl. molliter subcanescens, ramuli quadrangularibus, foliis petiolatis ovali-lanceolatis acuminatis integris, panicula terminali laxa, cymis trifidis, bracteisque obverse lanceolatis acutis deciduis pilosis, pedicellis nutantibus, calyce campanulato hiante esquamato quinquefido, laciniis lanceolatis acutis apice conniventibus, corolla hypocraterimorpha superne extra puberula, tubo cylindrico, calycem quadruplo superante, limbo patente quinquefido.

Syn. Clerodendron splendens *Manett.* cat. pl. h. modic. suppl. II, pag. 9, non *Don.*

Hab ... Locum obtinet inter *Euclerodendra paniculata* Schauer in DC. prodr. XI, pag. 666, a quibus omnibus ibidem recensitis differt.

A *Cl. splendente* Don, sub quo nomine saepius in hortis colitur, jam prima fronte differt pubescentia, foliorum forma, panicula terminali, colore florum.

Spiegazione della tavola del Clerodendron.

a. Fiore di grandezza naturale. *b.* Fiore ingrandito. *c.* Frutto maturo, e vestito dal calice. *d.* Lo stesso tagliato orizzontalmente per vederne i quattro nocciuoli.

8. Una specie singolare di *Teucrium* distinta per la fittezza e compattezza della sua spica nacque fin dall' anno 1846 all' orto botanico di Padova da semi inviatigli dall' orto farmaceutico di Trieste col nome di *Teucrium Libanotis* Schreb., da cui diversifica interamente. L' ebbe ancora d' altra parte col nome non meno erroneo di *Teucrium lamiifolium* Urv. Studiatine i caratteri, e rilevato distinguersi la medesima da tutte le numerose specie di questo genere registrate nel Prodromo di De Candolle e nel Repertorio del Walpers, la additai per nuova fin dal 1847 nel catalogo dei semi dell'orto nostro, la nominai *Teucrium densiflorum,* ne diedi la diagnosi, ed or ne compio la descrizione. È un' erba a radice perenne, vestita in ogni sua parte di peli molli e cinerei, a molti tronchi quadrangolari spesso ramosi, a foglie opposte ovate, grossolanamente intaccate nel margine, troncate ed intere alla base, ottuse in punta, rugose e bollose al

di sopra, e con nervi molto sporgenti e reticolati al di sotto. Il picciuolo è scanalato e lungo quanto la metà della foglia. In vetta ai tronchi e nelle ascelle delle foglie superiori stanno i fiori disposti in ispica cilindrica ottusa densissima, composta di fiorellini orizzontali, resupinati, assai fitti a falsi verticilli contigui e perciò non distinti, formati di sei fiori e con brattee lineari acuminate, villose, d'egual lunghezza del calice. I peduncoli sono brevissimi, e s' inseriscono non già alla base del calice, ma sopra lo stesso e sul lato interno o superiore di esso. Questo ha il tubo schiacciato, scanalato nel lato esterno, scrotiforme alla base, e diviso nel lembo in cinque denti diritti, di cui il superiore è molto maggiore degli altri ed orbicolare, i due laterali ovato-rotondati minori della metà del primo, i due infimi lanceolati acuti, un po' più lunghi de' laterali. La corolla è bianca villosa esternamente e nella parte che esce dal calice, piccolissima, il di cui tubo immerso nel calice presso la base del lato esterno è un po' gobbo, la fauce è rigonfia, il labbro superiore è brevissimo troncato e con un dente per parte lanceolato e rivolto contro gli stami, l' inferiore ha due lobi, i laterali dei quali triangolari, e l' infimo fatto a cucchiajo rotondo e concavo dall' un lato e dall' altro della sua base ha un piccolo lobetto ottuso, ed è villoso soltanto nel dorso. Gli stami escono dalla corolla, sono didinami, ad antere bislunghe, inserite obbliquamente, fosco-giallognole, reniformi, e colle loggie aprentisi per una sola fissura semicircolare comune ad entrambe. Lo stilo è diviso all'apice in due denti quasi eguali, e pareggia gli stami. I suoi achenii son quattro rugosetti globosi incassati nella base di un ginobasio carnoso, che trovasi non nel fondo o parte più bassa del calice, ma in quel sito di esso, esternamente al quale s' inserisce il peduncolo. L'odore della pianta sente un po' d'aglio. Fu da taluni scambiato col *Teucrium lamiifolium* Urv., il quale per esame della genuina specie fatto dal ch. Bentham, non è diverso dal *T. Arduini* L. Ora il *T. Arduini* comechè alcun poco somigli così in di grosso la nostra pianta, ne diversifica però per molti e gravi caratteri, de' quali stringendomi ai principali, noterò fra questi le foglie cuneate alla base, e non cuoriformi o troncate; la spica compatta densissima, in modo da non distinguerne i falsi verticilli; il lobo superiore del calice orbicolato e non ovato-acuto, il fondo del tubo diviso in due lobi rotondi o scrotiforme e non intero e rotondato. Si coltivano da più anni entrambe queste specie nell' orto botanico, nè mai mutarono i loro caratteri, e si distinguono già a prima vista.

TEUCRIUM DENSIFLORUM Vis.

Sem. rar. h. patav. 1847, pag. 4 Bent. in DC. prodr. XII, pag. 701.

T. foliis cordatis truncatisve rugosis, spica cylindracea compacta, verticillastris indistinctis sexfloris, calycis basi scrotiformi, dente supremo orbiculato maximo, infimis lanceolato-oblongis, lateralibus paullo longioribus, corollae lobis lateralibus ovato-triangularibus, infimo basi truncato bilobo.

Colitur sub nomine *T. lamiifolii* Urv., seu *T. Arduini* L.; quod differt foliis basi cuneatis, spica-laxiore, calycis basi integra nec biloba, dente calycis supremo ovato-cuspidato, infimis lineari-lanceolatis, corollae ochroleucae lobis lateralibus lanceolatis, infimo basi cuneato integro. Fl. minuti albi. Flor. vere.

9. *Eremostachys iberica.* Vis.

Sotto cotesto nome fin dal 1846 ho indicato nel catalogo de' semi del giardino di Padova una pianta, che ivi si coltivava da lungo tempo col nome di *Phlomis iberica* dell' orto di Parigi. Questa pianta venne talor confusa colla *Phlomis laciniata* L., ossia *Eremostachys laciniata* Bung., dalla quale e per le foglie e pe' fiori è grandemente diversa. Dove si trovi descritta la *Phlomis iberica* dell' orto di Parigi non m' è peranco, per diligenza fattane, riuscito di rinvenirlo. Nei cataloghi di quest' ultimo giardino prima e dopo il 1847, e finchè durò l' amministrazione del prof. Mirbel non vi si trova nome di autore: nel solo catalogo però del 1847 la si trova attribuita al Desfontaines. Però in alcune delle opere di questo insigne botanico, già direttore per lunga pezza di quel giardino, non trovasi nominata tal pianta, per cui giova credere che il Desfontaines, conosciutala già per nuova, le abbia dato quel nome che restò sempre in quell' orto, senza però pubblicarlo, nè aggiungervi descrizione di sorta. Soltanto ne' cataloghi parigini dal 1851 in poi trovasi questa pianta col nome di *Eremostachys iberica* Bung.; ma non ho potuto finora sapere se questo autore, che fondò appunto tal genere e ne descrisse quattro specie nella Flora Altaica del Ledebour, veramente abbia descritta anche questa, che col nome di *Eremostachys iberica* io pubblicai nel 1846, ed in qual tempo e in qual epoca abbia ciò fatto: e se il chiar. Decaisne nell' attribuirgliela nei cataloghi dei semi del Giardino delle Piante, l' abbia fatto per la sicura conoscenza dell' opera in cui fu descritta dal Bunge siffatta pianta, o per semplice induzione, essendo il lodato Bunge il fondatore di questo genere, e il descrittore del maggior numero

delle sue specie. In tale incertezza mi sia lecito ancora di credere essere io stato il primo a darle e pubblicarne un tal nome.

Si è questa una pianta erbacea lanosa, a radice perenne, a foglie radicali lungamente picciuolate, a caule quadrangolare semplice di circa un metro d' altezza che termina in lunga spica di fiori giallo-citrini. Le foglie son tutte di forma ovale allungata, divise sino alla costa in segmenti pure ovali, quasi sessili, pennati e divergenti, suddivisi essi pure in altri brandelli lineari ottusi, sovente incisi, divaricati o ricurvi, verdi e lucenti al di sopra, pallidi e cospersi di poca lanugine per di sotto. Le foglie superiori sono molto più piccole, men frastagliate e con picciuolo più corto. La spica è diritta, composta di falsi verticilli staccati l' uno dall' altro, e formati di due cime opposte sessili con cinque fiori per una. Ogni cima alla base è fornita di una brattea quasi sessile, ovata a rovescio ed incisa profondamente dal mezzo in su in frastagli lineari e divergenti fra loro, dei quali gl' inferiori sono più lunghi. Dentro di questa e più presso al calice stanno poche altre brattee lineari ed intere, nascoste nella lana che avvolge il calice. Questo ha forma di tubo che s' allarga all' insù, non è gonfio nel mezzo, e finisce con cinque denti assai larghi, troncati e con una intaccatura nel margine, da cui esce una punta acuta, dura e ricurva, che li sorpassa. La corolla è aperta, ha il tubo cilindrico, il labbro superiore foggiato ad elmo da tutte parti vellutato, dentato inegualmente e leggiermente nel margine; l' inferiore ampio, ovato a rovescio, diviso in tre parti, la mezzana delle quali è troncata all' apice e molto larga in modo da ricoprire coll' orlo suo quello delle laterali. Gli stami sono ascendenti, gl' inferiori più lunghi degli altri due, connati insieme dal mezzo in giù, ed alla base ingrossantisi in due appendici ottuse e vellose. Le antere hanno loggie nericcie e molto divaricate. Il pistillo ha uno stilo diviso all' apice in due punte sottili, una delle quali brevissima, quasi piccolo denticello. L' ovario è fatto a trottola, troncato, piano e velloso all' apice, liscio ed imberbe nelle altre parti. Può distinguersi dall' *Eremostachys laciniata* pei seguenti caratteri di confronto.

EREMOSTACHYS IBERICA VIS.
Sem. rar. h. pat. 1846, pag. 4.

E. foliis bipinnato-partitis, segmentis linearibus incisis obtusis, floralibus superne inciso-palmatifidis; calyce infundibuliformi, dentibus late trun-

cato-emarginatis exserte spinoso-mucronatis, styli lobis brevissimis valde inaequalibus.

Syn. Phlomis iberica, Desf. in Cat. des grain. du Jard. des pl. Paris 1847 Fl. citrini Fl. Jun.

EREMOSTACHYS LACINIATA Bung.
In Ledeb. Fl. alt. 1.416 Benth. lab. gen. et sp. pag. 636.

E. foliis pinnatisectis, segmentis oblongo-lanceolatis linearibusve inciso-pinnatifidis, floralibus apice inciso-dentatis, calyce ovato ventricoso, dentibus emarginatis brevissime mucronulatis, styli lobis subaequalibus elongatis.

Syn. Phlomis laciniata L. sp. pl. 819 Fl. purpurei.

10. Nel catalogo dei semi per l' anno 1851 dell' orto botanico di Vienna diretto dal ch. prof. E. Fenzl essendo registrata la *Micromeria dalmatica,* col qual nome il ch. A. Delandolle avea descritto nel Prodromo di suo padre (vol. XII, pag. 225) la stessa pianta che un anno prima io avea pubblicato nella *Flora dalmatica* vol. II, pag. 199, col nome di *Calamintha origanifolia,* me ne ho procurato i semi per coltivare la pianta stessa ed esaminarla. Da questi semi però anzichè la pianta da me trovata in Dalmazia germogliò un' altra specie ad esse affine ma differente, di cui ho notato i caratteri nella rivista di alcune piante nuove dell' orto di Padova, chiamandola *Calamintha Fenzlii.*

Si è questa una pianticella quasi legnosa, alta una spanna, a radici fibrose perenni, a molti tronchi quadrangolari ascendenti, coperta in ogni sua parte da tenue e grigia e fitta peluria, a foglie ovali e un po' romboidali, con varii denti nel margine, piccinolate ed opposte. I fiori sono aggruppati in due mazzetti opposti di 3 a 10 fiori, pedicellati e forniti di una foglia simile alle altre, ma più piccola per chiascheduno, i quali continuandosi per tutta la parte superiore dei tronchi la trasformano quasi in altrettanti grappoli di fiori diritti e piuttosto radi. Ogni fiore ha un calice tubuloso con denticelli ovati e ristretti in punta, quasi eguali fra loro, e vestiti di corto vello nel lato interno della lor base; una corolla bianca picchiettata di violetto alla fauce ch' è fornita di peli, col labbro superiore troncato e bilobo, e dell' inferiore i lobi laterali rivolti in giù bislunghi, rotondi in cima ed interi, il mezzano quasi orbicolare intaccato od ondeggiato nel margine, e con una o due macchiuzze violacee nel mezzo. Gli stami

sorgono dal tubo della corolla, e sono di due lunghezze con antere nericcie a loggie divergenti alla base, ravvicinate ed unite all' apice. Gli achenii sono bislunghi, rotondi e pubescenti alla cima. Somiglia al portamento e ai caratteri alla *Satureja rupestris* Wulf. ed alla *Micromeria dalmatica* Benth. Differisce la *Calamintha Fenzlii* dalla prima per la fauce del calice pelosa e non nuda, pegli achenii rotondati in cima e non forniti di una cuspide laterale, che si scorge evidentemente nell' altra, benchè il neghi l' ill. Bentham. Diversifica poi dalla *Micromeria dalmatica* di questo autore o *Calamintha origanifolia* Vis., pei calici più lunghi appena canescenti e non irti, pei denti di questi larghi, ovati ed acuminati, e non già subulati, e per essere cotesti denti molto più corti, cioè tre volte più brevi del loro tubo. Le parti verdi di questa pianta stropicciate mandano lo stesso odore della *Satureja rupestris* Wulf.

CALAMINTHA FENZLII Vis.
Revis. pl. min. cogn. pag. 7, Venet. 1855.

C. fruticulosa adscendens, pube tenuissima subcanescens, foliis petiolatis ovato-rhombeis ovalibusve subserratis, floralibus decrescentibus, racemis foliatis laxiusculis cymis pedunculatis 3 — 9- *floris, calycis tubulosi pubescentis* 13- *nervii dentibus ovato-acuminatis subaequalibus tubo triplo brevioribus, intus barbatis, acheniis oblongis apice rotundato puberulis.*

Syn. Micromeria dalmatica Fenzl cat. sem. h. Vind. 1851, non Benth.

Obs. Differt ab hac *M. dalmatica* Benth. calycibus campanulato-tubulosis brevioribus hirtis, dentibus subulatis tubo paullo brevioribus. Antherae loculi apice juncti et basi divaricati ut in *Calamintha,* nec e contra ut in *Micromeria.*

11. I ligustri, celebrati già da' poeti pel candore de' loro fiori, s'accrebbero di recente di molte specie, che alla prerogativa de' fiori aggiungono la verdezza persistente ed immutabile delle foglie, e provenendo da climi simili al nostro, come la China boreale, il Giappone, il Nepal, abbelliscono di un nuovo ornamento i boschetti de' giardini e de' parchi. Fra questi ne gira uno in commercio col nome di *Ligustrum ovalifolium,* che avendo fiorito nell'Orto botanico, mi si rivelò ben diverso da quello descritto già dall' Hasskarl fra le piante dell'Orto botanico Bogoviense, se ne è esatta la descrizione riferita dal Walpers, e differente pure da tutti gli altri registrati già nel Prodromo del De Candolle. Gli è

questo un arbusto a tronco ritto, a corteccia di color bajo, screpolata, rugosa, a rami distesi orizzontalmente, sparsi di lenticelle, e verso la cima coperti di minuta peluria, a foglie ellittiche od oblunghe, acute in punta, e poco o nulla alla base, levigatissime d' ambe le parti, d'un color verde cupo nella faccia, pallide e punteggiate finissimamente nel dorso, rette da picciuoli scanalati, lunghi due linee, mentre la lamina è lunga circa un pollice e mezzo. I fiori sono ordinati sulla estremità dei rami in una pannocchia rada, a peduncoli pubescenti distesi orizzontalmente e forniti alla base di una brattea lanceolata cuspidata sessile, diramantisi in gambetti secondarii che portano verso la cima un corto grappoletto da cinque a otto fiori pedicellati candidi, ognuno de' quali è provveduto di una brattea piccola lineare membranosa. Il calice è fatto a campana e diviso nel margine in quattro denti brevissimi larghi ed acuti. La corolla è fatta a sottocoppa e spartesi fino a metà in quattro divisioni ovali-lanceolate, acute e callose in punta, che s' arricciano arrovesciandosi, bianche e di odore alquanto spiacevole, e simile a quello del *Ligustrum nepalense* del Wallich. Gli stami sono due attaccati fra le divisioni della corolla, a filamenti corti, ad antere bislunghe biloculari, smarginate ad ambe l' estremità, ed attaccate al filamento pel dorso. Il pistillo ha uno stigma ingrossato e bislungo, pubescente, brevemente bifido all' apice; uno stilo cilindrico, che eccede del doppio la lunghezza del calice dopo cadutane la corolla, ed un ovario troncato od ottuso incassato nel fondo del medesimo. Non diè peranco frutta mature. Reputandolo nuovo ne aggiungo qui la descrizione specifica e la figura, affinchè que' botanici che posseggono esemplari autentici del vero *L. ovalifolium* possano assicurarsi se realmente ne differisca.

Ligustrum Kellerianum Vis.

L. ramis obtuse quadrangularibus patulis superne minute puberulis, foliis petiolatis ovalibus oblongisve acutis acuminatisve coriaceis glaberrimis, supra atro-viridibus nitidis, subtus pallidis, panicula terminali brachiata laxa, ramulis pubescentibus patentissimis, bracteis foliaceis persistentibus, floribus bracteolatis pedicellatis secus ramulorum apicem breviter racemosis, stylo calycem duplo excendente.

Colitur sub nomine *L. ovalifolii* Hasskrl, quod differt juxta diagnosim datam in Walp. Repert. bot. VI, pag. 462 quam solum novi, ramis tere-

tibus glaberrimis, panicula contracta subracemosa, et floribus subsessilibus fragrantibusque. Dixi in honorem doct. *Antonii Keller* olim horto botanico Patavino assistentis dignissimi, nunc vicarii rei agrariae professoris egregii in Patavina Universitate.

Obs. A. L. japonico Th. praeter habitum graciliorem, differt panicula patentissima nec contracta, et bracteis foliaceis persistentibus.

12. Un altro arboscello di questo genere cresce pure coltivato da poco tempo sotto il falso nome di *Ligustrum spicatum.* Arriva a due o tre piedi d'altezza (negli esemplari da me veduti), ha tronco e rami diritti, fittamente gremiti di lenticelle ovali divise per lungo da una fessura, sparsi di peli lunghetti, con foglie liscie, verdi di sopra, pallidette al di sotto ed ivi punteggiate minutissimamente, assottigliantisi gradatamente in una punta lunga e nell' ultima estremità un poco ottusa, la quale finisce nel mezzo in un pungolo acuto. Alla base si prolungano esse in un picciuolo scanalato, che non arriva a due linee di lunghezza. I fiori sono ordinati in pannocchia fitta, i cui rami sono pelosi ed eretti, le brattee primarie lanceolate e fogliacee, le secondarie ovate membranose bianche brevissime; i fiori retti da piedicelli glabri e più lunghi del calice; questo brevemente tubuloso ed appena intaccato nell'orlo da quattro denti cortissimi e quasi ottusi; la corolla ipocrateriforme, il cui tubo è tre volte maggiore del calice, il lembo spartito in quattro divisioni bislunghe rovesciate ed acute, gli stami e il pistillo come nel precedente. Essendo pei caratteri fin qui notati diversissimo dal *Ligustrum spicatum* dell' Hamilton, ch'è lo stesso che il *L. nepalense* del Wallich, e dagli altri di cui ho potuto vedere le descrizioni, lo nomino

Ligustrum Massalongianum, Vis. tab. IV.

L. ramis teretibus pilosiusculis crebre et conspicue lenticellatis erectis, foliis lanceolatis acuminatis mucronatis in petiolum attenuatis opacis glabris, floralibus lanceolatis persistentibus, paniculae terminalis compactae ramis erectis piloso-pubescentibus, floralibus pedicellatis glabris, stylo calycem duplo excedente.

Syn. L. spicatum Hort. non Ham. nec Don. Fl. candidi, ingrate odori. Fl. aestate. Affine *L. angustifolio* Hort., quod differt, quantum ex specimine

haud florido conjicere licet, foliis oblongo-lanceolatis, basi latioribus, margine serrulato-scabris, subtus glaucis, ramis velutinis absque lenticellis.

Dixi in honorem amici suavissimi, lichenologi acerrimi, deque paleontographia vegetabili italica apprime meriti prof. *A. B. Massalongo.*

Spiegazione della tavola del Ligustrum.

a. Parte di ramo ingrandita per farvi scorgere le lenticelle ed i peli.
b. Parte della pannocchia ingrandita per vederne meglio il fiore ed i peli.

(*Letta il* 15 *luglio* 1855).

Pinus Parolinii - Vis.

Prem. Lit. Kier Febbrajo 1858.

Juniperus Bonatiana Vis.

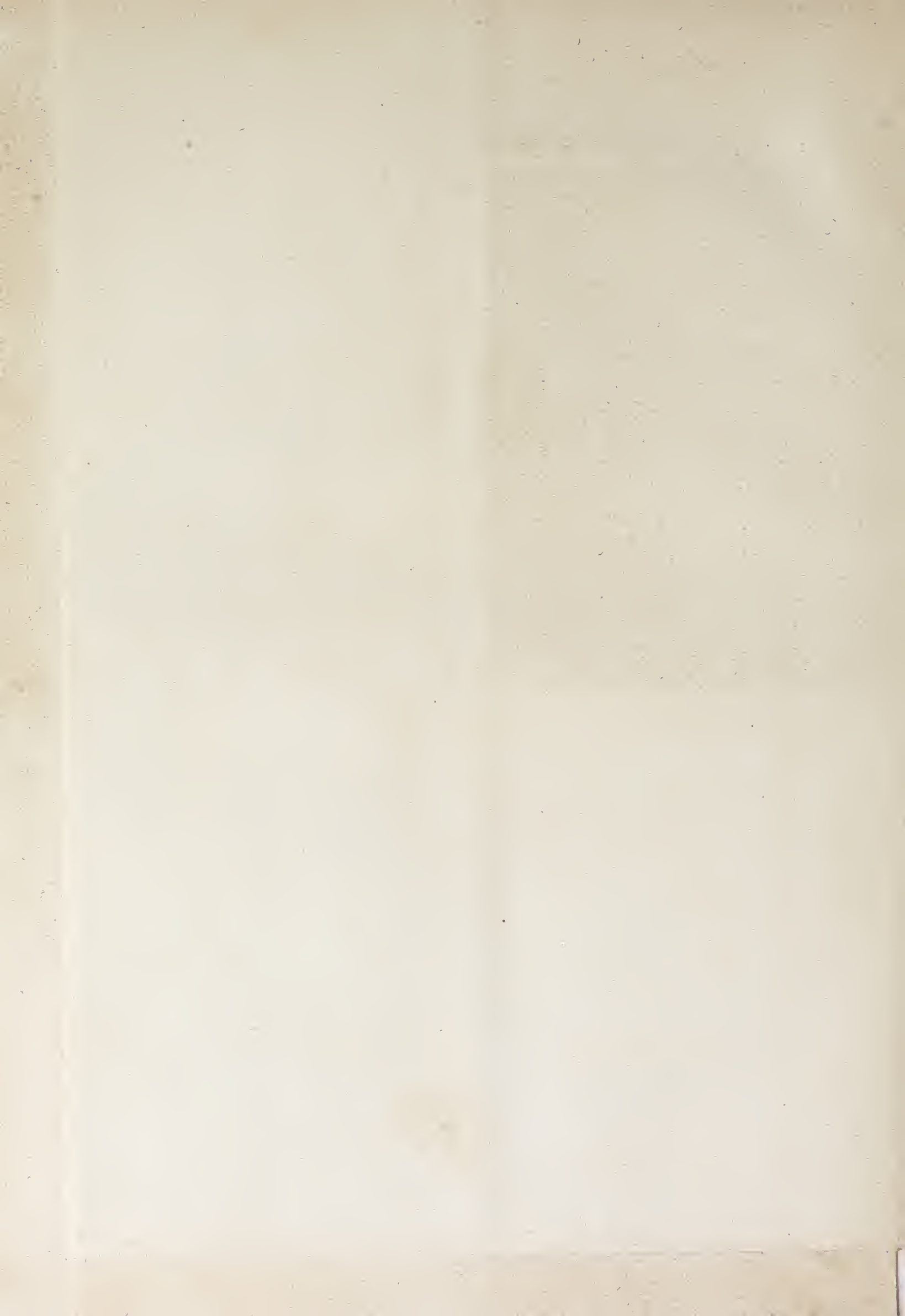
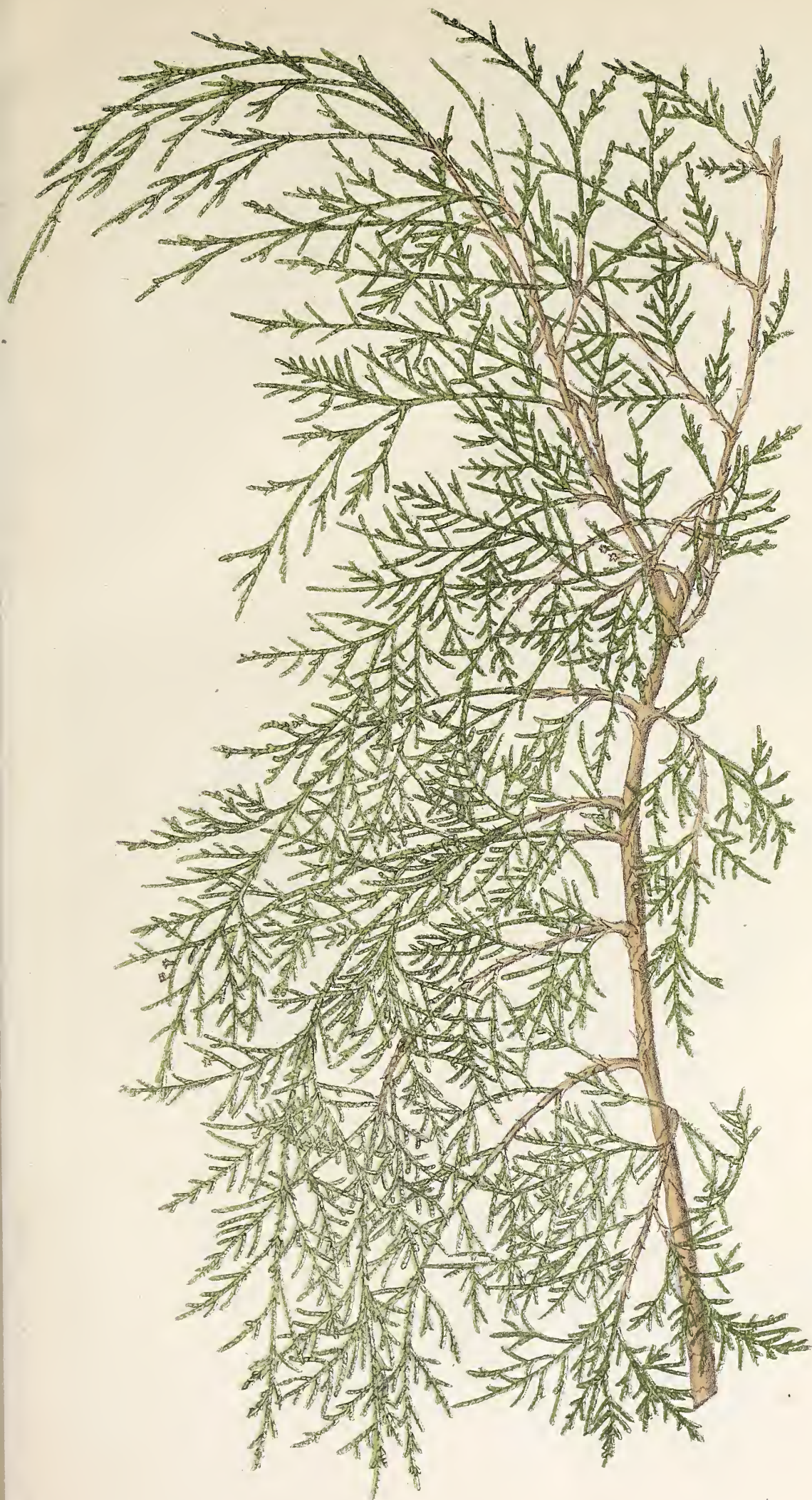
Pesot Lit. P. Prosperini

Padova 1856.

Juniperus Cabiancae - Vis.

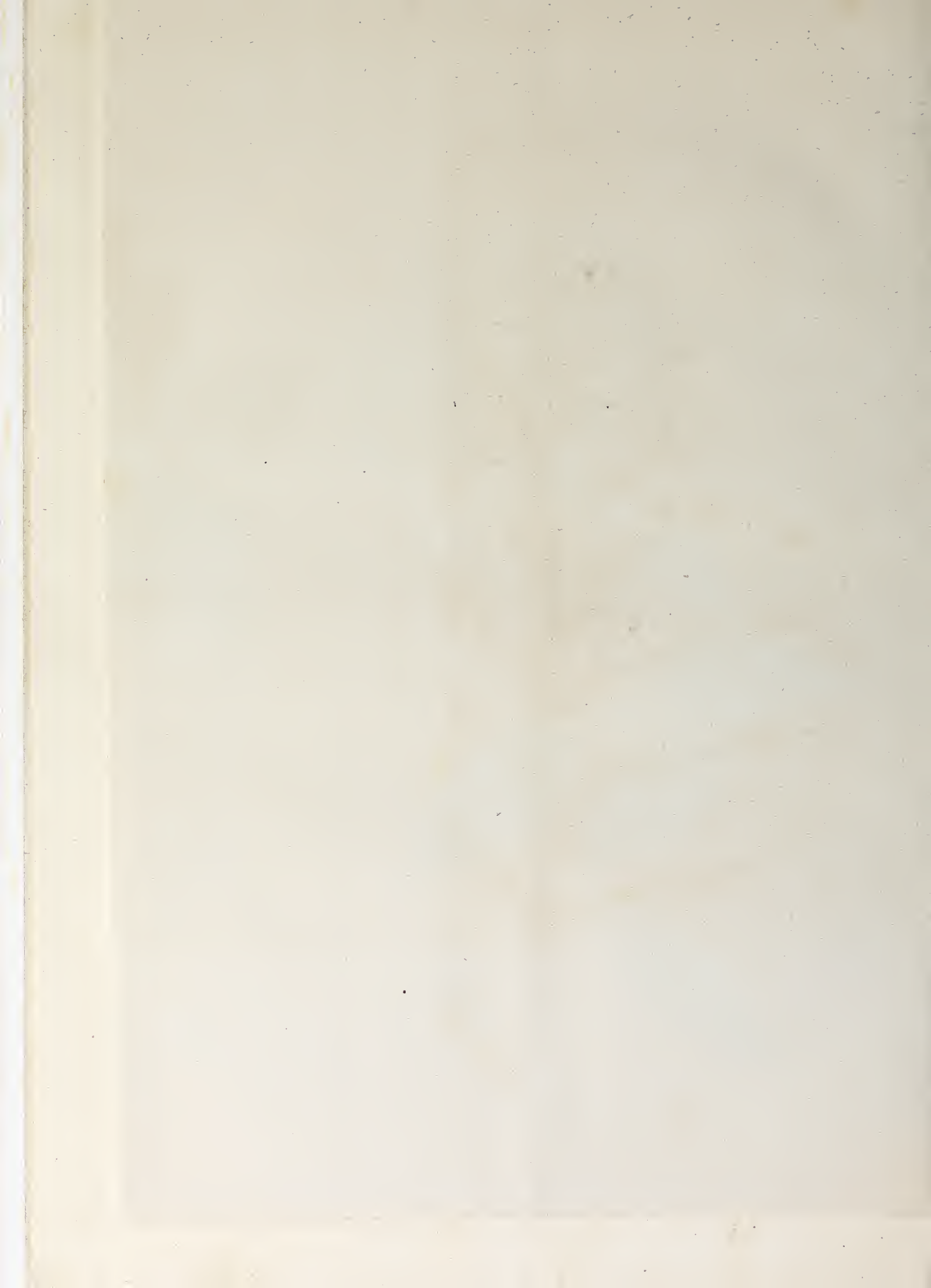
Prem. Lit. P. Prosperini

Tav II.

Ps lit Kier

Daphne Elisae Vis.

Eupatorium Morisii Vis.

Clerodendron Manettii Vis.

Prem. Lit. Kier Gennajo 1856

Ligustrum Massalongianum – Vis.

Ruellia undulata – Vis.

Prem. Lit. Kier Decembre 1855

SOPRA

L' ESTRATTO DELLA NOCE VOMICA

E LA MANIERA ONDE OTTENERE LA STRICHNINA

DEL MEMBRO EFF. ANTONIO GALVANI

Processo per ottenere l'estratto alcoolico della noce vomica e, come conseguenza di esso, quello per separare la strichnina.

La preparazione dell' estratto della noce vomica, se mal non m' avviso, offre argomento non dubbio a conoscere gli effetti di una totale, od almeno difficile separazione dell' edotto efficace, l' *igasurato di strichnina,* per lo chimico modo di agire del solvente l' *alcoole,* sopra uno dei componenti del seme, la *mucillaggine,* maniera onde agisce quello sopra di questa, che tanto può da non vincere negli effetti la coesione medesima, la cui mercè sono aggregate le molecole di questa parte organizzata del vegetabile, anzi ad avvalorarla così per azion chimica di lui sopra di quella da impedire la soluzione del preesistente sale alcaloideo.

I metodi fin or suggeriti per ottenerlo, come non offrono identico il prodotto in quanto alla di lui composizione, così non porgono un farmaco di sempre eguale e costante efficacia: questa efficacia di lui è in ragione inversa della quantità ch' è dato raccorre, e la quantità ottenuta è in giusto rapporto alla natura dell' adoperato solvente: e perchè quanto è maggiore il prodotto, meno valgono i mezzi onde sceverarlo, così è forza ammettere necessaria la cono-

scenza di una maniera di oprare che allontanando pure gli effetti e dello inganno e della ignoranza, non lasci incerto il seguace di Coo nelle terapeutiche prescrizioni.

L' importanza adunque di tracciare una via, che tolga ogni dubbiezza in proposito, fu l'oggetto per lo quale mi sono adoperato, e nutro speranza di non essermi inutilmente applicato intorno a questa farmaceutica preparazione.

L' igasurato di strichnina è il solo principio attivo che si contiene nello estratto della noce vomica: gli altri, cioè la poca resina, e la poca gomma ad estrattivo ridotta, devono la loro azione al sale alcaloideo a quelli unito.

L' acqua e l' alcoole di gravità specifiche differenti, furono suggeriti per ispogliar il seme di quanto racchiude, e come per la tessitura cornea di lui, egli mantiene una massima coerenza molecolare per la quale è difficile il di lui rammollimento ed è perciò fatta meno l' azion dei solventi, così in modi diversi si è tentato agevolare la di lui contusione.

Lascio d' intrattenermi su questo subbietto, facendomi a ragionare piuttosto, e brevemente, sulla composizione di questo farmaco, diversa in relazione alla natura del solvente prescelto.

Si preferisce infatti o l' acqua o l' alcoole più o meno idrato, quali mezzi atti ad ottenere il ricercato prodotto. Nel primo caso è evidente che dovendosi sciorre la gomma, il poco estrattivo, la poca resina ed il sale alcaloideo, tutti nell' estratto si contengono questi edotti, per i quali la quantità che di lui si raccoglie, è copiosa. Ma essendo la gomma a mucillaggine ridotta, inefficace del tutto, il composto è fornito di debole azione, e come sopra questa mucillaggine hanno potente influenza le variazioni igrometriche e la temperatura, così il composto è soggetto ora a rammollire, ora a farsi duro e tenace, coprendosi di una crosta ammuffita. Succede talvolta che in esso si ecciti un movimento di fermentazione, effetto della natura dei principj che lo compongono, per cui cangiasi la natural composizione e, decomponendosi l' estrattivo e la mucillaggine, perde la omogenea sua densità, si fa grumoso e s' indura per lasso del tempo. È vero che in tale stato acquista maggior efficacia, perchè sotto minor massa si mantiene indecomposto tutto il preesistente alcaloide, non più nella primiera condizione d' igasurato, ma di lattato; ma certo è d' altronde, che non identica è l' azione di esso, perchè relativa al grado di scomposizione sofferta totale o parziale dei principj organici da' quali risulta.

Fu da questa osservazione ch' ebbe origine la scoperta di A. Corriol, il

quale propose la fermentazione del seme immerso nell' acqua onde distruggere la mucillaggine, e più presto e facilmente ottenere la strichnina.

Da queste considerazioni impertanto sembrami poter non a torto dedurre che il farmaco così preparato debba escludersi dalla terapia, sì perchè non costante nella sua composizione, come perchè è incerta la di lui efficacia.

E facendomi ad esaminare l' azione dell' alcoole, è duopo riflettere che alcun autore prescrive dover esser la di lui densità di 36° in 38°, altri di 20° 24°, alla fine alcuno lo vuole da 15° a 20°.

Riflettendo coi primi, chiaro risulta che si raccorrà pochissimo prodotto, il perchè la gomma ch' è in esso insolubile, non può esser materiale componente l' estratto, e come quella abbonda più di ogni altro principio, così in relazione alla molta quantità che col mezzo dell' acqua si ottiene, e ch' è di poca efficacia, massima deve risultare la differenza, tutto raccogliendosi in poca materia il preesistente alcaloide. L' azione terapeutica adunque di questo composto, che sarà somma, sarà in ragione inversa della ottenuta quantità.

Diceva che la gomma è insolubile nell' alcoole, per cui è poco il prodotto che per questo raccogliesi, mi è duopo anzi di aggiungere esser pure precipitata mercè dell'alcoole dalle di lei soluzioni per azion chimica. Questo modo di agire dell' alcoole sopra di quella in istato di soluzione, avviene anche in istato naturale nel seme, facendola più coerente, come tale per esso risulta il tessuto di lui, ed essendo per questa reazione minorata in esso la facoltà di essere compenetrato dall'alcoole, non è dato sciorsi del tutto e facilmente l' igasurato di strichnina. Riesce quindi più lungo il procedere onde ridurre ad insipidezza la massa organica, e non torna economico attendere a questa condizione, a cagione della irreparabile perdita del menstruo nelle macerazioni e distillazioni necessarie.

È per questo che nel mio esordire diceva che non sempre la sola coesione dei corpi rende difficile la separazione d' un qualche edotto, bene spesso opponendosi a quella la chimica azione dei solventi sopra alcun altro principio preesistente nell' essere organico che si vuol decomporre.

Quando poi si facesse riflesso all' azione dell' alcoole di gravità inferiore alla sopraindicata, in ragione al grado di sua idratazione, varia la quantità del prodotto, e varia pure la efficacia del composto ottenuto. Meno idrato è l' alcoole adoperato, più energica riesce l'azione di lui sul principio gommoso, siccome mezzo che avvalora l'aggregazione molecolare, più idrato s' impiega, e viene

meno quel modo speciale di agire su di essa, prevalendo invece l' azione dell' acqua che si fa solvente in ragione alla propria quantità.

Si avrà impertanto attivissimo l' estratto avuto per l' alcoole a 36°, ma in pochissima quantità, meno efficace, ed in copia maggiore quello dato dall' alcoole a 24°, abbondante il prodotto, ma di debole azione in senso relativo, l'altro avuto dall' alcoole a 16°, pochissimo attivo alla fine l' aquoso, sebbene in quantità superiore ad ogni altro.

Da questi riflessi sembrami doversi conchiudere, non poter pretendere che ogni farmacia abbia un estratto d' identica composizione, e perciò di eguale efficacia, differenti essendo i metodi onde ottenerlo, per la qual cosa, chi lo prescrive dovrà a ragione dubitare degli effetti da esso sperati.

E come non ammettono controversie le esposte considerazioni, così ho creduto opportuno rivolgere alcun riflesso sopra questo argomento onde poter conoscere una maniera di oprare che sia conforme alla scienza, e che del pari torni a vantaggio dell' umanità sofferente.

Ciò premesso, ecco il riflesso che mi fu guida opportuna al proposito.

Alla facile separazione dei principii direttamente, ed indirettamente attivi, ed alla inalterabilità dell' estratto, si devono considerare siccome antagonisti la compattezza cornea del tessuto organico del seme e la gomma: a vincer la prima niente altro è mestieri che ricorrere a lunghe e ripetute digestioni di esso nell'acqua, a separar la seconda, già in mucillaggine cangiata per lo primo aquoso trattamento, abbisogna l'uso dell'alcoole, ed appunto perchè quella per questo è precipitata dalle soluzioni aquose, traendo profitto di questa proprietà, si deve ottenere un estratto puro ed inalterabile per lasso di tempo. In conseguenza di ciò, fattomi all'esperienza, mi fu dato riuscirvi, per cui mi faccio ad esporre il metodo che immaginava quanto facile nella sua esecuzione, altrettanto ferace di costante riuscimento.

Dopo la ebollizione nell'acqua per circa due ore del seme grossamente infranto, e vagliato pure ad oggetto di togliere il più ch' è possibile dello involucro lanuginoso, di che è naturalmente investito, vi si lascia digerire per circa 24 ore, poi si passa per tela e si preme in torchio la massa: quando sia dato di farlo, si schiaccia in mortajo di pietra il residuo, e si assoggetta dappoi ad un egual trattamento, ripetendolo tre o quattro volte se abbisognasse onde ridurre ad insipidezza la materia fibrosa residua. Le decozioni si fanno ogni giorno un poco svaporare, massime se la stagione fosse estiva, acciocchè non si

destasse il movimento solito di fermentazione, evaporazione, che si spingerà fino alla consistenza di estratto densissimo quando sarà compiuto l' esaurimento del seme.

Fatto ciò, si tratta a freddo questo estratto col doppio di alcoole 36°, sommovendo la materia con ispatola di legno, onde facilitare la disgregazione di lui, e perciò la soluzione in quello della resina, dell' estrattivo e del sale alcaloideo: dopo il lasso di 24 ore si decanta la soluzione, già fattasi colorita, sopraversando al residuo dell'altro alcoole, e così ripetendo, finchè spremuto in torchio, è insipido assolutamente. Feltrata la tintura per carta emporetica, si distillano a calor del B. M., per raccorre tutto l'alcoole, e l'avanzo della distillazione si fa svaporare alla densità ordinaria di estratto.

L'acqua, mercè del calorico, sciolse quanto nel seme si conteneva: l'alcoole sopra l' estratto sciolse ed estrattivo e resina ed igasurato alcaloideo: la gomma ridotta a mucillaggine, che costituisce il residuo in esso insolubile, non è tocca dall' alcoole.

La compattezza del seme non resiste all' azione dell' acqua avvalorata da quella del calorico: la mucillaggine rappresa per azione dell'alcoole non affievolisce la di lui proprietà solvente degli altri principj fatti liberi, il perchè non più soggetti alla coesione delle molecole organiche che a sè li ratteneva, per cui questa preparazione è tutta appoggiata ad una semplice soluzione.

L' estratto ottenuto è intieramente solubile nell' alcoole, imperfettamente nell' acqua, intanto che il residuo del trattamento alcoolico dell' estratto aquoso dapprima preparato è intieramente solubile nell'acqua, ed insolubile nell'alcoole. L' uno è amarissimo, insipido l'altro: quello è di color giallognolo, è pellucido, inalterabile dal tempo, in quantità di dr. 14 per ogni libbra del seme, e come in questo si contengono tutti i principj efficaci e solubili nell' alcoole, niente essendovi di ciò ch' è inerte, così è da ammettersi fornito del maggior grado di azione.

Due condizioni ho stabilite nel proposto modo di operare:

1.° La vagliatura dei semi macinati, onde sceverare il più ch' è dato dall' involucro lanuginoso.

2.° La riduzione ad estratto densisssimo dei decotti aquosi.

In quanto alla prima, siccome la mercè di studj da me in passato rivolti sopra quell' involucro, onde conoscere se contenesse brucina, seppi esservi dell'olio fisso, e della clorofilla verde azzurrognola, così la presenza di quel tessuto

sarebbe cagione che nei decotti e nell'estratto vi si associassero due principj proprj di lui: verrebbe da ciò in conseguenza, che il prodotto sarebbe impuro a cagione dell'olio, per la qual cosa collo scorrer del tempo aquisterebbe un odore di rancido nauseoso. In quanto risguarda la seconda, se l' estratto aquoso non fosse assai denso, l' acqua in esso contenuta sminuirebbe l' azione dell' alcoole sopra la mucillaggine; si sciorrebbe allora nel nuovo solvente, e non potrebbesi per tal guisa separar quell' edotto cui è diretta l' operazione.

La privazione impertanto di tutta sorte di principj inattivi, la massima e costante efficacia del composto, sono condizioni per le quali debbasi accogliere questa maniera di oprare a preferenza dell' altre finor conosciute, almeno finchè da più esperti non fia dato conoscere un modo migliore all' ottenimento di questo prodotto.

Processo per ottenere la strichnina mercè il trattamento della noce vomica sopraindicato.

Non v' ha dubbio che le maniere proposte fin oggi alla separazione di questo alcaloide non sieno poco economiche in quanto ai mezzi cui è forza ricorrere, tanto più quando piacesse riflettere alla pochissima quantità del prodotto che si raccoglie, qualunque sia il modo di oprare. Sia pur quello dell' ebollizione del seme nell'acqua o pura od acidata, e successivo trattamento dei decotti con calce idrata, infine del precipitato strichninato, asciutto che sia, con l'alcoole, perchè sciolgasi l' alcaloide, sia quello della fermentazione di lui, immaginato da A. Corriol, scomponendo in appresso il sale organico con una base, perchè precipiti la strichnina, processo che dal sig. Moulin fu pubblicato nel 1849 in proprio nome nell' *Annuario delle scienze mediche* del sig. G. B. Sembenini, ma ben molti anni innanzi fatto pubblico dal suo inventore nel *Journal de pharmacie,* ossia, infine, quello dei sig.[i] Henry e Plisson, che prescrivono le ripetute digestioni del seme raspato nell' alcoole acidulato per scomporre direttamente il preesistente igasurato alcaloideo, e posteriore mescolamento nelle tinture di calce anidra, onde, saturando l' eccesso dell' acido inorganico adoperato, neutralizzare il nuovo sale prodotto che nell' alcoole istesso rimane sciolto, è fuor di dubbio che, a cagione della tessitura cornea di quella parte del vegetabile, per cui si mantiene somma l' aggregazione molecolare, e della molta gomma in essa contenuta, non ommessa la poca solubilità dell'edotto nell' alcoole, è

assai lungo il procedere, e, come diceva poc' anzi per l' impiego e dispersione inevitabile dei mezzi atti a separarlo, e per lo scarso prodotto che vien dato raccorre, non riesce il lavoro di relativo compenso a quello che se ne occupa, e tanto più quando pongasi mente alle maggiori cautele cui l'operatore è obbligato di praticare, perchè trattasi di separare un principio di sapor amarissimo, d' azione sommamente venefica, eseguendo una farmaceutica operazione malagevole e nojosa in ogni sua parte. Non era impertanto fuor di ragione pensare, che conosciuta la maniera con cui facilmente ottenere l' estratto, quel composto cioè che in sè riunisce tutto il principio attivo sulle sue naturali preesistenti combinazioni, scevro da materiali inerti, mi rivolgessi alla ricerca di un più facile metodo, dei finor conosciuti, per separare la strichnina, del che sperava riuscirvi, dovendo a pien diritto considerare nell' estratto la presenza del sale alcaloideo, svincolata da que' legami che aveva per lo innanzi nel seme. Ed intrattenendo il riflesso alla composizione delle tinture avute la mercè della lavatura dell' estratto aquoso con l' alcoole, doveva stabilire che poca resina, estrattivo ed igasurato di strichnina fossero i soli principj costituenti, per la qual cosa deboli attrazioni dovevano esser distrutte per isolarlo. Acidulava infatti con acido solforico le tinture medesime, e turbavano con separazione della resina: su quelle aggiungeva la metà circa del loro peso d' acqua, e tanto più si facevano torbide, feltrava e distillava il liquore tanto da raccorre presso che tutto l'alcoole: dopo il raffreddamento del residuo della distillazione, trovava al fondo del recipiente poca resina pure raccolta, per la qual cosa ripeteva la feltrazione: scolorava il liquore con carbon animale, e feltrato ancora, scomponeva con ammoniaca il già sciolto solfato alcaloideo: collo scorrere di poche ore, erasi cristallizzata la strichnina: al B.M. faceva svaporare ed il poco alcoole ancora intromesso, e la poca ammoniaca, che in eccesso leggero aveva adoperata, e col raffreddarsi del liquido, un' altra porzione dell' alcaloide si raccoglieva: finalmente queste acque madri, dalla reazione di poca ammoniaca che riversava, mi porgevano scarso sì, ma un altro prodotto.

Raccolte tutte e tre le separazioni, salificate con acido solforico diluito, scolorata la soluzione con carbone, e feltrata e scomposta con ammoniaca, aveva la strichnina pura e bianchissima.

Lascio i molti riflessi che pur potrei rivolgere sull' ultimo processo immaginato dal sig. Paters, nel qual processo, da me ripetuto, ebbi a conoscere che molte delle condizioni da esso suggerite non corrisposero mercè dell' espe-

rienza, potendo invece rassicurare che essendo molti anni che da me ad ogni altro si preferisce il processo suesposto, mi fu sempre più conforme degli altri nel riuscimento. E che sieno, molti anni che da me venne ed immaginato ed usato, può farne fede il prof. Cenedella, cui nel luglio del 1847 glielo comunicava, ed alla cui presenza preparava l' estratto e separava l' alcaloide.

(*Letta il* 25 *giugno* 1855).

STUDJ

SUI MONTI DI PIETÀ

DEL

M. E. D.^r FERDINANDO CAVALLI

Illustri colleghi! Gli stabilimenti che prestano denari sovra pegno corrispondente sono, fuor di dubbio, da annoverarsi fra quegl'Instituti di beneficenza pubblica, che toccano più da vicino la condizione economica de' necessitosi; ed è appunto di tali stabilimenti che, per soddisfare al compito assuntomi, vengo oggi ad intrattenervi.

L' usura è mal vecchio nel mondo, nato d' un parto col bisogno e col commercio. Poco o nessun riparo gli antichi seppero mettere a questo scapito. Gli Ateniesi (1) erano feneratori avidissimi, e Solone lasciò il peso dell'usura a beneplacito del prestatore (2). In Roma, sotto i re, l' interesse del denaro non ebbe regole (3) : prime le dodici tavole lo tassarono (mi tengo alla opinione di Niebuhr e di Troplong) (4) al dieci per cento l'anno. I tribuni nell'anno 406 lo ridussero alla metà; poi nel 411, a vietare ogni interusuro, venne la legge Genucia, la quale però io credo con Salmasio (5) non sia mai stata attuata. I

(1) Petit (Sam.) *Legaes atticae*, lib. V, cap. 4.

(2) Salmasius (Cland.), *De usuris*, cap. XI.

(3) Tacitus (C. Corn.), *Annalium*, lib. VI, cap. XVI.

(4) Troplong, *Du Prét*, nella prefazione.

(5) Salmasius, *De modo usurarum*, pag. 292.

cittadini romani per usureggiare alla libera si coprivano col nome d'un latino o d'un alleato, nei quali il diritto loro non aveva impero; e questo sutterfugio causò nell'anno 560 la legge Sempronia, che costrinse anche gli alleati e i latini a stare alle prescrizioni di Roma sui prestiti (1). Non per questo venner meno gli avvolgimenti degli usurai per eludere le leggi, le quali a forza di abusi caddero in tale dissuetudine, che il pretore Asellio nel 664 perdè la vita col volerle rimettere in osservanza (2). Dopo che, presa Cartagine, il popolo fu sopraffatto dall'oligarchia un *senatus consulto* (3) prefinì l'usura il più a uno il mese per cento: Questo fu l'interesse legale sotto Nerone (4), Trajano (5) al tempo del giureconsulto Paolo (6), e sotto Diocleziano (7); ma sembrando poco agli usurieri, lo stipularono doppio (8), triplo (9), quadruplo (10), quintuplo (11), e malizie sottilissime trovarono per moltiplicarlo (12). Costantino prescrisse che nei prestiti di derrate in natura non si potesse patteggiare che il 50 per cento; d'onde si coglie che prima doveva usarsi assai più (13). Finalmente Giustiniano (14) fissò il frutto del denaro nel 4 per cento ai prestatori illustri, nell'8 per cento ai mercanti, nel 12 per cento a tutti gli altri, e stabilì quello delle derrate prima nel 12, e poi nel 12 e ½ per cento (15).

Poco stante le nordiche frotte calarono sul dilenquito occidente come avoltoi al carcame. In quel subisso, il diritto giustinianeo non appena promulgato si scombuiò; la rapacità dei barbari ladroni impoverì queste provincie, e la strettezza universale di denaro per dritta forza crebbe il suo prezzo. Per verità, la Chiesa di Cristo, sempre pietosa agli oppressi ed afflitti, tosto ebbe voce, diedesi ogni cura per estirpar questa peste; ma la maestà veneranda del som-

(1) Livius (Titus), *Historiarum*, lib. XXXV, cap. VII. — Noodt, *De foenore et usuris*, lib. I, cap. IV.
(2) Appianus Alexandrinus, *Romanae historiae*, lib. I.
(3) Dureau de la Malle, *Economie politique des Romains*, lib. IV, cap. 11.
(4) Seneca, *De beneficiis*, lib. 7, cap. 6.
(5) Plinius, *Epistolarum*, lib. 10, 62.
(6) Lib. 40 *FF De reb. credit.* — *Sent.*, lib. 2, tom. 14, § 2.
(7) Lib. 8, cod. *Si cert. petat.*
(8) Cicero, *Verrinarum*, 3, cap. 71.
(9) Juvenalis, *Satyrarum*, lib. 9, vol. 7.
(10) Cicero, *Ad Atticum*, lib. 5, Ep. ult.; lib. 6, Ep. I, 2.
(11) Horatius, *Sermonum*, lib. I, § 1.
(12) Noodt, *De foenore et usuris*, lib. II, cap. XIII.
(13) Cod. Teodos. lib. 2, tom. XXXIII.
(14) Lib. 26, s. 1, cod. *De usuris*.
(15) Nov. 32, 34.

mo Leone (1), che contenne la ferocia di Attila impazzante, a frenare non valse il flagello delle usure. L'iniquità dei prestatori giunse a tal segno, che i Padri del concilio di Parigi (anno 819) attestavano che *evenire solet, ut pro uno frumenti modio mutuato tres aut certe quatuor modii a pauperibus tempore messis violenter exigantur.* Il perchè Lodovico Pio (2) lamentava che laici e chierici con isvariati e innumerevoli generi di usura affliggano i poveri, li opprimano e dissanguino così, che molti muoiono dalla fame, e molti dalle proprie fuggono a terre straniere. Qui fra noi, e lo prova una carta del 1124 (3), l'interesse era del trenta per cento; ma più spesso costumavasi di obbligare per la moneta avuta un podere, le cui rendite restavano del mutuante. Usure cotanto enormi indussero il secondo concilio di Laterano (anno 1139) a partiti severi; i feneratori, dichiarati infami, furono colpiti da scomunica, esclusi dalla sepoltura ecclesiastica; i testamenti loro invalidati: sennonchè nel tempo medesimo che la Chiesa con queste pene fulminava gli usurai, lo spendio delle crociate, l'autonomia dei Municipii, il commercio ravviato dimandavano denaro, e ne facevano crescere il merito; onde lo statuto del 1270 (4) permise a Modena l'interesse del 20 per cento, e quello di Padova nel 1263 (5) accordò il 20 per cento con pegno, il 30 senza. Le censure ecclesiastiche (come sempre avviene delle leggi che contrastano bisogni universali) non tolsero l'usura, ma in mano la ridussero di gente malvagia, la quale lucrava sui mutui e sulle minaccie stesse dei canoni. In questo traffico nequitoso acquistarono brutta nominanza specialmente i Caorsini, i Toscani, i Lombardi, e quello sbandeggiato popolo d'Israele, che le interdizioni, le contumelie e le angherìe continue aveano fatto incattivire. Tutti costoro sparsi per ogni dove, non contenti del 20 nè del 30 per cento, vennero a tale ingordigia, che si fecero lecito il 65 per cento (6); anzi re Giovanni nel 1360 (7) concesse agli Ebrei il prestare con pegno a quattro denari per lira la settimana, che è come dire a più dell'86 per cento l'anno. È ben vero che anco gli usurai erano assai sovente taglieggiati e rapinati dalla cupidigia altrui; ma estorsioni sì fatte, osserva giustamente

(1) Epist. cap. 3, Labbé, tom. 3 pag. 1293.

(2) Vasco, *Usura libera*, cap. 6, § 43.

(3) Gennari, *Delle usure degli antichi padovani*, pag. 11.

(4) Muratori, *Dissertazioni sopra le antichità italiane*, diss. XVI.

(5) Gennari, opera citata, pag. 16.

(6) Gennari, opera citata, pag. 13.

(7) Say, *Traité d'économie politique*, lib. 2, cap. 8.

Montesquieu (1), consolavano i popoli, non li sollevavano; anzi io penso dovessero opprimerli tanto più, giacchè alla fin fine le gravezze si rindossano sempre ai bisognosi.

Lo spirito di carità vedendo che non il freno delle leggi, non il rigore dei magistrati, non le censure, nè il terrore della religione avevano potuto togliere o limitare le usure, pensò mettersi per altra via, e di porsi esso medesimo in concorrenza co' prestatori. Trovato egli è questo della nostra Italia.

Verso la metà del secolo decimoquinto frate Barnaba da Terni, dell'ordine dei Minori, essendo a predicare in Perugia, dimostrava la obbligazione strettissima che hanno i ricchi d' essere generosi delle abbondanze loro verso i poverelli; ed a bene osservare questo precetto evangelico con molto calore esortava quei terrazzani a mettere insieme una somma di denaro per farne misericordia ai bisognosi (2). Le parole dell' apostolico banditore germinarono frutti di carità; onde in poco d' ora ebbesi buona quantità di pecunia. Così l'anno di grazia 1464 ordinossi in Perugia il primo luogo di Monte, alla cui fondazione ebbe parte non piccola Fortunato de Copolis, legista valente. In quell'anno medesimo Orvieto; poi nel 1469 Viterbo, e nel 1479 Bologna seguitarono l'esempio dei Perugini; ed i Monti di queste città furono di mano in mano stanziati da bolle apostoliche.

I frati minori da un capo all'altro d' Italia con ogni possa si adoperarono di sostituire i monti di pietà alle banche degli usurieri. In tale impresa specialmente si segnalarono (3) Marco da Bologna, Michele da Carcano, Cherubino da Spoleto, Antonio da Vercelli, Angelo da Clavasio, Giacomo dalla Marca, e Bernardino da Feltre, che alcuni errando tengono come il trovatore di questa instituzione. Quindi nel 1483 erigevasi un Monte di pietà in Genova e Milano; nel 1484 ad Assisi, Mantova, Ferrara, Savona; nel 1485 a Brescia; nel 1486 a Vicenza; nel 1488 a Parma, Cesena, Firenze; nel 1489 a Rieti, a Narni, a Lucca; nel 1490 a Verona, a Piacenza; nel 1491 a Padova, Piove di Sacco, Ravenna; nel 1493 a Crema, Pavia, Cremona, Camposampiero (4).

Da principio i monti di pietà prestavano senza guiderdone, mentre essi medesimi non avevano spendio veruno; le città largivano i fabbricati, la carità

(1) — *De l'Esprit des Lois*, lib. 21, cap. 20.

(2) Wadding (Luca), *Annales minorum*. Lugduni 1648, tom. VI, pag. 798.

(3) Wadding, ivi, pag. 799.

(4) Wadding, op. cit. a questi anni.

de' fedeli dava le sorti occorrenti, i cittadini più notabili ne facevano graziosamente le ragioni; ma coll'andare del tempo, raffreddato il primitivo fervore, queste liberalità vennero meno, e frate Bernardino da Feltre, onde non avesse a mancare ai disagiati tale beneficenza, prese argomento di togliere sui prestiti un piccolo avanzo per sostentare l'azienda ormai tutta prezzolata. Nel maggio del 1493 (1) la religione dei Minori chiamò capitolo a Firenze, ed in esso avvisando dell'ordinamento migliore da darsi a questa instituzione, dopo molte controversie e dibattimenti fu preso di attenersi nei monti di futura erezione allo spediente trovato da fra Bernardino. In una congregazione posteriore, tenuta nel 1498 (2) a Milano, fu riconosciuto come pressochè tutti i monti di pietà, i quali accomodavano gratuitamente, fossero già vòlti in basso e quasi mancati; e per non lasciarli affatto perire si fermò che ancor essi nell' avvenire domandassero sulle sovvenzioni l'interesse medesimo che i monti nuovi.

Una tale riforma suscitò contro i monti di pietà querele grandissime: i corrivi, i quali presumevano da questi luoghi pii sbandito per sempre il frutto del denaro, si dolevano che non avessero corrisposto alla loro espettazione; la tristizia degl' ingordi e disonesti, soliti a fare mercato degli altrui bisogni, soffiava in quel fuoco; e mentre i francescani molto zelantemente promovevano l'instituto di cui furono i compositori, i domenicani (3), fosse persuasione o rivalità d' ordine, nelle loro predicazioni acerbamente lo combattevano; contro le animatrici esortazioni della carità e dell' affetto disserrossi il dubbiare mortifero della scolastica con tutto l' inciampo delle sue cavillazioni e sottigliezze; i monti di pietà furono tassati di traffico illecito e condannevole; si accesero disputazioni vivissime: a determinare le quali papa Leone X richiese l'arbitrato del concilio lateranense quinto, e la bolla 4 maggio 1515 dichiarò leciti solennemente i monti di pietà (4).

Dopo questo suggello non fuvvi città o terra di qualche conto in Italia che non avesse il suo monte; e Giovanni Calvo (5), commissario della regola dei Minori presso la s. Sede, riuscì ad aprirne uno anche nella metropoli del mondo cristiano, avutane approvazione da papa Paolo III con bolla del 1539.

(1) Wadding, tom. VII, pag. 310.
(2) Wadding, tom. VII, pag. 390.
(3) Mastrofini, *Le usure*, lib. I, cap. VI.
(4) *Acta conciliorum*. Paris 1714, vol. 9.
(5) Morichini, *Degli istituti di pubblica carità in Roma*, lib. I, cap. XVI.

Fuori d'Italia la piccola città di Ipri nel 1534 fu, a merito del sacerdote Josse de Wulf (1), la prima in Europa che ordinasse una borsa di prestito (leenburse) all' uso italiano. Poscia nel gennaio del 1572 Gillis van de Weghe fondò in Bruges un monte di carità (*Mons perfectae charitatis*); e Bartolomeo Muzzarelli nel 1607 creò quello di Lilla. Scarini Silvestro e Gian-Giacomo Scaramucchio, italiani ambidue, si resero molto benemeriti di quest' opera pia in quei paesi. Però l' autore vero e principale dei monti di pietà nel Belgio deve dirsi Venceslao Cobergher, pittore ed architetto d' Anversa, il quale nominato soprantendente generale da lettere patenti 9 gennaio 1618 dell'arciduca Alberto, propagò, ad onta di contrasti e velenosità infinite, questa instituzione in tutto il regno con amore e perseveranza così infaticabili, che l' appellazione gli valsero di *Atlante dei monti di pietà* (2).

Le attinenze di Spagna co' Paesi-Bassi le porsero ben presto contezza dei monti di pietà. Sino dall' anno 1571 (3), Pietro d'Oudegherst da Lilla, storico e giurista di qualche nome, aveane tenuto proposito a Filippo II, ma fu poco udito, e nulla impetrò; e quando nell' anno 1590, per insinuazione del consigliere don Luigi Valle de la Cerda, fu fatto venire in corte per attendere a questa fondazione, era troppo tardi, avvegnachè Oudegherst nel 1591 mancò a' vivi mentre accingevasi all' impresa. Il quarto Filippo ebbe in animo d' instituire i monti nella Spagna: al qual uopo con lettere 3 dicembre 1626 (4) chiamò con larghe promesse Cobergher a Madrid; sennonchè Venceslao era allora troppo antico d' anni per esporsi a lungo viaggio, onde non tenne l'invito. Solamente nell' anno 1702 (5) venne fatto a don Francesco Piquier, cappellano del re, il dare cominciamento ad un luogo di prestito in Madrid: dicono (6) vi mettesse per corpo un solo reale d'argento; ma vi attirò in breve tante limosine che ne surse il monte di pietà, il quale poi nel 1713 ottenne la conferma di Filippo quinto.

In Germania Augsbourg nel 1590 (7) aperse un monte di pietà. Il primo Giuseppe nell' anno 1707 (8) pose l' ufficio dei pegni a Vienna, il

(1) Decker, *Études historiques et critiques sur les Monts-de-Pieté en Belgique*, lib. II, cap. I.

(2) Foppens, *Bibliotheca belgica usque ad ann.* 1680.

(3) Decker, op. cit., lib. II, cap. I.

(4) Decker, op. cit., lib. II, cap. V.

(5) Ramon de la Sagra, *Voyage en Hollande et en Belgique*, tom. II, pag. 219.

(6) Arnould, *Situation administrative et financière des monts de pieté en Belgique*, cap. VIII, § 1.

(7) Decker, op. cit., lib. I, cap. 3.

(8) Villeneuve-Bargemont, *Économie politique chrétienne*, lib. III, cap. XIX.

quale fu poscia riordinato da decreto 1.° febbraio 1785 (1) di Giuseppe secondo. E l'imperatrice Maria Teresa il 4 settembre 1747 (2) stabilì il monte di pietà di Praga.

La Francia tardò assai ad ammettere questa instituzione. Allorchè nel 1614 (3) si convocarono in Parigi gli Stati generali per provvedere ai disordini della reggenza di Maria de' Medici, fuvvi chi consigliò i monti di pietà; pure il terzo Stato rifiutò la proposizione, per tema di moltiplicare gli usurai, che già erano una delle più generali sciagure del regno. Luigi XIII, nel febbraio del 1626 (4), ripigliando quel disegno, volle si mettesse un monte in cadauna città di parlamento o di giustizia reale; ma poco stante nel giugno 1627 dovette rompere il suo editto. Luigi XIV (5), appena salito al trono, ordinò si aprissero monti di pietà in Parigi ed in altre cinquantotto città principali; tuttavolta il provvedimento non ebbe effetto. In quel mezzo il trattato d'Aix la Chapelle portando i confini del regno al di là dell'Hainaut, della Fiandra, del Cambrese, dell'Artois, introdusse nella Francia i luoghi di pegno delle provincie conquistate. Finalmente Luigi XVI con lettere patenti 9 dicembre 1777 (6) costituì il monte di Parigi, che cominciò le sue operazioni il 1.° gennaio 1778. Dopo il 1815 questa instituzione prese molto piede nella Francia, talchè nell'anno 1846 vi si contavano quarantasei monti di pietà (7).

L'Inghilterra, che tanto si ammira della filantropia dei suoi abitanti, manca tuttavia dei monti di pietà. Tale difetto forse (8) procede da quel livore insano con cui gli Anglicani guardano sempre il cattolicismo e le sue instituzioni, e pel quale anche dopo il gran Newton ricusarono la riforma del calendario, sebbene ricevuta da tutte le altre sette dei protestanti. Così il popolo minuto paga colà eziandio pecunialmente il fio dello scisma, che lo lascia preda di *Pawnbrokers* ingordissimi. Essi sostituiscono (9) l'usurajo del medio-evo, anzi lo avvantaggiano pel privilegio della impunità; possono rubare senza peri-

(1) *Appendice al codice di Giuseppe II.* Milano 1788, pag. 32.
(2) Arnould, op. cit., cap. IX, in nota.
(3) Blaize, *Des monts de pieté et des banques de Prêt sur nantissement.* Paris 1843, p. I, cap. 2.
(4) Blaize, op. cit., p. I, cap. II.
(5) Blaize, op. cit., p. I, cap. III.
(6) Blaize, op. cit., p. I, cap. IV.
(7) De Watteville, *Situation administrative et financière des monts de pieté en France.* Paris 1846.
(8) *Revue Britannique* Dicembre 1841.
(9) Blaize, op. cit., nell'appendice.

colo di saccheggiamenti o di proscrizione; la libertà del commercio loro è guarentita; e pagando la patente al fisco, ottengono l'autorità di far guadagni, crescere e traricchire sugli altri. L'interesse che la legge di Giorgio III permette a questi *Pawnbrokers* sarebbe il venti per cento (1); ma in fatto si pigliano usure che in poco volgere di stagioni divorano tutto il prestato. Non è gran tempo che un giornale di molta stima (2) portò un avvenimento, il quale dà una idea degli scrocchi e trabalzi loro. Una giovane, venuta al poco, avviavasi al banco d'un di costoro; per istrada è sorpresa da un furoncello che le chiede cosa volesse ingaggiare: era un oriuolo. Esaminatolo, esclama il traforello: Poveretta! cosa mai fate? Il vostro orologio è bellissimo; vale dieci ghinee almeno: ma questi furfanti non ve ne darebbero tre; io invece cinque. E senza dir altro intasca l'orologio, snocciola i contanti, e si dilegua. Il giornale è dell'avviso di costui, ed arbitra che la dirubata non facesse affare cattivo. All'invece in Irlanda questo benefizio del cattolicismo venne, sebben tardi, a ristorare alcun poco la miseria di quelle desolate contrade. Limerick fu la prima città che ponesse contro la rapace voracità delle usure questo rifugio: Matteo Barrington il cittadino egregio che lo promosse. Il monte di pietà di Limerick, aperto nel marzo 1837 (3), fu preludio ad altri molti in quell'isola infelice.

L'instituzione, di cui mi sono adoperato di abbozzare la storia, è stata poi veramente profittevole? Indagine ella è questa, nella quale i pareri degli economisti furono fra loro contrarj, nonchè diversi. Degli scritti, che più recentemente la controversia ex professo trattarono, io debbo ricordanza speciale alla Memoria del sig. Arturo Beugnot, *des banques publiques de pret sur gages et de leurs inconvenients (Paris* 1829); e al dettato del sig. D. Arnould, *avantages et inconvenients des banques de prêt sur gages* (Namur 1831); i quali nel 1829 ottennero premio dall'Accademia di Gand.

Gli economisti, i quali difendono l'utilità dei monti di pietà, osservano: che essi sono di beneficio grande ai penuriosi, i quali nelle distrette del bisogno sanno subito dove trovare a piccolo cambio, sovra suppellettili per avventura anche al momento inutili, con che darsi attorno, e scusare alla meglio la propria esistenza. Che ove queste benedette sovvenzioni mancassero, quelli che patiscono disagio di moneta dovrebbero recare in contanti le robe loro; forse

(1) Blaize, op. cit., nell' appendice.
(2) *Revue des deux mondes.* 15 Janvier 1839.
(3) Blaize, op. cit., nell' appendice.

privarsi degli arnesi più necessarj alla vita, e scapitare senza forse del valor loro gravemente. Che i poveri per essere al grado di spegnere nel termine posto le accese ragioni, e riavere i pegni, sono quasi per forza condotti alla masserizia, alla operosità, all' industria. Che cessano i danni dell' usura, e raffrenano colla concorrenza loro le case clandestine di prestanza, le quali mettono in ruina chiunque v' inciampi. Che per essi il giro del contante si fa più ampio e veloce, onde si moltiplica la somma delle fatiche o delle riproduzioni. Che tolgono agli uomini l'aver guadagno dalle sregolatezze e dalle sventure dei proprii fratelli. Che non pure alleniscono le sciagure de'miseri calamitosi, si disacerbano anco le angustie degli scialacquanti e guastatori medesimi. Che la morale li applaudisce, come porto a cui il traviato, che si riconosce, può in ogni istante riparare per isciogliersi da' suoi impigliatori, e sostenere il credito della propria famiglia.

In quella vece gli scrittori, i quali tengono opinione contraria ai monti di pietà, dicono : Che non è vero salvino i mendici dalle usure, anzi essi medesimi li affondano in molto gravissime; e a pruova allegano, oltre i monti dei Paesi-Bassi, i quali non vogliono meno che a ragione di dieci, dodici, quindici, sedici, e fino del trentaquattro per centinajo, quello di Potzdam, che prende il sedici e tre quarti ; di Lione, che esigeva il diciassette; dell' Havre, che pigliava il quarantadue; di Parigi, che prima del 1830 riscuoteva il dodici : onde Melchiorre Gioja (1) conchiudeva si cancellasse dal monte di Bologna l' epigrafe: *Mons pietatis olim adversus Judaeorum pravas usuras erectus.* Che, in onta de' più sottili interusuri, non distornarono per nulla il disagiato dai banchi degli usurieri, perchè questi più di leggieri si appagano delle sicurtà, prezzano le cose a vantaggio, prestano in ogni istante, permettono all'occorrenza lo scambio e la sostituzione dei pegni; non disagguagliano valute, prorogano l'esecuzione, ed offrono segretezza maggiore. Che nel fatto i monti suffragano gli usurieri, i quali approfittando delle stremità di chi prende a credito, lo obbligano a pannelli esorbitanti, poi recano al monte i pegni avuti come fossero proprj, e rimettono così la pecunia che hanno investito a mali guadagni. Che ben lungi dallo impedire la spropriazione dell' ultimo corredo dei mendici, ne sono anzi la causa : il povero, quando è stretto dal bisogno, non si perita di tor denari a costo; allora egli non vi vede dentro l' usura a cui si sottopone, e non guarda nè tanto

(1) *Nuovo prospetto delle scienze economiche*, lib. II, § 3, cap. 2, a. 5.

nè quanto se potrà solvere a tempo le responsioni; ma relegato dipoi a difendere a pelo la sua spesa, gli torna impossibile di porre in serbo i mezzi con che portare ad effetto la restituzione convenuta: onde quando viene il termine d'attendere il debito non è ricuperata neppure la metà dei pegni, ed anco questa per la maggior parte non dai debitori diretti, sì da chi ne colse a basso conto le cedole. Così i monti di pietà vanno a risolversi in luoghi di vendita forzata, e collo scapito del prezzo in due riprese, cioè una parte alla messa, dopo lo spaccio il resto, minorato dagli spendj e dalle collusioni solite degl' incanti; e questa circostanza dà origine all' incetta disonesta, di cui i bollettini sono l'oggetto, vittima i bisognosi. Che i monti di pietà, poco benefici pel rispetto economico, lo sono ancora meno pel riguardo morale; imperocchè quelli i quali pigliano le sovvenzioni non sono tanto gl' indigenti veri, come gli scioperoni e viziati che vivono al solo presente, all' avvenire non badano; onde spendono a rotta, ed il sussidio appena accattato gittano in dadi, in lussurie, in ghiottornie: quindi i giorni nei quali avviene il numero maggiore di pegni sono senza mezzo quelli che precedono le baldorie del carnesciale e la estrazione del lotto. Che il popolo minuto vedendo di poter facilmente avere a credito dal monte ciò che gli fa d' uopo, trascura il lavoro, poco o nulla si cura di vivere a riguardo per mettersi a misura di onesti civanzi, pronto in ogni evento a contrarre novelle e più grosse ed arrischiate obbligazioni. Che i monti cercando unicamente il valore, non il proprietario de' pegni, servono di ricettacolo a furti, e si dà loro voce e nota di tener mano ad imbolj, a ruberie, e di aiutare i ladri domestici.

Quantunque assai ragioni vengono prontissime contro taluno dei richiami sovraesposti; e di già il barone Degerando nell'opera insigne *De la Bienfaisance publique,* L. III, c. I, art. 6, e Carlo Illarione Petiti nel suo pregevole *Saggio sulla mendicità,* L. II, a. I, si argomentassero a mettere in chiaro il conto che se ne deve fare, tuttavolta io credo di non errare affermando:

1.° Che i monti di pietà non possono dirsi netti ora da pecche.

2.° Che tali mende, piuttosto che fallo della instituzione, sono guastamento che di lei fecero e fanno gli uomini.

3.° Che l'annullazione dei monti di pietà leverebbe alla poveraglia un soccorso a cui da lunga consuetudine è assuefatta; e d'altra parte il vedere che i monti si sono sparsi per ogni dove, e durano da secoli, anzichè per opera della violenza, per concorso spontaneo delle popolazioni, è chiaro argomento ch'essi

rispondono ad un bisogno non accidentale, ma essenziale della società. Una instituzione (bene osserva in questo proposito il gran Necker (1)), una instituzione biasimata da chi ne guarda gli effetti isolati merita encomio, qualora si considerino la natura e la estensione dei mali a cui rimedia.

4.° Che importa ricercare le riforme da farsi, i difetti da correggersi, onde questa instituzione venga saviamente ritratta a' suoi principj, i quali la stabilirono come un'opera di beneficenza a pro dei mendici.

Quest' ultima conclusione naturalmente mi conduce a tenere alcune parole intorno agli usi dei monti di pietà delle provincie venete.

Nel paese governato dalla Luogotenenza di Venezia stanno quarantatrè (2) monti di pietà. I monti delle comuni foresi arieggiano a quelli della città da cui dipendono; onde io limito il mio discorso a questi ultimi soltanto.

Sebbene pressochè tutti i monti di pietà degli otto capo-luoghi delle provincie venete sieno d'antica instituzione, pure furono di fresco riordinati. Nella tabella seguente io epilogo l'epoca della fondazione di cadauno d'essi, e la data dell'approvazione governativa ai *Piani economico-disciplinari*, che attualmente li dirigono.

Num. progressivo	Città in cui sta il monte	Anno della fondazione	Decreto governativo approvante il piano			
			anno	mese	giorno	numero
1	Belluno	1501	1843	dicembre	16	33144 — 1217
2	Padova	1491	1837	giugno	22	21585 — 745
3	Rovigo	1508	1836	luglio	22	24637 — 933
4	Treviso	1497	1844	agosto	8	24859 — 727
5	Udine	1496	1841	agosto	10	23192 — 743
6	Venezia	1807	1853	giugno	10	23208 — 750
7	Verona	1490	1840	dicembre	17	49065 — 1591
8	Vicenza	1486	1843	settembre	14	31159 — 1094

(1) *De l' administration des finances de la France.*

(2) *Manuale del regno lombardo-veneto per l' anno* 1855. Milano dall' i. r. stamperia, 1855.

Dei regolamenti sovraccennati io non prendo in esame che quella parte, la quale ha efficacia immediata sulla condizione dei mutuatarj, e che per conseguenza riguarda l'apprezzamento dei pegni; la proporzione tra il valsente del gaggio e l'imprestito; l'interesse da pagarsi; la risoluzione del debito.

È norma comune a tutti i regolamenti delle summominate otto città, che prima del mutuo le cose offerte per sicurtà devono essere prezzate da periti a questo ordinati. Essi hanno salario fisso dal monte; danno cauzione, perchè nel caso che il ritratto dei pegni venduti all'asta non giungesse il valore della prestanza, sono obbligati del proprio. Gli stimatori, per non istare a codesto rischio, sono naturalmente condotti a prezzare i gaggi al di sotto del loro valore reale: così questa regola restringe e difficulta vie più le ragioni del malagiato accattatore, il quale deve dar pegno che supera d'assai l'importare del prestito. Essa pregiudica eziandio l'azienda del monte, avvegnachè ne assottiglia le imprestanze, e accresce le spese di conservazione, aumentando la quantità degli oggetti da custodire. Questa pratica fa prosperità ai feneratori clandestini, poichè da essi col pegno medesimo trovasi copia maggiore di denaro; ed essa dà occasione al mercimonio truffativo delle polizze. Queste valutazioni inadeguate sono pertanto uno sconcio, cui fa mestieri qualche rimedio; e nel Belgio vi si riparò con tre provvedimenti (1). L'uno, assegnando ai periti una quota dei frutti, perchè essi crescono necessariamente nella ragione diretta del valore dei pegni; l'altro fu quello di accordare agli stimatori un cinque per cento dell'utile maggiore che si fosse conseguito dal monte, oltre l'importo medio del decennio antecedente; terzo, quello di esonerare fino ad una data somma la malleveria. A Gand, per esempio, il monte perdona lo sbaglio di fiorini novanta per anno agli stimatori; dopo questo estremo comincia la obbligazione loro.

Stimate le cose che fanno cauzione, si procede a determinare la somma da accomodare. I *Piani economico-disciplinari* dei monti di pietà di Belluno e di Rovigo non contengono prescrizione alcuna in questo proposito. Invece il monte di Treviso (§ 11) non può prestare che per due terzi della stima di alcuni effetti; di altri per la metà. Il monte di Udine (§ 21) deve limitare le sue sovvenzioni a tre quarti, due terzi, alla metà del valore dei pegni, secondo la qualità loro. Il monte di Venezia restringe le imprestanze a due terzi o alla metà del valsente della cauzione (§ 10). Il monte di Vicenza circoscrive i mu-

(1) Arnould, *situation administrative et financière des Monts-de-pieté en Belgique*, cap. III, § III.

tui a tre quarti o a due terzi del valore dei gaggi (§ 5). Questa restrizione dei prestamenti è pure misura gravosa pel bisognoso; produce le conseguenze medesime che le valutazioni inadeguate, e merita gli stessi biasimi. Il rimedio però si presenta da sè, ed i regolamenti dei monti di pietà di Padova (§ 10) e di Verona (§ 10) hanno già trovato sesto alla pratica in discorso, disponendo che le sovvenzioni vengano determinate dal valor reale del pegno, depurato dal degrado di cui può essere suscettibile per la giacenza, dall'interesse di un anno, e dalle spese per bollo di garanzia.

La misura degli interusuri diversifica secondo le città; la seguente tabella rappresenta sì fatte varietà.

Num. progr.	Citta' in cui sta il monte	Interesse per ogni cento lire	Articolo del regolamento relativo
1	Belluno.	6, oltre la tassa di cent. 6 per biglietto.	44
2	Padova	6, esclusa qualunque tassa (1).	5
3	Rovigo	6, oltre il taglio-bolletta dell'1 per cento.	82
4	Treviso	6, esclusa qualunque tassa.	7
5	Udine	5	15
6	Venezia.	6, oltre il 2 per $^0/_0$ per il biglietto che è semestrato	4
7	Verona	6, oltre il taglio-bolletta dell'1 per cento.	5
8	Vicenza.	5	3

È pertanto manifesto, che ove si eccettuino i monti di pietà di Padova, Udine e Vicenza, tutti gli altri trasgrediscono apertamente la legge civile, la quale (§ 994) non permette per interesse del mutuo con pegno che il cinque per cento all'anno, e commettono per conseguenza l'*usura* esplicitamente contemplata dal § 9, lett. *a* della Sovrana Patente 3 dicembre 1803. Come poi possa farsi tale trapassamento da stabilimenti pubblici è ciò che io propriamente non so spiegarmi. Nè meglio trovo giustificata l'altra usanza de' monti di

(1) Con Ordinanza delegatizia 6 dicembre 1852, N. 26595, l'interesse col 1.° di gennajo 1853 fu dal 6 ridotto al 5.

Belluno (§ 44), Padova (§ 5), Rovigo (§ 82), Treviso (§ 7, 70), Verona (§ 6), i quali nel mettere ragione dei frutti, che sono ricambio all'uso del capitale, computano intero il mese cominciato: regola ingiusta, poichè il monte tira guadagno da denari già tornati alle sue casse, l'accattatore rimunera l'uso di monete che ha restituito, e le gravezze del debito si protraggono anche dopo la sua estinzione; regola che accresce la obbligazione del merito, onde se alcuno quattro fiate nel corso di un anno prendesse a credito dal monte, tempo una settimana per volta, dovrebbe per queste quattro settimane pagare l'usura di quattro mesi: lo che tornerebbe al 24, anzichè al 6 per cento l'anno. La disorbitanza di questo conto riesce ancora più evidente osservando che chi riscatta il pegno nel giorno successivo al principiare del mese, deve sborsare per un giorno solo il pro di trenta; cosicchè ponendo che la prestazione di un'annata intera fosse centesimi 365, si fa ascendere a 30 quella d'un dì. Meritano pertanto lode per questo riguardo i regolamenti dei monti di pietà di Udine (§ 16), di Venezia (§ 4) e di Vicenza (§ 3), i quali statuirono il principio degli interessi in proporzione al tempo in cui gli effetti rimangono a pegno presso l'Instituto.

Il debito si risolve in due modi: o rendendo nel tempo imposto quanto è dovuto, o facendo pago il monte col ritratto del pegno.

Gli ordinamenti disciplinari dei monti di Belluno, Rovigo, Udine, Venezia, Verona, Vicenza, per esitare i pegni non ripresi, hanno un termine fisso (per lo più alcun mese dopo l'uscita del mutuo), nè il debitore può affrettarlo. Regola improvvida ella è questa, specialmente ove si tratti di oggetti che per loro natura ponno patire o scemare di prezzo. Il povero ne ha scapito doppio: parte per correre il rischio dei guasti o del calo che le robe andassero nel frattempo a sofferire; e parte perchè ottiene sempre sussidj incongrui dal monte, il quale computa la sicurtà non pel valsente che merita all'atto della stima, sì per quello che avrà allo spaccio. Se invece il debitore dal momento che si vede tolta via ogni speranza di redimere il pegno, fosse in diritto di accelerare l'incanto, non vedrebbe pregiudicarsi i suoi arredi senza alcun utile del prestatore, e con grave suo danno; si assolverebbe tosto degli interessi che l'avere gli stremano; ricaverebbe col soprapiù pronto servizio d'altro contante; e non sarebbe necessitato di alienare i viglietti del monte, ripiego che ora gli torna in accrescimento di perdite. Non ignoro l'obbiezione che si è fatta (1) al privilegio in

(1) Decker, *Études historiques et critiques sur les Monts-de-piété en Belgique*, lib. III, cap. XI.

discorso, cioè che i malvagi alle volte sollecitano la vendita per intenzioni criminose e dannabili; ma io non credo che la possibilità dell'abuso sia argomento sufficiente per ricusare una provvisione che per sè stessa è buona e profittevole: d'altronde le frodolenze potranno bensì avvenire ove si trascuri ogni cautela, ma non mai quando si usi la debita circospezione. E riparo bastevole parmi quello cui si appigliarono gli statuti dei monti di Padova (§ 69), Treviso (§ 94), Verona (§ 61), i quali fanno dipendere dalla prudenza della direzione il consentire o meno alla dimanda scritta dei pignoranti.

La durata dell' imprestito è nei nostri regolamenti fissata perentoriamente ad un anno: soltanto quello di Venezia (§ 3) la restringe a sei mesi; e lo statuto di Udine (§ 17) la proroga a venti; divarj però che non rilevano gran fatto, avvegnachè tutti i nostri monti di pietà acconsentono che ad ogni termine si possano i pegni rimettere. È poi principio universale agli statuti dei nostri monti, che per effettuare il pagamento deve il debitore numerare in un medesimo tratto l' importo intero delle sovvenzioni avute co' frutti relativi. Per poco che si abbia contezza delle condizioni e abitudini del mendicume, vedesi aperto come debba tornare svantaggiosa una prescrizione, la quale presume providenza e risparmio in gente per lo più spensierata, e a cui difettano i mezzi per sovvenire alle prime necessità di famiglia. Il tapino che ricorre al monte di pietà è pressato da urgenze; quando ha ad esse sopperito coll' imprestito, è ridotto da capo ai suoi proventi ordinarj, i quali bastano appena al nudo vivere giornaliero: sicchè assai difficile gli riesce il ragunare qualche somma di rilievo, e più ancora il difendere i sottili avanzi, che per avventura andasse facendo, dal morso continuo dei bisogni; onde alla scadenza del debito trovasi quasi sempre impreparato, e deve perdere il suo pegno. All' incontro, se il meschino avesse facoltà, di mano in mano che gli viene fatto qualche civanzo, ed ha alcun denajuolo in essere, di recarli subito al monte, in diffalco e pagamento parziale del suo credito, più di leggieri al compiersi dell' anno sarebbero i prestiti quitati, e le masserizie ricoverate dalle famiglie. Per sì fatta guisa i monti riavrebbero più presto le sorti da rivolgere in sovvenzioni novelle; i malestanti potrebbero meglio saldare le partite loro; ed il procaccio e la parsimonia avrebbero stimolo maggiore. Una cassa, per la quale le anticipazioni dei debitori andassero a conto dei mutui loro, produrrebbe senza fallo i beneficj medesimi che la *cassa-risparmio*: colla differenza però, che questa giova a crescere ed avanzare, al che quasi nessun povero pensa; quella per uscire di debito, in cui sono tutti

sprofondati. Quantunque sì fatto agevolamento sia ignoto ai nostri monti di pietà, non è però consiglio nuovo: già fino dall'anno 1585, Silvestro Scarini voleva che per la metà delle somme prestate si ammettessero pagamenti parziali (1); Venceslao Cobergher aveva stanziato l'uso degli sconti nei monti del Belgio (2). Il monte di pietà di Parigi nell'anno 1838 introdusse tal pratica, e n'ebbe il conforto di vedere scemate le spropriazioni, i saldamenti accresciuti (3): A Bruges è stato attuato un altro metodo (4), ed è, che se il pegno consta di più cose, il debitore può liberare queste cose ad una ad una: partito semplicissimo, e che offre il vantaggio di sollecitare alle famiglie il godimento d'una parte almeno degli utensili loro. Possa il bene che le accennate riforme mettono altrove, suscitarne fra noi l'imitazione!

Eccomi, dotti colleghi, al fine della mia lettura: con essa io logorai tempo che cadauno di voi avrebbe per fermo impiegato più utilmente di me; pure io nutro lusinga vorrete essermi cortesi d'indulgenza per ciò solo, che il mio discorso aggiravasi intorno ad una instituzione, la quale onora la nostra Italia, e prendesi cura de' poverelli.

(1) Scarini, *Discours sur l' erection des Monts-de-pieté.* Douay 1585, pag. 6.

(2) Mauden (David A.), *Antidotum adversus calumniosos et venenosos libellos Joannis Lillers, practici, a Belgio proscripti.* Lovanii 1627, pag. 107.

(3) Blaize, op. cit. P. II, cap. 3.

(4) Decker, op. cit., lib. V, cap. III.

(*Letta il* 25 *novembre* 1855).

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NELLA PARTE I DI QUESTO VI VOLUME

VENEZIA

NEL PRIV. STABIL. DI G. ANTONELLI

1856.

INTORNO ALLE LEGGI

DEL

MOTO DELL'ACQUA NEI CANALI E NEI FIUMI

CON APPLICAZIONI AI VARII CASI DELLA PRATICA

MEMORIA

DEL M. EFF. PROF. DOMENICO TURAZZA

INTRODUZIONE

La teoria delle leggi del moto dell' acqua nei canali e nei fiumi è forse la prima fra le questioni d' idraulica pratica, che sia stata seriamente discussa dagli idraulici italiani e stranieri fino dai primi momenti che le scienze progredite permisero di potere affrontare una tanta ricerca. Non appena il Castelli pose il primo solido fondamento alla misura delle acque correnti, ed introdusse nella pratica idrometria quella legge famosa che tuttora porta il suo nome, e già si volle tentare la ricerca della funzione che lega le varie velocità in una sezione, e si gettò nel campo della scienza la famosa legge parabolica che doveva suscitare in seguito tante questioni, specialmente fra gl' idraulici nostrali, soli forse a quell' epoca che meritassero veramente un tal nome. Si disputava ancora quando il Pitot misurando, a mezzo del suo tubo, l'andamento della velocità dell'acqua nei varii punti d'una sezione produsse un total cangiamento nella scienza; si trovò che l'acqua cresceva di velocità dal fondo alla superficie in diretta opposizione a quanto accennava la teoria in allora accettata. Si cominciò, è vero, dal negare il fatto, ma infine si dovette pensare invece a rinnovar la teoria. Datano forse da quest' epoca le prime ricerche intorno all' influenza che le resistenze

che oppongono il fondo e le sponde degli alvei al moto dell' acqua scorrente per essi esercitano nell' attenuare la velocità dell' acqua stessa, nonchè intorno alla legge alla quale si accomodano le varie velocità in ogni singola sezione. Nell' impossibilità di dare a questa ricerca una base matematica, si ebbe invece ricorso all' osservazione e si tentò di costruire una formula, la quale rappresentasse le varie osservazioni con quel grado di approssimazione che fosse sufficiente ai differenti casi delle pratiche applicazioni. Proposta prima una tal formola in Francia, venne in seguito discussa dall' Eytelwein, il quale ne determinò i coefficenti numerici col concorso di tutte le osservazioni che si erano istituite principalmente in Francia dal Dubuat, e nella Germania dal Brünnings e dal Funk. Ne fu tentata la prova in Italia dagl' ingegneri pontifici e dal Pianigiani, e in quei primi momenti di favore si trovò corrispondere al fatto di tal forma da far sorgere in qualche caso il dubbio, come nell' esperienze del Bertelli sulla fossa Cerettola, che l' esperienze siensi forzate a dar ragione alla teoria. In altro luogo ho mostrato come quella formola avesse bisogno di correzione mutandone i coefficienti al variare della velocità; ma già assai prima il Tadini aveva accennato come al fatto rispondesse assai meglio una sua formula da lui denominata canone dei canali e dei fiumi, asserendo di averla trovata vicinissima al vero in più di quaranta prove da lui istituite nel caso pratico di canali e di fiumi naturali sui quali l' avea cimentata.

La maggiore semplicità della formola m' indusse a tentare la sua applicabilità anche alle esperienze già note e che servirono a determinare i coefficienti di quella dell' Eytelwein. Ho creduto di molta importanza per la pratica il riprendere quindi, in base a ciò, la teoria del moto dell' acqua nei canali e nei fiumi conducendola fino alle formule finali che occorrono nella soluzione dei differenti problemi che si presentano, specialmente nel caso dei canali di scolo. Non volli dare la loro applicazione alla teoria dei rigurgiti, perchè altrove ho già mostrato che allora dividendosi il liquido in parti indipendentemente moventisi, le formule stesse non possono adattarsi a questo caso particolare; e l' esperienza infatti continuamente ci mostra quanto fallace in tal caso riesca una simile applicazione. Tale è lo scopo della Memoria che presento oggi a questo i. r. Istituto, pregandolo a volermi continuare quella favorevole attenzione della quale già altre volte mi fu così benignamente cortese.

I.

Discussione intorno alla natura delle forze dalle quali dipende il movimento dell' acqua nei canali e nei fiumi, nonchè al modo con cui misurarne l' intensità.

A due propriamente si possono ricondurre le forze, le quali entrano in gioco nello stabilire il movimento dell' acqua lungo gli alvei o naturali o artefatti. La prima trae origine dalla gravità e si misura dalla pendenza in superficie; e questa è la forza acceleratrice: l' altra, che è invece forza ritardatrice, è dovuta agli ostacoli che l' acqua incontra tra via, ed ai movimenti che questi ostacoli producono; e questa dipende dalla sezione e dal perimetro del canale, nonchè dalla velocità di cui è dotata l' acqua scorrente per esso. Molto e da molti si è discorso intorno a queste forze, nè accaderebbe a noi d' entrare in una lunga disputa se non importasse sommamente di mettere in chiaro le ragioni per le quali si misura la prima per la pendenza in superficie, e quelle che c' inducono a sostituire alla formola usuale con cui si accostuma rappresentar la seconda, altra formola più semplice, che venne suggerita pel primo dal chiarissimo Tadini, e che noi vogliamo adottare, solo con alcune variazioni, nel coefficiente numerico.

E facendomi alla prima, non riescirà, credo, discaro il sapere che il primo ad annunciare nettamente questa fondamentale verità idraulica si fu il Toricelli nelle sue scritture sopra la bonificazione della Chiana, in cui avversando un progetto, il quale coll' abbassamento della così detta chiusa dei Monaci, tendeva ad aumentare la pendenza del fondo del canale, così si esprime: « La » velocità delle acque non si accresce nè si diminuisce conforme alla pendenza » del fondo, ma sibbene conforme alla pendenza accresciuta o diminuita della » superior superficie loro. Non sarà sempre vero che dalle pendenze del fondo si » regoli il corso dell' acqua, ma dalla declività della superficie sì: » e più sotto: » Non basta che il fondo del fosso abbia acquistato qualche maggiore pendenza, » mentre la superficie suprema dell' acque, la quale deve dar regola alla velo- » cità del corso, resterà quasi coll' istesso declive che aveva prima, e non accre- » scendosi questo non dovrà neanco accelerarsi la velocità; il fatto riescirà con- » tro la credenza di molti. »

Ora una tale opinione è generalmente ricevuta nella idrometria, la quale se in molti casi assegna al fondo dei canali quella pendenza che reputa necessaria alla superficie libera perchè l' acqua abbia in essi il debito corso, lo fa unicamente perchè, a moto permanente, per poco che siavi di pendenza nel fondo, la superficie libera si va, generalmente, mettendo parallela al fondo stesso.

Per l' infinita varietà dei movimenti, di cui sono dotate le fluide stille che attraversano in un tempo qualunque una determinata sezione del canale, riescirebbe assai malagevole, per non dire impossibile, il dare di questa verità una dimostrazione matematica scevra da qualunque obbiezione: nè io reputo tale quella data dal Coriolis, il quale, appoggiandosi alle sòlite supposizioni del moto lineare, ed al principio delle forze vive, giunge facilmente all' accennata conseguenza: non sarebbe infatti guari più difficile il dimostrare nella stessa maniera che la detta velocità sia invece dovuta ad una pendenza media fra quella del fondo e quella della superficie, e la dimostrazione camminerebbe forse più regolarmente. E tanto più io tengo questa opinione, in quantochè io credo che il teorema sia vero soltanto, come diciamo, al digrosso, e prendendo l' insieme di tutti i movimenti, ai quali per tal forma veniamo come ad accomodare una forza media, da cui si fanno essi dipendere. L' acqua per entro agli alvei movendosi per ciò che discende, e la sua vera discesa essendo infine la caduta della quale è dottata la sua suprema superficie, egli è nella pendenza di questa che essa trova la cagione del suo movimento, il quale sarà tanto più veloce quanto più grande sarà la caduta e quindi la pendenza in superficie. Per ciò poi che s' attiene al giustificare l' assumere che si fa la forza acceleratrice eguale alla componente della gravità parallela alla superficie libera, credo potersi ciò fare in base delle ragioni seguenti.

La massima velocità dell' acqua in un alveo qualunque ha luogo assai presso alla superficie, e secondo quella linea che si dice il filone del fiume, la cui pendenza segna veramente la pendenza della superficie libera. Ella è questa una conseguenza delle resistenze al moto che prova l' acqua lungo le sponde ed il fondo, ed è verità comprovata da tutte l' esperienze. Questa linea è dunque quella la quale segna la direttrice del moto dell' acqua, che si può, o si vuole avere in conto di moto lineare. Le componenti delle singole velocità delle molecole liquide parallele alla detta linea sono quelle che entrano propriamente in gioco nel comporre la velocità dell' acqua, quella velocità media che moltiplicata per la sezione somministra la portata del fiume. Le altre componenti che

non sono parallele al filone non fanno altro che dar origine a quelle perdite di moto di cui ragioneremo più sotto. Egli mi pare che da ciò veramente discenda la ragione del principio idraulico che la velocità media dipende unicamente dalla pendenza in superficie, e che in nulla v' influisce quella del fondo, se non in quanto la prima è in qualche modo influenzata dalla seconda. Egli è infine che non si può nè si deve considerare tutta la massa liquida dotata di un sol movimento, come lo vorrebbero le dimostrazioni matematiche: il moto che si considera è soltanto quello che avviene lungo l' alveo parallelamente al filone, gli altri movimenti non si calcolano se non in quanto possono influire sulle resistenze; o meglio l'influenza degli altri è calcolata unitamente a quella causa di ritardo che si dice resistenza del fondo e delle sponde.

Ora questa resistenza del fondo e delle sponde, quanto è facile ad essere avvertita vedendo che l'acqua non ha movimento accelerato come pur vorrebbe la natura della forza sollecitante, altrettanto non è facile ad essere spiegata e valutata in numeri.

Due spiegazioni di una tal resistenza dividono ancora le scuole d' idrometria. Gli uni riferiscono la detta forza ad una specie d' attrito che prova l' acqua lungo le sponde ed il fondo, ricorrendo all' aderenza che lega fra loro le molecole dell' acqua per rendersi ragione del propagarsi ch' essa fa a tutta la massa del liquido. Gli altri vogliono ch' essa dipenda dalle onde intestine che i varii ostacoli che l' acqua incontra fra via inducono nella massa liquida scorrente e dagli urti reciprochi dell' onde medesime. Questa seconda opinione trovasi nel Lionardo da Vinci, e venne ultimamente riprodotta dal ch. Tadini.

Che la prima ipotesi non sia vera, o almeno che nulla spieghi, e non faccia altro che annunciare il fenomeno con altre parole, è facile convincersi per poco che si rifletta che l' attrito recato qui in campo non è poi l' attrito usuale, perchè questo è indipendente dalla superficie e proporzionale alla pressione, quello si assume invece indipendente dalla pressione e proporzionale alla superficie. Dal momento che non è più l' attrito noto, quell' attrito del quale si ha una chiara e precisa idea, ma una nuova forza ignota, tanto fa il dire che la corrente si ritarda per cagione d' una forza ignota che la fa ritardare. Ecco precisamente a che si riduce quella pretesa spiegazione.

Ma vi ha di più; quell' idea dell' aderenza, messa in campo pel primo dal Coulomb, ha fatto sì che nella formola pel calcolo numerico delle resistenze venisse introdotto un secondo termine proporzionale alla velocità semplice,

lo che ha resa la formola più complicata, ne fece più laboriose e difficili le applicazioni, senza che perciò si vantaggiasse nell' esattezza la formola stessa, come in seguito mostreremo, e come è facile convincersi del fatto che nessuno dei pratici usa di quel secondo termine nelle applicazioni. E qui un ultimo inconveniente. Accomodata la formola a contenere quei due termini, i relativi coefficienti vengono determinati per mezzo dell' esperienza dipendentemente alla natura e forma della formola stessa. Ora trascurando, come spessissimo fa la pratica, il secondo termine, non è poi giusto di assumere il coefficiente del primo, come è determinato nella formola, in quanto ch' egli è così determinato nell' ipotesi che si tenga conto pure di quel secondo termine, lo che quando non si faccia anche il coefficiente del primo dev' essere modificato.

E per entrare a questo proposito in maggiore dettaglio, nell' esposizione che si fa ordinariamente in tutti i libri d' idraulica pratica delle note formole del moto uniforme, suolsi dire che quando la velocità è molto piccola, allora si può trascurare il termine corrispondente al quadrato della velocità in confronto di quello contenente la velocità semplice; con che si viene implicitamente ad ammettere che nel caso di piccole velocità la resistenza è semplicemente proporzionale alla velocità. Ora questa è appunto una di quelle proposizioni gettate là la prima volta senza esame, ed abbracciate poi generalmente senza troppo pensarvi sopra, illusi da una certa apparenza di vero, ch' essa presenta. Infatti, in altro luogo per velocità piccole inferiori ad un metro, io ho mostrato che la formula che, sotto la forma ordinaria, si adatta meglio alle varie osservazioni è la

$$p = \frac{c}{s} \left\{ 0,0003443 \, . \, v^2 + 0,00006237 \, . \, v \right\},$$

ora se supponiamo la velocità

$$v = 0,10 \, ,$$

che è delle miniere, si troverà che il rapporto fra il secondo e il primo termine è 1,81, cioè il secondo non è nemmeno doppio del primo. Ora chi sottoscriverebbe la sentenza che un termine va trascurato in confronto di un altro perchè il primo è metà del secondo? Eppure quella massima così comunemente abbracciata ci condurrebbe proprio a questa conseguenza.

E rimettendomi in via, prima di procedere avanti mi sia concesso di esa-

minare più minutamente quella forza di aderenza che vuolsi impedire lo scorrere delle molecole dell' acqua le une sopra le altre. Io veramente devo confessare di credere che una tal forza se non è assolutamente nulla, certo è assai piccola; ed in ogni caso ritardare le molecole per una cagione del tutto differente da quella fin' ora supposta. Egli è mestieri distinguere la forza che oppongono le molecole dell' acqua all' essere staccate le une dalle altre da quella ch' esse presentano quando invece non si faccia che farle scorrere le une sopra le altre: la prima è grandissima, come ci mostra l' esperienza volendo staccare una lamina sovrapposta all' acqua e bagnata dall'acqua stessa tirandola in senso perpendicolare alla lamina; l' altra è invece tenuissima, mostrandoci l'esperienza essere pressochè nullo lo sforzo necessario, dirò così, a far scivolare un corpo qualunque sull' acqua stessa, perchè allora le molecole aderenti alla superficie strisciante non si staccano ma si fanno unicamente scorrere sopra altre molecole acquee. Il Galileo nel suo discorso intorno alle cose che stanno in sull' acqua, e che in quella si muovono, diceva appunto a questo proposito, « se nell' acqua » ferma e stagnante locheremo qualunque grandissima mole, la quale non vada » al fondo, tirandola con un solo capello di donna, la condurremo di luogo in » luogo senza contrasto alcuno; » e più sotto, per togliere l'obbietto che potrebbe scorgere dall'osservare che occorre una forza considerevole per muovere i navigli con una certa velocità: « La cagione di tal resistenza non dipende da crascì» zie o altro, che assolutamente contrasti alla divisione, ma ec. » e qui espone la nota teoria della resistenza dei mezzi. Io credo che a più d' uno sia avvenuto di vedere delle barche, anche grandissime, tirate in acqua stagnante da solo uno o due uomini, ed avrà potuto facilmente convincersi che la forza dai medesimi impiegata era forse appena sufficiente a vincere la resistenza del mezzo, e che quindi o nessuno o ben piccolo ostacolo poteva opporre l'aderenza delle molecole acquee, sebbene estesa a tanta superficie quanta era quella della parte immersa. E questo io ho detto non già per voler negare del tutto questa aderenza che sussiste fra le molecole dell' acqua anche allora che si tratta di farle scorrere le une sopra le altre; ma bensì per mostrare a quanto piccola cosa essa si riduca, e come quindi non possa essere sufficiente a spiegare nell' usata maniera, il propagarsi delle resistenze dal fondo e dalle sponde a tutta la massa del liquido.

La seconda ipotesi fu detta dal Tadini delle onde intestine, e venne dal medesimo prodotta innanzi allo scopo di render ragione del fenomeno del ritar-

darsi che fa l' acqua scorrente per gli alvei e di misurarne l' intensità. Io credo opportuno di dover rimettere in campo una tal ipotesi allargandola convenientemente per abbracciare in una tutte le varie cause che insieme concorrono a render ragione del fatto, e per ciò appunto io la dirò invece dei *movimenti ritardatori,* fra i quali principale, ma certo non solo, è appunto quello da cui si originano quelle onde, alle quali piacque al Tadini di dare il nome, forse non interamente proprio, di *onde intestine.*

Queste cause io credo potersi condurre alle seguenti:

a) Direzioni discordanti delle velocità di cui sono dottati i varii filetti liquidi, e per le quali principalmente s' ingenerano nella corrente i così detti vortici;

b) Formazione di onde discordanti, e cozzo reciproco delle stesse;

c) Movimenti vibratorii delle singole molecole liquide scorrenti.

Prima di entrare a considerar queste cause in dettaglio è d' uopo premettere un' importantissima osservazione; cioè che devesi stimare non già la resistenza sopra ogni singola particella, ma sì bene la somma di tutte le resistenze in ogni sezione, la qual somma potrebbe essere una funzione ben differente da quella che rappresenta ogni singola resistenza in particolare; ed è appunto della resistenza totale che si è sempre parlato in queste ricerche.

Per poco che siasi gettato l' occhio sulla superficie di una corrente qualunque, non può essere che non siasi rimarcato quell'avvicendarsi di moti variabilissimi che presenta l' acqua alla superficie medesima, e per cui la veggiamo ora correre in direzioni variamente inclinate fra loro, e per fino opposte, ora aggirarsi in vortici che vengono portati oltre dalla corrente per dileguarsi e ricomparire in altri punti; fenomeni tutti i quali chiaramente ci mostrano esistere nella massa dell' acqua scorrente movimenti spessissimo discordanti fra loro e dei quali gli uni disturbano gli altri e reciprocamente. Quanto questi movimenti valgono ad attenuare la velocità, credo non potersi meglio mostrare che richiamando qui un' osservazione del Guglielmini, che trovasi nello scoglio della proposizione seconda del libro quarto della misura delle acque correnti, osservazione riportata pure dal Lecchi nella sua *Idrostatica,* e della quale mi accontenterò accennare qui la conseguenza colle stesse parole di quest' ultimo celebre idraulico: « Da questo fenomeno fu facil cosa il dedurre che la velocità acquistata dall'acqua nel discendere patisce alterazione e diminuzione considerevole, non solamente dalla resistenza delle pareti, ma ancora da altri moti irregolari derivati da impedimenti, riflessioni, vortici, percosse, ec. . . . tanto è

vero che delicatissimo è il fluido per risentire qualsiasi azione di contrario movimento. » E siccome i detti movimenti s' incontrano in tutta la massa, così ciascuna sua parte dev' essere più o meno ritardata; e perchè le cause di questi movimenti sono maggiori al fondo e alle sponde, così in vicinanza del fondo e delle sponde saranno essi maggiori, e più grande quivi il ritardo.

Fra questi movimenti molti danno origine a quelle onde, che sono più particolarmente accennate dal Tadini, e che si possono vedere anche alla superficie libera della corrente, alcune volte, quando l' acqua non sia molto alta e sia scabroso il fondo, marcatissime, altre volte più minute, ma la cui esistenza è anche allora evidentemente comprovata dall' ineguale riflettersi della luce alla superficie medesima. Il Tadini ricordò di averle trovate perfino in un rivo che, nelle giogaje delle Alpi, era riescito ad aprirsi un letto nel ghiaccio, e che quindi si trovava scorrere in un alveo di tersissimo cristallo. Queste onde così varie di direzione vengono ad urtarsi fra loro, a sturbarsi reciprocamente, e quindi ad ingenerare una corrispondente perdita di moto nella massa scorrente. Quel rumore che si fa sentire lungo un torrente in piena, e che sembra dovuto ad un rivoltarsi di ghiaje e sassi gli uni sopra gli altri, non è generalmente dovuto che al reciproco urto delle onde di cui ora è parola; nè quel notabilissimo attenuarsi della velocità dell' acqua al termine di una caduta da altro trae l' origine che dagli urti delle onde che marcatissime allora si scorgono al piede della discesa medesima, e da quei movimenti irregolari, che in tal caso riescono sensibilissimi.

Nè queste onde, per cui la massa totale si suddivide in parti i cui discordanti movimenti ingenerano i cozzi reciproci ora accennati, credo esser le sole; altre minime onde sononvi pure per entro a tutta la massa fluida, costituenti quasi un tremolìo di ciascuna molecola, e la cui influenza pure non è trascurabile. Il fenomeno rimarcato dal Chladni che, ingenerando mediante un suono qualunque delle vibrazioni nella massa d'aria racchiusa nella stanza in cui siavi un vaso ripieno di liquido e dal quale si faccia fluire per un foro una vena liquida, i ventri ed i nodi che presenta la lamina fluente mostrano col loro gonfiarsi e accorciarsi, o inversamente coll' attenuarsi ed allungarsi a norma della nota, di sentire marcatamente l' influenza di quel primo movimento vibratorio, credo metta fuor d' ogni dubbio l'esistenza dei movimenti vibratorj di queste onde, alle quali soltanto io riserverei il nome di onde intestine. Ora queste onde nel loro reciproco urtarsi non possono, è vero, far perdere forza viva, perchè il liqui-

do si ritiene perfettamente elastico, ma vi sarà certo perdita di forza viva nel comunicarsi di queste vibrazioni al fondo e alle sponde, nonchè all' aria sovrastante ed anche ai corpi nuotanti nel liquido, e che costituiscono la così detta torbida dei fiumi, perchè allora essi si comunicano a mezzi di densità differente. Di più quel poco di aderenza, o viscosità che vogliam dire, che ancora conserva il liquido, rende il fluido men perfettamente elastico, e quindi serve a far perdere una parte di forza viva anche nell'urtarsi reciproco delle dette onde nell' interno della massa; ella è forse questa la maniera con cui l'aderenza opera per propagare questa resistenza a tutta la massa fluente.

Io sono il primo a confessare che la spiegazione che ho cercato ora di sostituire alla solita dell' attrito per rendersi ragione della notabile perdita di forza che si riscontra costantemente nelle acque scorrenti per gli alvei, è piuttosto grossolana, e che non credo certo poter meritare il nome di una teoria del fenomeno; ma per altro mi sembra avere sull' altra il notabile vantaggio di sostituire cause vere, reali, che ciascuno può verificare, e andar convinto di loro esistenza, a cause ignote che inorpellarono con nomi chiari e di senso preciso adoperati ad indicare cause del tutto differenti, e di leggi così opposte; in una parola, credo poter dire che una tale spiegazione sostituisce fatti a parole.

Ma appunto la complicazione presentata dal fenomeno ci deve ben facilmente persuadere essere assai difficile di racchiudere in una formola la varia influenza di tutte quelle cause che abbiamo or ora accennato. Se quindi l' esposta teoria ci mette in caso di renderci ragione del fatto, non può d' altra parte porgerci alcun filo direttore, il quale ci conduca a valutare in numeri la resistenza totale sofferta dall' acqua, se non forse quel solo, che la perdita riducendosi in ultima analisi ad una perdita di lavoro dinamico, di forza viva, dovrebbe assai ragionevolmente essere proporzionale al quadrato della velocità media dell' acqua nella sezione ove si considera aver luogo la perdita stessa.

In altro mio lavoro presentato a questo i. r. Istituto e inserito nel volume terzo delle sue Memorie, io credo già aver mostrato che nemmeno la vecchia formola adottata a rappresentare queste resistenze, potevasi convenientemente adattare ai varii casi della pratica; e che allo scopo che la formola stessa rispondesse abbastanza al fatto, era mestieri mutare i suoi coefficienti a seconda che mutava la velocità della corrente; per ciò ho allora determinato i coefficienti i più proprii da usare per velocità inferiori ad un metro, comprese fra uno e due metri, e maggiori di due metri. Dal momento che una sola formola

non era applicabile a tutti i casi, ho cercato di vedere se era possibile di sostituire alla stessa una formola molto più semplice e di cui il grado di approssimazione fosse almeno fra i limiti presentati dalla prima, se non forse anche maggiore.

Naturalmente avendo il Tadini proposta a ciò una formola, e detto di averla trovata rispondere al fatto in quaranta e più corsi d'acqua a cui asseriva di averla applicata, ragion voleva che questa formola dovesse essere cimentata prima di ogni altra, e così appunto ho fatto, sostituendo soltanto il rapporto fra il perimetro bagnato e la sezione alla media altezza dell' acqua usata dal Tadini, e ciò perchè nelle varie esperienze cimentate era dato dagli esperimentatori il primo rapporto, ma non già la seconda.

Una tal formola in ultima analisi assume la resistenza proporzionale al perimetro bagnato, al quadrato della velocità, e in ragione inversa della sezione; per cui detta R la resistenza, b un coefficiente numerico, c il perimetro bagnato, s la sezione, v la velocità, si assume

$$R = gb \, . \frac{c \, . \, v^2}{s} \, .$$

Questa formola però, convien confessarlo, non risponde bene a tutte l'esperienze, e principalmente si scosta molto dal fatto nelle piccole velocità, dove i bisogni della pratica domanderebbero invece d' avere una forte approssimazione. Pensai allora di applicare anche in tal caso il principio altra volta adottato, e di vedere se si potesse avere la cercata approssimazione mutando il coefficiente numerico b a norma delle varie velocità, dividendo le stesse fra' certi limiti, dentro dei quali la formola rendesse il fatto con tutta quella ragionevole approssimazione a cui si può aspirare in queste ricerche. Le tavole seguenti mostreranno chiaramente che questo appunto avviene, e che la formola proposta si tiene vicina all' osservazione più di quello che il faccia la formola più complicata che è generalmente in uso, e anche più di quello che il faccia la stessa formola corretta che io aveva già proposta altra volta. Le tavole stesse mostrano che il coefficiente b va crescendo al diminuire della velocità, e specialmente nelle velocità assai tenui, ma quando la velocità supera i cinquanta centimetri, allora varia assai poco, e di poco differisce dal coefficiente proposto in numeri rotondi dal Tadini, locchè mi sembra essere una luminosa conferma di quanto aveva asserito questo distintissimo idraulico; e d'altra parte que-

sta sua asserzione ci deve rendere ancor più tranquilli nell' uso della formola stessa.

Riporto qui le accennate tabelle coi relativi confronti.

v velocità osservata, (v) velocità calcolata

p pendenza osservata della superficie libera,

c perimetro bagnato,

s sezione,

a e b coefficienti delle due formule

$$v = a . \sqrt{\frac{p . s}{c}} ; \qquad p = b . \frac{c . v^2}{s} ,$$

le misure si suppongono prese in metri.

(A) Velocità intorno a $0^m,15$

$a = 35,57$; $b = 0,00079$; $\log . a = 1,55118$; $\log . b = 6,89764$.

Osservatore	$\frac{1}{p}$	$\frac{s}{c}$	Velocita' osservata v	Velocita' calcolata (v)	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo la formola	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Turazza
Dubuat. . . .	27648	0,5115	0,151	0,153	— 0,013	— 0,287	— 6,049
	27648	0,5925	0,162	0,164	— 0,037	— 0,304	+ 0,044
	21827	0,6255	0,201	0,191	+ 0,050	— 0,240	+ 0,057

(B) Velocità comprese fra $0^m,25$ e $0^m,50$ circa

$a = 47,07$; $b = 0,000451$; $\log. a = 1,67278$; $\log. b = 6,65444$.

Osservatore	$\frac{1}{p}$	$\frac{s}{c}$	Velocita' osservata v	Velocita' calcolata (v)	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo la formola	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Turazza
Watman	11650	0,456	0,281	0,294	— 0,045	— 0,060	+ 0,057
Dubuat.	32951	1,472	0,287	0,315	— 0,095	— 0,109	+ 0,020
Watman	4571	0,202	0,315	0,313	+ 0,006	+ 0,060	+ 0,105
Dubuat.	15360	0,786	0,333	0,337	— 0,012	— 0,026	+ 0,084
idem	35725	1,776	0,338	0,332	+ 0,018	+ 0,002	+ 0,112
Watman	4800	0,312	0,430	0,380	+ 0,118	+ 0,092	+ 0,178

(C) Velocità comprese fra $0^m,50$ ed $1^m,00$ circa

$a = 47,9$; $b = 0,0004356$; $\log. a = 1,68045$; $\log. b = 6,63910$.

Osservatore	$\frac{1}{p}$	$\frac{s}{c}$	Velocita' osservata v	Velocita' calcolata (v)	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo la formola	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Turazza
Pianigiani . . .	2825	0,516	0,696	0,648	+ 0,068	— 0 064	— 0,020
Bonati	16366	3,736	0,736	0,724	+ 0,016	— 0,030	+ 0,009
Dubuat	6048	1,498	0,746	0,754	— 0,011	— 0,060	— 0,021
Brünnings . . .	4931	1,257	0,771	0,765	+ 0,008	— 0,047	— 0,005
Funk.	92,3	0,028	0,772	0,841	— 0,089	— 0,147	— 0,114
Brünnings . . .	6701	2,215	0,917	0,871	+ 0,050	— 0,007	+ 0,026
id.	9045	3,794	0,918	0,981	— 0,068	— 0,136	— 0,107
id.	7957	3,129	0,938	0,951	— 0,014	— 0,071	— 0,046
id.	5825	2,351	0,975	0,963	+ 0,012	— 0,044	— 0,022

(D) Velocità comprese fra 1^m,00 ed 1^m,50 circa

$a = 50,88$; $b = 0,000386$; $\log. a = 1,70651$; $\log. b = 6,58698$

Osservatore	$\frac{1}{p}$	$\frac{s}{c}$	Velocita'		$\frac{v-(v)}{v}$ secondo la formola	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Turazza
			osservata v	calcolata (v)			
Brünnings . . .	4542	2,640	1,122	1,226	— 0,092	— 0,068	— 0,083
Ing. Pontifici .	10040	4,666	1,146	1,097	+ 0,043	+ 0,045	+ 0,053
Brünnings . . .	9045	5,107	1,210	1,209	+ 0,001	0	+ 0,010
id.	7957	3,701	1,218	1,098	+ 0,098	+ 0,010	+ 0,100
id.	4931	2,855	1,225	1,224	+ 0,001	— 0,001	+ 0,010
Funk	4009	2,877	1,239	1,363	— 0,100	— 0,104	— 0,091
Bonati	10040	7,080	1,269	1,351	— 0,065	— 0,068	— 0,054
Brünnings . . .	5825	3,646	1,274	1,273	+ 0,001	— 0,001	+ 0,009
id.	7957	5,181	1,300	1,298	+ 0,002	— 0,002	+ 0,008
id.	7571	4,965	1,304	1,303	+ 0,001	— 0,002	+ 0,008
Funk	4009	3,044	1,338	1,401	— 0,047	— 0,052	— 0,032
Pianigiani . . .	1863	1,136	1,349	1,257	+ 0,067	+ 0,078	+ 0,076
Funk	5223	4,047	1,417	1,416	+ 0,001	— 0,004	+ 0,008
id.	4009	3,208	1,451	1,439	+ 0,008	+ 0,003	+ 0,015
id.	3251	2,463	1,468	1,401	+ 0,045	+ 0,053	+ 0,053
Brünnings . . .	4009	3,359	1,474	1,472	+ 0,001	— 0,052	+ 0,007

(E) Velocità comprese fra $1^{m},5$ e 2^{m} circa

$a = 51,01$; $b = 0,000384$; $\log. a = 1,70761$; $\log. b = 6,58478$.

OSSERVATORE	$\frac{1}{p}$	$\frac{s}{c}$	VELOCITA'		$\frac{v-(v)}{v}$ secondo la formola	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Turazza
			osservata v	calcolata (v)			
Funk.	2222	1,596	1,502	1,367	+ 0,089	+ 0,089	+ 0,099
	4009	3,412	1,506	1,488	+ 0,012	+ 0,009	+ 0,022
	1817	2,060	1,509	1,717	— 0,137	— 0,145	— 0,128
	3251	3,111	1,575	1,577	— 0,001	— 0,006	+ 0,007
	4009	3,682	1,598	1,546	+ 0,032	+ 0,028	+ 0,041
	1987	2,033	1,601	1,631	— 0,019	— 0,025	— 0,011
	4009	3,802	1,608	1,571	+ 0,023	+ 0,019	+ 0,032
	1817	2,263	1,627	1,799	— 0,105	— 0,114	— 0,097
	4009	3,862	1,663	1,584	+ 0,047	+ 0,044	+ 0,057
	4009	4,310	1,736	1,672	+ 0,037	+ 0,031	+ 0,044
	1987	2,315	1,758	1,741	+ 0,009	+ 0,003	+ 0,011
	1987	2,425	1,820	1,782	+ 0,021	+ 0,002	+ 0,022
	1987	2,621	1,869	1,852	+ 0,009	0	+ 0,015
	1817	2,723	1,922	1,974	— 0,027	— 0,017	— 0,021
	1817	2,838	1,994	2,015	— 0,010	— 0,020	— 0,004

(F) Velocità superiori a due metri.

$$a = 51{,}14; \qquad b = 0{,}000382.$$

Osservatore	$\frac{1}{p}$	$\frac{s}{c}$	Velocita'		$\frac{v-(v)}{v}$ secondo la formola	$\frac{v-(v)}{v}$ secondo Eytelwein
			osservata v	calcolata (v)		
Funk......	1987	3,188	2,009	2,079	— 0,020	— 0,026
	1187	1,935	2,035	2,055	— 0,014	— 0,021
	1987	3,121	2,040	2,027	+ 0,006	0
	1987	3,258	2,101	2,066	+ 0,013	+ 0,008
	1987	3,440	2,119	2,128	— 0,004	— 0,011
	1817	2,277	2,295	2,266	+ 0,011	+ 0,004
	1817	2,658	2,409	2,420	— 0,005	— 0,013
	1817	2,569	2,416	2,379	+ 0,016	+ 0,007

L' influenza degli errori di osservazione, calcolata dalla formola

$$b \cdot v^2 = \frac{p \cdot s}{c},$$

sarà

$$\frac{dv}{v} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{ \left\{ \frac{1}{s^2} \cdot \overline{ds}^2 + \frac{1}{p^2} \cdot \overline{dp}^2 + \frac{1}{c^2} \cdot \overline{dc}^2 \right\} }.$$

Assumendo

$$\frac{ds}{s} = \frac{1}{20}; \qquad \frac{dc}{c} = \frac{1}{10}; \qquad \frac{dp}{p} = \frac{1}{1000},$$

sarà

$$\frac{dv}{v} = \pm 0{,}056.$$

Esaminando le tabelle riportate superiormente sarà facile il ricavare le conseguenze seguenti:

1.° La formola proposta, adottando il relativo coefficiente, si tiene così

vicina al fatto da poter essere sostituita alle formole usuali, se non con grande vantaggio, certo senza scapito alcuno; e ciò tanto più se noi daremo il debito peso all' asserzione del Tadini.

(2) Il coefficiente numerico varia sensibilmente nelle piccole velocità, ma assai poco nelle velocità piuttosto grandi; in questo caso differisce di quantità piccolissima da quello proposto dal Tadini, il quale nel suo canone assumeva

$$b = 0,0004 .$$

(3) L' errore della formola differisce assai poco da quello che già porterebbero inevitabilmente gli errori di osservazione.

Potremo quindi senza tema di notabile errore adottare la formola stessa, con che riescono notabilmente semplificate le applicazioni ai varii casi della pratica.

A togliere qualunque dubbio ho creduto di dover pure cimentare la formola che si deduce dal supporre la resistenza proporzionale alla semplice velocità, come si è accostumato spesso di fare quando la velocità sia molto piccola; cioè la formola

$$v = m . \frac{p . s}{c} .$$

Non riporterò qui i varii confronti, che sarà facile a chiunque di verificare, solo mi accontenterò di accennare le principali conseguenze. Si troverebbe facilmente:

(1) Che il coefficiente m varierebbe assaissimo al diminuire della velocità; esso è

2027	per velocità comprese fra	1^{m},	ed $1^{m},5$
2926	«	$0^{m},5$	$1^{m},00$
6776	«	$0^{m},25$	$0^{m},50$
7578	«	$0^{m},10$	$0^{m},20$

(2) La formola si scosta molto dall' osservazione, specialmente quando la velocità supera $0^{m},5$.

(3) La formola proposta in ogni caso si tiene sempre più vicina all' esperienza di quello il faccia quest' ultima.

Da quanto abbiamo detto, e ci siamo ingegnati di provare fin' ora credo quindi di poter ammettere nella pratica con quel grado di approssimazione che si può nella stessa desiderare le due formole

$$g.p; \quad \text{e} \quad g.b.\frac{c.v^2}{s} \quad \text{od anche} \quad g.b.\frac{v^2}{h},$$

essendo h l' altezza media dell' acqua, a misurare la prima l' intensità della forza acceleratrice, la seconda quella della forza ritardatrice che operano a determinare il movimento delle acque scorrenti lungo gli alvei naturali o artefatti.

Allora le varie applicazioni delle formole stesse riescono assai semplificate, come sarà facile lo scorgere nei seguenti capi, nei quali credo opportuno di riassumere la teoria del centro uniforme e quella del moto permanente.

(A) Moto uniforme.

Nel moto uniforme dovendo essere nulla la forza sollecitante sarà

$$(1) \qquad p = b.\frac{c.v^2}{s},$$

e siccome è $Q = s.v$, rappresentando Q la portata, così sarà

$$(2) \qquad p.s^3 = b.c.Q^2.$$

Nei fiumi, e quando la larghezza dell' alveo sia assai grande in confronto dell' altezza dell' acqua, sarà

$$(3) \qquad p.l^2 h^3 = b.Q^2,$$

dove l rappresenta la larghezza media, h l' altezza media dell' acqua.

Nei canali, detta l la larghezza del fondo, n la scarpa, h l' altezza dell' acqua sarà

$$(4) \qquad p.(l+nh)^3.h^3 = b\{l+2h\sqrt{1+n^2}\}.Q^2.$$

Stando alla formola del Tadini, indicando con L la larghezza media del canale, si potrà anche in tal caso usare della formola più semplice

$$(5) \qquad p . L^2 . h^3 = b . Q^2 ,$$

dove sempre per b si dovrà prendere il valore corrispondente alla velocità che ha l' acqua, o che una grossolana stima preliminare ci dirà dover avere l' acqua nel canale medesimo.

A mostrare l' uso delle formole superiori mi accontenterò di risolvere i due seguenti problemi, i quali si riportano alla questione della così detta presa dell'acqua nei canali, e ciò perchè confrontando le soluzioni seguenti con quelle che io aveva suggerite nel mio trattato di *Idrometria* alle pagine 187 e seg., si vegga quale semplificazione grandissima porti l' uso delle formole superiori, senza alterare sensibilmente i risultamenti finali.

Problema 1.° Si vuole estrarre dalle sponde di un recipiente mediante un canale un corpo di acqua, la quale deve essere condotta ad un' officina discosta di una quantità L; sia data la profondità H del fondo del canale all' insile sotto il livello dell' acqua nel recipiente, e di più sia prescritto che alla distanza L la superficie dell' acqua nel canale sia depressa di una data quantità D sotto il livello dell' acqua nella conserva: si domanda la pendenza p da darsi al fondo del canale.

Sia h l' altezza incognita dell' acqua nel canale, e v la sua velocità media. Per le formole superiori e per le regole del Dubuat avremo

$$(6) \qquad p = b . \frac{v^2}{h} ; \qquad\qquad (7) \qquad H - h = \frac{v^2}{2g . m^2} ;$$

$$(8) \qquad p = \frac{D - (H - h)}{L} .$$

Da queste si avrà tosto

$$(9) \qquad 2gm^2 \, b (H - h) = \{ D - H + h \} . h ,$$

dalla quale si avrà tosto h, quindi la (8) darà il valore cercato di p.

Prendo lo stesso esempio del libro citato di sopra, e perciò sia

$$H = 0{,}35 , \qquad D = 0{,}156 ; \qquad L = 148{,}27 ,$$

la (9) diventa

$$h^2 + 0{,}949 . h = 0{,}4$$

da cui tosto

$$h = 0,316\ ,$$

e la (8) darà

$$p = 0,000823\ ,$$

i quali valori differiscono di quantità trascurabili in tali ricerche da quelli che con calcolo molto più lungo e laborioso sono stati trovati nel libro citato.

Volendo Q bisognerà conoscere la larghezza media del canale, che si suppone eguale a quella dell' apertura praticata nella sponda del recipiente; sia questa λ e sarà

$$(10) \qquad Q = a\lambda h . \sqrt{p . h}\ ,$$

nel nostro caso se sia $\lambda = 1,12$ si troverà

$$Q = 0,2734\ .$$

Nel calcolo si è preso $b = 0,0004356$ come importavano le regole accennate superiormente per essere la velocità compresa fra' 0,5 ed 1,0; e si è fatto $m = 0,95$ secondo che prescrive Eytelwein.

Problema 2.° Nel caso precedente invece che sia dato D, si suppone che sia data la caduta totale C della quale si può disporre alla distanza L, e si domanda di dare a p tal valore che il prodotto della portata del canale per la caduta che rimane disponibile al termine del canale stesso sia un massimo.

In questo caso alle formole superiori conviene aggiungere l' altra

$$(11) \qquad K = C - (H - h) - p . L\ ,$$

dove K rappresenta la quantità di caduta che resta disponibile al termine del canale.

Dalle stesse avremo facilmente le due

$$Q = m\sqrt{2g} . \lambda . h . \sqrt{H - h}\ ,$$

$$K = C - (H - h) - 2gm^2 b . L . \frac{H - h}{h}\ ,$$

donde

$$Q.K = m\lambda\sqrt{2g}.\left\{C.h(H-h)^{\frac{1}{2}} - h(H-h)^{\frac{3}{2}} - 2gm^2 bL.(H-h)^{\frac{3}{2}}\right\},$$

applicando a questa quantità le regole ordinarie dei massimi e minimi, e posto per semplicità

$$2A = \frac{6.gm^2 b.L + 5C - 7H}{5},$$

$$B = \frac{H\{6.gm^2 bL + 2C - 2H\}}{5},$$

si troverà

$$h = -A + \sqrt{A^2 + B},$$

donde

$$v = m\sqrt{2g}.\sqrt{H-h},$$

e finalmente

$$p = b.\frac{v^2}{h}.$$

Applicando queste formole all'esempio superiore, supponendo $C = 4,823$ si troverà

$$A = 1,545; \qquad B = 0,866; \qquad h = 0,258,$$

e finalmente

$$p = 0,00275,$$

con piccolo divario da quanto si era trovato nel citato mio Trattato di idrometria alla pag. 189; dove debbo avvertire essere corso un errore di stampa nelle cifre decimali di p, dovendo essere spostata la virgola di un posto.

(B) Moto permanente a fondo orizzontale.

Prenderemo l' origine delle coordinate in quel punto del fondo ove consideriamo essere lo sbocco del canale, le x sul fondo orizzontale da valle a monte; le y verticali in senso opposto alla gravità. Useremo in primo luogo della formola del Tadini, avvertendo soltanto di dover in ogni caso adattare alla

stessa l' opportuno valore del coefficiente come è dato dalle regole superiori. Detto s l' arco, y l' altezza dell' acqua alla distanza x dell' origine, ed h l' altezza dell' acqua nella sezione all' origine avremo:

Forza acceleratrice dovuta alla gravità $-g.\frac{dy}{ds}$ perchè tende a diminuire le s.

Resistenza . . . . $+g.b\frac{Q^2}{L^2y^3}$ « « ad aumentare le s.

Velocità . . $v=-\frac{ds}{dt}$; forza acceleratrice . . $=-\frac{dv}{dt}$

dove L rappresenta la larghezza media del canale.

Sarà quindi

$$-g.\frac{dy}{ds}+g.b.\frac{Q^2}{L^2.y^3}.=-\frac{dv}{dt}; \qquad v=\frac{Q}{L.y},$$

e quindi

$$g.L.^2y^3.dy-gb.Q^2.ds=Q^2.dy,$$

da cui

$$ds=\frac{L^2}{b.Q^2}.y^3dy-\frac{1}{g.b}.dy,$$

e finalmente, sostituendo x ad s, dal quale differisce pochissimo,

$$(1) \qquad y^4-h^4-\frac{4.Q^2}{gL^2}.(y-h)=\frac{4.b.Q^2}{L^2}.x,$$

la quale rappresenta l' equazione della curva cui corrisponde l' andamento longitudinale della superficie libera dell' acqua.

La curva è della famiglia delle parabole in quanto che la x è espressa in funzione intera della y; dalla parte delle x positive è dottata di due rami infiniti, l' uno superiore l'altro inferiore, che si protraggono senza speciale accidente come in una parabola più ristretta dell' Appolloniana; il ramo inferiore incontra il fondo ad una distanza dall' origine eguale ad

$$\frac{\{4Q^2-gL^2h^3\}.h}{4bg.Q^2},$$

nel qual punto l' altezza dall' acqua sul fondo è

$$\sqrt[3]{\frac{4.Q^2}{g.L^2}},$$

e la pendenza della superficie libera

$$\frac{b.g}{3},$$

il vertice della curva è dalla parte delle x negative ad una distanza dall' origine eguale a

$$\frac{5Q^2.\sqrt[3]{Q^2}+\{gL^2h^3-4.Q^2\}h.\sqrt[3]{gL^2}}{4bg.Q^2\sqrt[3]{gL^2}}.$$

L' equazione (1), che si può sempre facilmente risolvere, ci farà conoscere l'altezza cercata dell' acqua nel canale ad una data distanza da quella sezione che si considera come sbocco del canale medesimo.

Mediante questa stessa equazione si potranno pure facilmente risolvere i problemi seguenti.

Problema 1.° Si domanda la larghezza media L da darsi al canale a fondo orizzontale perchè ad una data distanza D dalla foce il livello dell' acqua nello scolo sia elevato di una data quantità H, maggiore di h, sopra l' orizzontale, essendo Q la portata del canale.

Avremo

$$H^4-h^4-\frac{4.Q^2}{gL^2}(H-h)=\frac{4.b.Q^2}{L^2}D,$$

da cui

$$(A) \qquad L=2Q.\sqrt{\frac{H-h+bg.D}{g(H^4-h^4)}}.$$

Problema 2.° Determinare la portata di un canale di scolo a fondo orizzontale in cui è data la caduta totale K da una data sezione ad un' altra che distà dalla prima di una quantità D, ed è data insieme l' altezza dell' acqua nella prima sezione, e la larghezza media del canale.

Si avrà prima

$$H=h+K,$$

e quindi

$$(B) \qquad Q=\frac{L}{2}\sqrt{\frac{g(H^4-h^4)}{H-h+bg.D}}.$$

Problema 3.° In un canale a fondo orizzontale è data la larghezza media e la portata, e si domanda l' altezza dell' acqua alla foce perchè ad una data distanza D dalla foce, l' altezza dell' acqua sia H.

In tal caso l' incognita è h la quale si avrà dalla

$$(C) \qquad h^4 - \frac{4.Q^2}{gL^2}.h = H^4 - \frac{4.Q^2}{L^2}\left\{\frac{H}{g} + b.D\right\}.$$

Scolio. Potrebbe succedere che si cercassero le altezze successive dell' acqua in un canale per esempio di scolo, nel quale immettendo successivamente altri canali secondarii la sua portata andasse aumentando nei suoi varii rami a mano a mano che si va discendendo verso la foce. Ecco come le nostre formole si presterebbero alla soluzione di una tale questione nel caso che il fondo tutto del canale fosse orizzontale.

Si comincierà dal considerare l' ultimo tronco alla foce, al quale si applicherà l' equazione (1), e così potremo determinare l'altezza dell'acqua nel ramo medesimo al punto ove si termina, e comincia il ramo secondo. In questo secondo ramo si prenderà per altezza alla foce l' altezza ora determinata, e conformemente alla sua portata e alla sua larghezza si assegnerà l' altezza dell' acqua al suo termine, e così via.

Se invece fossero date le altezze e si volessero determinare le larghezze medie dei varii tronchi, la soluzione caminerebbe in modo analogo.

Supponiamo ora che invece di un canale a fondo orizzontale, si abbia un canale a fondo inclinato così che il moto dell' acqua sia in esso uniforme e l' acqua sia dappertutto all' altezza h che ha alla foce; la pendenza del fondo di questo canale sarà

$$\frac{b.Q^2}{L^2h^3},$$

e quindi ad una distanza x dalla foce la superficie libera dell'acqua nel canale stesso sarà elevata sopra l' orizzontale condotta per la foce di una quantità

$$y_1 = h + \frac{b.Q^2}{L^2h^3}.x.$$

Cerchiamo ora a quale distanza dalla foce l'altezza y del moto permanente sarà

eguale all' altezza y del moto uniforme. È evidente che basterà per ciò porre nella (1)

$$y = h + \frac{b.Q^2}{L^2 h^3} . x ;$$

con ciò avremo

$$\frac{b^3.Q^6}{L^6.h^9} . x^3 + \frac{4.b^2.Q^4}{L^4.h^5} . x^2 + \frac{6.b.Q^2}{L^2 h} x - \frac{4.Q^2}{gL^2} = 0 ,$$

e ponendo

$$x = s. \frac{L^2 h^4}{b.Q^2} ,$$

$$s^3 + 4.s^2 + b.s = \frac{4.Q^2}{g.L^2 h^3} ,$$

e fatto in quest' ultima

$$u = s - \frac{4}{3} ,$$

si avrà

$$u^3 + \frac{2}{3} u = \frac{88}{27} + \frac{4.Q^2}{gL h^3} ,$$

ponendo quindi

$$p_1 = \frac{2}{9} ; \qquad q = \frac{44}{27} + \frac{2.Q^2}{gL^2 h^3} ,$$

sarà

$$(a) \qquad u = \sqrt[3]{\{q + \sqrt{q^2 + p_1^3}\}} + \sqrt[3]{\{q - \sqrt{q^2 + p_1^3}\}} ,$$

poi

$$(b) \qquad s = \frac{4}{3} + u ,$$

e finalmente

$$(c) \qquad x = s. \frac{L^2 h^4}{b.Q^2} .$$

Le superiori sostituendo a $\frac{Q^2}{bLh^3}$ il suo valore, cioè la pendenza p che converrebbe dare al fondo del canale perchè l' acqua scorresse nel medesimo con moto uniforme sotto all' altezza h, diventano

$$p_1 = \frac{2}{9} ; \qquad q = \frac{44}{27} + \frac{2.p}{g.b} , \qquad x = s. \frac{h}{p} .$$

Ora nelle piccole velocità, che è il caso solo in cui si suggerisce di condurre il fondo orizzontale alla foce, senza grosso divario si può nel valore di q trascurare il $\frac{2p}{gb}$, e allora assai prossimamente è

$$s = 2,7 ,$$

e quindi

$$x = 2,7 . \frac{h}{p} .$$

Quest' ultima formola si può tradurre nella regola seguente.

Se per l' altezza h, corrispondente al livello dell'acqua nella sezione allo sbocco, si guida un' orizzontale fino all' incontro del fondo del canale, che con moto uniforme convoglierebbe una data quantità di acqua con costante altezza h e con data larghezza media; fino ad una distanza dalla foce eguale a due volte e due terzi di volta circa della lunghezza intercetta fra la foce e il punto dove la detta orizzontale incontra il fondo, l'altezza dell'acqua nel canale a fondo orizzontale che colla medesima larghezza media convoglia la stessa quantità di acqua è superiore a quella del canale a fondo inclinato, al di là la detta altezza si fa invece di più in più minore.

Questa osservazione viene in parte a convalidare, in parte a limitare una regola dei pratici, i quali asseriscono che negli scoli delle basse pianure il massimo vantaggio si ha conducendo il fondo dello scolo orizzontale alla foce. Il tornaconto infatti non vi può essere se non superiormente a quel punto ora assegnato, il quale si dilunga tanto più dalla foce quanto è minore la pendenza del canale. Marcato è però sempre il vantaggio quando si abbia alla foce una piccola altezza h e sia piuttosto forte la portata del canale.

Credo che in pratica il vantaggio sia ancora più forte di quello che somministra la formola superiore, perchè non dubiterei di asserire che il vero profilo dell' acqua nel canale a fondo orizzontale si stringe al fondo più di quello che vorrebbe la formola; però siccome in tali ricerche è assai meglio trovar l'acqua più bassa di quello che si è calcolato di quello sia più alta, e siccome il divario in ogni caso non può essere molto forte, così riputerei abbastanza buono per la pratica l'uso della formola assegnata, della quale credo difficilmente potersene suggerire una più semplice.

Se alcuno dubitasse dell' uso della formola adottata per esprimere le resi-

stenze, e volesse sostituirvi l' altra in cui le resistenze stesse si assumono proporzionali al perimetro bagnato, in ragione inversa della sezione, e proporzionali al quadrato della velocità; allora detta l la larghezza del fondo del canale, n la pendenza delle scarpe, e supposto che la sezione sia un trapezio, l' equazione fondamentale diventerebbe

$$-g.\frac{dy}{ds}+gb.Q^2.\frac{l+2\sqrt{1+n^2}.y}{(l+ny)^3.y^3}=-\frac{dv}{dt},$$

da cui si ricaverà

$$ds=\frac{1}{2\sqrt{1+n^2}.b.Q^2}\,\frac{(l+ny)^3.y^3}{\dfrac{l}{2\sqrt{1+n^2}}+g}\,.dy-\frac{1}{2g\sqrt{1+n^2}.b}\,\frac{l+2ny}{\dfrac{l}{2\sqrt{1+n^2}}+y}\,.dy,$$

in cui posto

$$\sqrt{1+n^2}=m\,; \qquad \frac{l}{n}=\lambda\,; \qquad \frac{l}{2m}=L\,,$$

ed integrando, si avrà

$$\text{(II)}\quad x=\frac{n^3}{2mb.Q^2}\Big\{\frac{1}{6}(y^6-h^6)+\frac{5\lambda-L}{5}(y^5-h^5)+\frac{5\lambda^2-5\lambda L+L^2}{4}(y^4-h^4)$$

$$+\frac{(\lambda-L)^3}{5}(y^3-h^3)-\frac{L(\lambda-L)^3}{2}(y^2-h^2)+L^2(\lambda-L)^3(y-h)\Big\}$$

$$-\frac{n}{gmb}(y-h)-\Big\{\frac{n^3L^3(\lambda-L)^3}{2mb.Q^2}+\frac{n\{\frac{1}{2}\lambda-L\}}{gmb}\Big\}.\log.\frac{y+L}{h+L}\,.$$

Se poi il canale fosse rettangolare, allora si avrebbe

$$dx=\frac{l^3}{2b.Q^2}.\frac{y^3}{y+\frac{1}{2}l}.dy-\frac{l}{2gb}\frac{dy}{y+\frac{1}{2}l},$$

donde

$$\text{(III)}\qquad x=\frac{l^3}{2b.Q^2}\Big\{\frac{1}{5}(y^3-h^3)-\frac{1}{4}\,l(y^2-h^2)+\frac{1}{4}l^2(y-h)\Big\}$$

$$-\frac{l}{2b}\Big\{\frac{l^5}{8.Q^2}+\frac{1}{g}\Big\}\log.\frac{y+\frac{1}{2}l}{h+\frac{1}{2}l}\,.$$

Applicando queste formole ai casi pratici si vedrà facilmente che i risultamenti somministrati dalla (II) differiscono di pochissimo da quelli dati dalla (I), la quale presenta in vero una pendenza alcun poco maggiore. In seguito a ciò, ed osservando che in pratica non si può spingere l'esattezza fino alla differenza di pochi millimetri, e che d'altronde è meglio che la formola ci dia un' altezza d'acqua piuttosto maggiore di quello sia minore della vera, si potrà francamente usare della (I), certi di raggiungere col suo mezzo quella ragionevole approssimazione alla quale solo si può aspirare in questo genere di ricerche, in cui tante e così svariate circostanze concorrono ad alterare il risultamento finale.

In base di questa osservazione, nel calcolo che ora imprendo del movimento permanente a fondo inclinato, mi accontenterò di usare della formola delle resistenze come venne suggerita dal Tadini, variandone solo opportunamente il relativo coefficiente numerico.

(C) Moto permanente a fondo inclinato.

Prendiamo l'origine allo sbocco, e contiamo le x sull' orizzontale condotta per l'origine da valle a monte; diciamo y l'altezza verticale dell'acqua nella sezione che distà x dall'origine, e sia p la pendenza costante del fondo. Avremo:

Forza acceleratrice dovuta alla gravità $= -g\left\{\frac{dy}{ds} + p.\frac{dx}{ds}\right\}$.

Resistenza . . . . $= +g.b.\frac{Q^2}{L^2.y^3}$.

Forza acceleratrice . . . . $= -\frac{dv}{dt}$.

Velocità . . . . $= \frac{Q}{L.y} = -\frac{ds}{dt}$.

quindi

$$-g\left\{\frac{dy}{ds} + p.\frac{dx}{ds}\right\} + g.b.\frac{Q^2}{L^2.y^3} = -\frac{dv}{dt}.$$

ossia

$$-g\{dy + p.dx\} + g.b.\frac{Q^2}{L^2.y^3}\,ds = -\frac{ds}{dt}\,dv = v.dv = -\frac{Q^2}{L^2.y^3}.dy.$$

da cui

$$(1) \qquad p.dx = -\frac{y^3 - \frac{Q^2}{gL^2}}{y^3 - \frac{b.Q^2}{pL^2}} . dy ,$$

e, mettendo per semplicità di scrittura

$$(2) \qquad \frac{Q^2(g.b - p)}{gp.L^2} = a ; \qquad \frac{b.Q^2}{pL^2} = k^3$$

$$y + p.x = -a \int \frac{dy}{y^3 - k^3}$$

$$\frac{3k^2}{a}(y + p.x) = \int \frac{(y + 2k) . dy}{y^2 + ky + k^2} - \int \frac{dy}{y - k} ,$$

da cui

$$\frac{3k^2}{a}(y + p.x) = \log . \frac{\sqrt{y^2 + ky + k^2}}{y - K} + \sqrt{3} . Ar. tg. \frac{2y + k}{k . \sqrt{3}} ,$$

e dovendo essere $y = h$ per $x = 0$, si avrà finalmente

$$(IV) \qquad y + p.x = h + \frac{a}{3k^2} . \log . \frac{(h - k) . \sqrt{y^2 + ky + k^2}}{(y - k) . \sqrt{h^2 + kh + k^2}}$$

$$+ \frac{a}{k^2 \sqrt{3}} . Ar.tg. \frac{k\sqrt{3} . (y - h)}{(2h + k) . y + (2k + h) . k} .$$

$y + px$ rappresenta l' elevazione sull' orizzontale condotta alla foce della superficie dell' acqua nella sezione che distà x dall' origine; y l' altezza dell' acqua nella sezione medesima; h l' altezza dell' acqua alla foce, e k l' altezza dell' acqua nel canale a regime uniforme, il quale sotto la pendenza p convoglierebbe la medesima quantità di acqua del canale che si considera.

Poniamo l' equazione superiore sotto un' altra forma, pel che facciamo

$$N_y = Arc. tg. \frac{k . \sqrt{3} . (y - h)}{(2h + k) . y + (2k + h) . k}$$

$$M_y = \frac{\sqrt{y^2 + ky + k^2}}{\sqrt{h^2 + kh + k^2}} \cdot \frac{e^{\sqrt{3} . N_y}}{e^{\frac{3}{(1-n)k} . (y - h)}} ,$$

esprimendo con n la quantità $\frac{p}{gb}$, e sarà

$$(V) \qquad y - k = (h - k) . M_y . e^{-\frac{5p}{(1-n)k} . x}$$

Ora noi abbiamo veduto che b è massimo nelle piccolissime velocità, e che va poi successivamente diminuendo al crescere che fa la velocità; e siccome la velocità è legata alla pendenza per modo che una piccolissima velocità corrisponde ad una piccolissima pendenza è inversamente, così si scorge che sarà b grande per p piccolo, e che quindi nei casi pratici nei quali occorrerà il bisogno di usare delle formole ora trovate, la quantità

$$\frac{p}{gb},$$

ossia la n, sarà generalmente minore di uno. Solo nei casi di fortissime pendenze, e quindi di velocità assai grandi potrà riescire n maggiore di uno, occorrendo per ciò che la pendenza diventi almeno del quattro per mille circa; in questi casi soli, d' altronde eccezionali, diventerà n maggiore dell' unità.

Stringendosi ai casi i più comuni, la quantità

$$\frac{5p}{(1-n)k}$$

sarà positiva, e quindi

$$e^{-\frac{5p}{(1-n)k} . x}$$

andrà diminuendo al crescere della x così da diventare tenuissimo per valori di x sufficientemente grandi.

Differenziando poi il valore di M_y troveremo

$$\frac{d.M_y}{dy} = - \frac{e^{\sqrt{5}.N_y} \; e^{-\frac{3}{(1-n)k} . (y-h)}}{2(1-n)k . \sqrt{k^2 + kh + h^2} . \sqrt{y^4 + ky + k^2}} . \Big\{ 6.y^2 + 2k(2k+n).y$$

$$+ k^2 \left(3{,}268 + n.(1 + \sqrt{3})\right) \Big\},$$

dalla quale risulta che, se n è minore di uno, qualunque valore abbia y, il $\frac{dM}{dy}$ è essenzialmente negativo, e che quindi M_y diminuisce al crescere della y.

Ciò premesso se allo sbocco sia

$$h = k\,,$$

cioè l' altezza dell' acqua eguale a quella che corrisponde al regime uniforme del canale, dalla (V) avremo

$$y = k\,,$$

qualunque sia x. Cioè

Se allo sbocco l' altezza dell' acqua eguaglia quella del regime uniforme, la superficie libera della corrente si disporrà da per tutto parallela al fondo, e il moto dell' acqua sarà uniforme.

Se è $h < k$ sarà pure $y < k$, e se invece sia $h > k$ riescirà anche $y > k$, cioè

Se allo sbocco l' altezza dell' acqua è minore o maggiore di quella che compete al regime uniforme del canale, allora l' acqua nel canale stesso si manterrà inferiore o superiore a quella del moto uniforme, e la superficie libera o convergerà o divergerà dal fondo secondo che succede l' uno o l' altro dei due casi contemplati.

La (V) ci dice pure che a mano a mano che cresce la x la quantità $y - k$ si va facendo in ogni caso di più in più piccola, non portando a ciò, per quello che abbiam detto, alterazione sensibile la variazione dei valori della M_y, e quindi per x abbastanza grande, sarà sensibilmente

$$y = k\,,$$

cioè

L' altezza dell' acqua nel caso di moto permanente a fondo inclinato si va sempre più avvicinando a quella che compete al moto uniforme, e quindi la superficie libera si va disponendo così da riescire parallela al fondo e confondersi colla superficie del moto uniforme. Questo avviene ad una distanza dalla foce tanto maggiore quanto è più grande la differenza fra l' altezza del regime uniforme e quella dell' acqua allo sbocco; ma questa distanza però non è mai grandissima, come di fatto accenna la pratica, la quale dà forse una distanza ancora minore di quella che somministrano le formole.

Quest' ultima osservazione è importantissima nella pratica, in quanto che ci mostra che per poco che siavi di pendenza nel fondo del canale, qualunque sia l' altezza dell' acqua alla foce, la superficie dell' acqua nell' interno del canale non risente questa differenza d' altezza che per una distanza dalla foce non mai molto grande, e che quindi si può in ogni caso con sufficiente approssimazione applicare al medesimo le formole del moto uniforme, come appunto accostuma di fare la pratica.

Per ciò le due questioni che importano particolarmente si riducono solo alla teoria del moto uniforme, e a quella del moto permanente a fondo orizzontale, teorie che abbiamo già nei due primi numeri dettagliatamente spiegate.

Alcune volte il fondo potrebbe essere acclive, o almeno potrebbe sorgere il dubbio se un maggiore profondamento nell'alveo, anche tale da rendere alcun poco acclive il fondo fosse per tornare utile, in quantochè si potesse con ciò sbassare viemaggiormente il livello dell'acqua rapporto alle adiacenti campagne. Non credo quindi fuori di proposito il trattare anche il caso del fondo acclive, però sempre nell' ipotesi che l' acclività del fondo sia piccola cosa, altrimenti dubiterei molto che il liquido si spartisse in parti indipendentemente moventisi, restandone una porzione come stagnante sul fondo, nel qual caso le nostre formole non vi si potrebbero più applicare.

(D) Moto permanente a fondo acclive.

In tal caso detta p la pendenza del fondo, che allora ha luogo da valle a monte, sarà la forza acceleratrice dovuta alla gravità

$$= -g \left\{ \frac{dy}{ds} - p \cdot \frac{dx}{ds} \right\},$$

e quindi l' equazione differenziale diventa

$$(1) \qquad p.dx = \frac{y^5 - \frac{Q^2}{gL^2}}{y^3 + \frac{b.Q^2}{pL^2}} \cdot dy .$$

La quale integrata così che per $x = 0$ sia $y = h$ somministra

$$(\mathrm{VI}) \qquad y - px = h + \frac{1}{3} k . (1 + n) . \log . \frac{(y+k) . \sqrt{h^2 - kh + k^2}}{(h+k) . \sqrt{y^2 - ky + k^2}}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} k . (1 + n) \; Ar. \, tg. \frac{K . \sqrt{3} . (y - h)}{(2h - k) y + (2k - h) k} ,$$

dove k ed n hanno le stesse significazioni del caso precedente, con questo però di differenza che ora k non rappresenta che un numero e nulla più.

Sviluppando quest' ultima secondo le potenze ascendenti di $p.x$, o meglio, integrando la (I) per serie progrediente secondo le potenze di px si troverà

$$y - px = h + \frac{(1+n) . m^3}{1 - n . m^3} . px + \text{ec.}$$

$y - px$ rappresenta l' altezza della superficie libera sull' orizzontale condotta pel fondo alla foce della sezione che distà dalla foce della quantità x; se rappresentiamo con Y questa elevazione, sarà dunque

$$(2) \qquad Y = h + \frac{(1+n) . m^3}{1 - n . m^3} . px + -$$

Ora perchè l' acqua si muova, come si richiede, da monte a valle, è necessario che la superficie libera penda verso valle, e quindi, prendendo x così piccolo da render trascurabili i termini contenenti il p^2x^2; p^3x^3. ec., dovrà essere

$$Y > h ,$$

e quindi

$$n . m^3 < 1 .$$

Perchè il moto abbia luogo dunque nel canale secondo il senso prescritto, dovrà la pendenza p del fondo, l' altezza k del regime uniforme a pendenza declive p, e l' altezza h dell' acqua alla foce soddisfare alla relazione

$$\frac{p}{gb} . \frac{k^3}{h^3} < 1 ;$$

pel che si domanda generalmente che sia p assai piccolo.

Quando questo succeda, allora suddividendo il tronco in tante parti in ciascuna delle quali x sia tale da poter trascurare i termini superiori al primo, avremo intanto al termine del primo tronco un'altezza d'acqua sull' orizzontale

$$Y_1 = h + \frac{(1+n).m^3}{1-nm^2}.p.x_1\,,$$

e quindi detta h_1 l' altezza dell' acqua nella sezione al termine del primo tronco sarà

$$h_1 = h + \left(\frac{(1+n).m^3}{1-nm^3}+1\right).px_1 = h + \frac{m^3+1}{1-nm^3}.p.x_1\,.$$

All' origine quindi del secondo tronco sarà

$$m_1 = \frac{k}{h_1}\,,$$

e quindi $m_1 < m$; donde $m_1^3 < m^3$; ed $1 - nm_1^3 > 1 - n.m^3$.

Al termine del secondo tronco, e al principio del terzo avremo

$$Y_2 = h_1 + \frac{(1+n)\,m_1^3}{1-nm_1^3}.p.x_1$$

$$h_2 = h_3 + \frac{1+m_1^3}{1-n.m_1^3}.p.x_1\,,$$

e per le osservazioni fatte superiormente sarà

$$h_2 - h_1 < h_3 - h\,.$$

Così progredendo si vedrà facilmente che la superficie libera si va disponendo in curva concava volgente la concavità all' orizzontale, alla quale si va sempre più stringendo quanto più ci discostiamo dalla foce, come succede nel moto a fondo orizzontale. Questa conseguenza è ancora viemaggiormente convalidata dell' osservare che col discostarsi dalla foce si fa sempre più ampia la sezione, e quindi diminuisce la velocità, al diminuire della quale abbiamo veduto farsi sempre più grande il b e quindi più piccolo n.

Anche quando il fondo è acclive è dunque possibile il moto verso la foce, purchè per altro sia verificata la

$$\frac{p}{gb} \cdot \frac{k^3}{h^3} < 1 \, .$$

Se la p fosse così grande da non rendere soddisfatta la precedente, allora o il liquido si alza tanto da rendere h tale da soddisfarla, oppure, se h è determinata, dovrà spartirsi in parti delle quali l' una starà come stagnante sul fondo, formando come un fondo artificiale sul quale il liquido stesso prenderà allora il suo corso.

(E) Confronti.

Non sarà senza profitto che qui istituiamo un confronto fra i varii casi ora considerati.

Supponiamo dunque che in un canale di data larghezza media l debba correre una quantità Q di acqua, e debba questa metter foce in un bacino, nel quale l' acqua ristagni alla foce sotto un' altezza h sul fondo del canale alla foce stessa. Potressimo soddisfare alla questione con quattro canali:

1.° Con un canale a fondo inclinato precisamente sotto a quella pendenza che renderebbe il moto uniforme, e quindi costante l' altezza dell'acqua in tutto il canale ed eguale all' altezza h dell' acqua alla foce.

2.° Con un canale a fondo inclinato, ma sotto tale pendenza che sia maggiore o minore di quella corrispondente al regime uniforme.

3.° Con un canale a fondo orizzontale.

4.° Con un canale a fondo acclive, però di pendenza così tenue da rendere soddisfatta quella condizione che abbiamo posta considerando il moto permanente in questo caso.

L' equazione della superficie libera sarebbe rappresentata nel primo caso dalla

$$Y = h + \frac{b \, . \, Q^3}{L^2 h^3} \, . \, x \, ,$$

nel secondo caso dalla (IV); nel terzo dalla (I); nel quarto della (VI); purchè, rappresentando con Y l' altezza sull' orizzontale condotta pel fondo alla

foce, si ponga in esse ordinatamente

$$y = Y - px$$
$$y = Y$$
$$y = Y + px\,.$$

Supponiamo che gli elementi per questi quattro casi sieno i medesimi, e poniamo

$$\frac{b.Q^2}{pL^2} = k^3\,; \qquad n = \frac{p}{gb}\,; \qquad m = \frac{k}{h}\,.$$

Suddividiamo il canale a partire dalla foce in tanti tronchi nei quali sia px così piccola da poter trascurare le sue potenze superiori, ed usiamo degli sviluppi in serie secondo le potenze della px, tenendo conto del solo primo termine in cui si contiene la px. Distinguiamo cogli apici u, o, d, a applicati alle Y i valori di questa quantità corrispondenti al caso di moto uniforme, di moto a fondo orizzontale, di moto a fondo declive, e finalmente del moto a fondo acclive; avremo al termine del primo tronco, e quindi al principio del secondo

$$Y_1^{(u)} = h + m^3.p\,.x_1$$

$$Y_1^{(d)} = h + \frac{(1-n)\,m^3}{1-n.m^3}\,.p.x_1$$

$$Y_1^{(o)} = h + \frac{m^3}{1-nm^3}\,.p.x_1$$

$$Y_1^{(a)} = h + \frac{(1+n)\,m^5}{1-n.m^3}\,.p.x_1\,.$$

Nel primo caso, cioè in $Y^{(u)}$, m è costante; nel terzo e quarto, siccome al crescere di x cresce l'altezza dell'acqua, così m diminuisce al crescere della x; nel secondo m diminuisce se è k minore di h, cresce invece se è $k > h$, cioè secondo che la pendenza del fondo è maggiore o minore di quella che corrisponde al regime uniforme. Consideriamo x così piccolo da poter trascurare queste variazioni di m ed allora ad una piccola distanza dalla foce sarà

se è $m < 1$ quindi $k < h$

$$Y_1^{(d)} < Y_1^{(u)} < Y_1^{(o)} < Y_1^{(a)}\,,$$

cioè l' acqua sarà più alta rapporto all' orizzonte nel canale a fondo acclive, poi in quello a fondo orizzontale, poi in quello a regime uniforme, e finalmente in quello a regime permanente di cui la pendenza è maggiore di quella che compete al regime uniforme.

Se è $k = h$ sarà $m = 1$ e allora avremo

$$Y_1^{(d)} = Y_1^{(u)}\,; \qquad Y_1^{(u)} < Y_1^{(o)} < Y_1^{(a)}\,.$$

Se finalmente è $k > h$ cioè $m > 1$ ma però tale da rendere $n.m^3 < 1$, sarà

$$Y_1^{(u)} < Y_1^{(d)} < Y_1^{(o)} < Y_1^{(a)}\,;$$

cioè in questo caso sarà la superficie dell' acqua nel canale a regime uniforme la più depressa di tutte, e sempre quella nel canale a fondo acclive la più alta.

Procedendo nel secondo tronco il coefficiente di px rimane lo stesso di prima in $Y_1^{(u)}$, ma esso diminuisce in Y_1^{o}; ed in $Y_1^{(a)}$, ed in $Y_1^{(d)}$ diminuisce se è $k < h$ cresce se è $k > h$. Al termine quindi del secondo tronco le differenze d' altezza dell' acqua sull' orizzonte saranno minori che nel primo, e così progredendo sarà facile il vedere che termineremo coll' andamento seguente.

Nel canale a fondo orizzontale e in quello a fondo acclive la superficie libera sarà prossimamente orizzontale, ossia con pendenza tenuissima, e nel secondo più bassa ancora che nel primo.

Nel canale a fondo inclinato la superficie libera sarà parallela al fondo, e l' altezza dell' acqua nella sezione sarà quella che compete colla data pendenza del fondo al regime uniforme.

Apparisce da ciò che torna conto di usare un fondo acclive, nel che la maggiore escavazione fa sì che si accresca il vantaggio qualora il canale non sia a bocca sempre libera. Non è però da passare sotto silenzio che un tal canale esigerebbe una cura continua per le deposizioni sul fondo e gli spessi sgarbi che domanderebbe, e ciò per l'acqua che stagnerebbe sul fondo.

Che in secondo luogo viene opportuno l' uso del canale a fondo orizzontale, il quale è sempre da consigliarsi quando non si possa disporre che di piccolissima caduta come è il caso delle basse pianure.

Finalmente, che nel caso di fondo inclinato si può usare delle regole del

moto uniforme, in quanto che l'influenza della foce non si fa mai sentire ad una grande distanza dalla foce medesima.

(H) Esempio numerico.

Credo che non sarà discaro di vedere qui applicate le equazioni superiori ad un esempio numerico, che renderà ancora più facili i precedenti confronti.

Sia

$$p = 0{,}0003\,; \qquad Q = 8^{m.c},26\,; \qquad L = 6^{m},87\,; \qquad h = 1^{m},50\,,$$

prendiamo $b = 0{,}0004356$, che corrisponde a velocità comprese fra un metro e mezzo metro, avremo

$$n = 0{,}0844\,; \qquad k = 1{,}2803\,.$$

Questo valore di k, essendo minore di h, ci dice che la pendenza $0{,}0003$ è più grande di quella del regime uniforme con costante altezza $1^{m},5$ come è l' altezza alla foce. Mediante questi numeri le equazioni superiori diventano

(1) Moto uniforme

$$y = 1{,}5\,,$$

e quindi

$$Y = 1{,}5 + 0{,}000187.x\,; \qquad Y = 1{,}5 + (6{,}27087)..x\,.$$

(2) Moto permanente a fondo declive

$$y + 0{,}0003.x = 1{,}5 + 0{,}1697 \log. \frac{0{,}09115.\sqrt{y^2 + 1{,}2803.y + 1{,}6595}}{y - 1{,}2803}$$

$$+ 0{,}5636.\,Ar.\,tg\, \frac{1{,}8466\,(y - 1{,}5)}{1{,}2803.y + 5{,}2034}\,,$$

ossia

$$y + (6{,}47712)..x = 1{,}5 + (9{,}22969).\log. \frac{(8{,}95974)\sqrt{y^2 + (0{,}10734)\,y + 1{,}6595}}{y - 1{,}2803}$$

$$+ (9.75095).\,Ar.\,tg.\, \frac{(0{,}26658)\,(y - 1{,}5)}{(0{,}65147)\,y + 5{,}2034}\,.$$

(3) Moto permanente a fondo orizzontale.

$$y^4 - 0{,}709 . y = 4 + 0{,}002519 \, x \, ,$$

ossia

$$y^4 - (9{,}85061) . y = 4 + (7{,}40120) . x \, .$$

(4) Moto permanente a fondo acclive.

$$y - 0{,}0003 . x = 1{,}5 + 0{,}201 . \log . \frac{0{,}5047 \, (y + 1{,}2805)}{\sqrt{y^2 - 1{,}2805 . y + 1{,}6595}}$$

$$+ 0{,}6675 . \, Ar.tg. \frac{1{,}8466 . (y - 1{,}5)}{1{,}7197 . y + 1{,}5579} \, ,$$

ossia

$$y - (6{,}47712) \, x = 1{,}5 + (9{,}30320) . \log . \frac{(9{,}70304) \, (y + 1{,}2805)}{\sqrt{y^2 - (0{,}10754) . y + 1{,}6595}}$$

$$+ (9{,}82446) . \, Ar. \, tg. \frac{(0{,}26658) \, (y - 1{,}5)}{(0{,}23545) \, y + 1{,}5579} \, ,$$

dove i logaritmi sono tabulari e i numeri posti fra parentesi sono i logaritmi tabulari dei rispettivi coefficienti.

Da queste formole avremo per

$x = 500^m$

$y^{(u)} = 1{,}50$	$Y_1^{(u)} = 1{,}593$
$y^{(d)} = 1{,}386$	$Y_1^{(d)} = 1{,}536$
$y^{(o)} = 1{,}588$	$Y_1^{(o)} = 1{,}588$
$y^{(a)} = 1{,}710$	$Y_1^{(a)} = 1{,}570$

$x = 1000^m$

$y^{(u)} = 1{,}50$	$Y_2^{(u)} = 1{,}687$
$y^{(d)} = 1{,}316$	$Y_2^{(d)} = 1{,}616$
$y^{(o)} = 1{,}665$	$Y_2^{(o)} = 1{,}665$
$y^{(a)} = 1{,}903$	$Y_2^{(a)} = 1{,}603$

$x = 2000^{m}$

$y^{(u)} = 1,50$ $\qquad$ $Y_3^{(n)} = 1,874$

$y^{(d)} = 1,28$ $\qquad$ $Y_3^{(d)} = 1,880$

$y^{(o)} = 1,80$ $\qquad$ $Y_3^{(o)} = 1,880$

$y^{(a)} = 2,267$ $\qquad$ $Y_3^{(a)} = 1,667$

ecc.

Il presente esempio numerico mostra chiaramente quanto si è detto più sopra nei confronti istituiti fra le quattro specie dei canali che qui si considerano: si scorge infatti che avendo tutti e quattro eguale portata eguale larghezza media, ed eguale altezza d' acqua alla foce, la superficie libera dell'acqua si trova elevata sopra l' orizzontale condotta per la soglia della foce stessa, a 500 metri di distanza di più nel canale a regime uniforme, quindi in quello a fondo orizzontale, poi nel canale a fondo acclive e finalmente meno di tutti nel canale a fondo declive con pendenza maggiore di quella che compete al regime uniforme; ma a 2000 metri di distanza l' altezza dell' acqua sull' orizzontale alla foce è già minima nel canale a fondo acclive e pressochè eguale negli altri, e al di là sarebbe eguale nei due canali a fondo declive e a regime uniforme, meno in quello a fondo orizzontale, e sempre minima nel canale a fondo acclive.

Le precedenti considerazioni, e le formole date tornano utilissime nella teoria dei canali di scolo, come spero di poter mostrare ben presto parlando in particolare dei canali medesimi.

(*Letta il* 21 *gennaio* 1855).

SULLA
FLORA FOSSILE DELL' OOLITE

MEMORIA

DEL M. EFF. ACHILLE DE ZIGNO

Se lo studio dei resti fossili animali contribuì a spargere molta luce sulla storia antica del globo, non meno importante dee risguardarsi quello delle piante che giacciono sepolte negli strati delle diverse formazioni. Imperciocchè secondo la natura terrestre, palustre, fluviale, lacustre o marina dei vegetali fossili siamo tratti a considerare quali fossero i limiti delle terre nell' epoche più remote, ed i confronti fra le spente flore e quelle che ora rivestono le varie zone del suolo che ci sopporta aprono vasto campo alla investigazione delle condizioni che ne favorirono lo svolgimento ed improntarono di un carattere speciale la vegetazione di cadaun periodo geologico.

Tal genere di ricerche sebbene avesse eccitata la curiosità dei nostri avi fino dai tempi del Luidio e dello Scheuchzero, non poteva però estendersi a riuscire utile nelle sue applicazioni se non se procedendo di pari passo col progresso di quella scienza, la quale si fece guida all'arte delle miniere e che aiutata dalla botanica e dalla zoologia giunse a svelarci le prime orme di vita, le prime costrutture dell' organismo (1).

Perciò veggiamo soltanto negli ultimi trent' anni, dopo che si tracciarono con maggior precisione i limiti delle formazioni geologiche ed i caratteri delle diverse faune che le distinguono, moltiplicarsi le indagini dirette ed istudiarne le flore.

(1) Zigno. *Della geologia e suoi progressi prima del secolo XIX.* Padova 1853, pag. 1.

Tra le numerose e svariate pubblicazioni, di cui s' arricchì la scienza, tengono a buon dritto il primo luogo, e pella rinomanza degli autori e pella vastità dell'impresa, le opere intente a schierarci dinanzi le descrizioni sistematicamente ordinate di tutte le piante fossili conosciute. Ma finora questi lavori di lunga lena, o rimasero incompiuti o non raggiunsero quel grado di perfezione che ora si addimanda (1).

Meno precoce imprendimento e più fruttuoso si è quello invece delle monografie e delle flore speciali, che stringendo la cerchia delle osservazioni ad un campo più limitato preparano con accurata disamina i materiali per una futura più diligente compilazione delle opere generali (2).

Un lavoro di questa fatta io da varii anni imprendeva rispetto ai diversi piani della formazione oolitica, spinto non già da temeraria fiducia nelle mie forze, ma dalla avventurata circostanza che le vicine montagne mi aveano dischiuso nelle roccie di quel periodo un' abbondante messe di resti vegetali, lo studio de' quali invitandomi a svolgere le pagine di quanto fu pubblicato su questo subbietto, mi convinse dell' utilità che avrebbe recato ai cultori di questo ramo di scienza non solo la illustrazione delle specie nuove trovate tra noi, ma eziandio una diligente revisione di tutte le conosciute (3).

(1) Si scorgerà di leggieri come qui si alluda principalmente alla *Histoire des végétaux fossiles* del Brongniart, ed al *Versuch einer Geognostisch Botanischen Derstellung der Flora der Vorwelt* del conte di Sternberg, l' una e l' altra opere pregevolissime e di sommo ajuto negli studj paleofitogici. È però a deplorarsi come la prima sia rimasta interrotta dopo la pubblicazione delle prime puntate del secondo volume, e come la seconda manchi di un indice generale. In quest' ultima sono pure corsi alcuni errori nelle citazioni delle figure; errori che lo Sternberg corresse in un foglio volante stampato di poi, ma che non è da tutti conosciuto, giacchè furono ripetuti da molti autori nel citare le specie annoverate in quest' opera.

Nella mia Flora dell' oolite, che fra poco vedrà la luce, sono fatte tutte le rettificazioni spettanti alle piante di questa formazione.

(2) I lavori più acconci a far rapidamente progredire questo ramo di scienza sono: 1.° Le monografie di singole classi o famiglie, che ne tracciano la storia seguendone le spoglie in tutte le formazioni in cui giacciono sepolte; 2.° le flore locali, che porgono la illustrazione di tutte le specie rinvenute nei diversi strati di una data regione; 3.° le flore delle singole formazioni, le quali sebbene si limitino alla descrizione delle piante vissute durante un solo periodo geologico, spaziano con ampiezza di accurate indagini per tutto il globo, e ci danno bello e costruito uno dei piani che dovrà prender posto, quando che sia, nell' edificio di una paleofitologia universale.

(3) Fino dal 1850 io m' era accinto ad illustrare le piante fossili dell' oolite veneta, operando col mezzo di esperti lavoratori gli scavi opportuni ad accrescerne il novero, e facendo disegnare le specie nuove dal valente artista sig. Germano Prosdocimi. Però avendo osservato come la sinonimia di tutte le specie componenti la flora oolitica meritasse un' accurata revisione, cambiai divisamento, ed impresi più vasto lavoro raccogliendo i materiali necessarj per la compilazione di una flora generale dell' oolite, che uscirà tra breve divisa in puntate, ed accompagnata dalle figure di tutte le specie nuove, o non ancora figurate.

E come suole avvenire che dall' esame di molti fatti scaturiscano quasi di per sè alcuni principj generali, così dallo studio di tutto che fu scritto sulla flora dell' oolite e da quello dei copiosi materiali che io potei adunare, mi fu aperta la via a sottoporvi alcune considerazioni sulla distribuzione geografica e geologica di questa flora, sulle famiglie che la compongono e sulle analogie che presenta paragonata con quelle delle formazioni vicine e coll' attuale vegetazione di alcune regioni.

E cominciando dall'annoverare i luoghi in cui furono trovati resti vegetali nelle stratificazioni dell' oolite, prima ci si presenta la maggiore delle isole britanniche, ove il numero e la bellezza di queste spoglie rendevano celebri da gran tempo le vicinanze di Whitby e di Scarborough nella contea di York. Primi a richiamare l' attenzione del pubblico su queste piante furono i signori Young e Bird porgendone alcune delineate nella loro opera geologica sulle coste del Yorkshire, stampata nel 1822 (1). Però il deposito più ricco di questi fu scoperto soltanto cinque anni dopo lungo lo stesso litorale sotto Gristhorpe Hill e quindi vedemmo aumentarsi di gran lunga il numero delle specie nelle opere di Phillips, di Lindley e Hutton, di Brongniart, di Sternberg, di Morris, di Bunbury e d' altri che videro la luce più tardi (2).

Scostandoci dalla costa orientale dell' Inghilterra e procedendo più addentro verso sud-ovest s' incontrano a Stonesfield nella contea d' Oxford i depositi più antichi dell'oolite inferiore con alghe cicadeacee e conifere, di cui si veggono ripetuti gl' indizii nelle vicine contee di Gloucester e di Wilts e più al sud lungo il canale della Manica sui lembi estremi degli strati oolitici che terminano al mare e prospettano le coste della Bretagna, troviamo nell' oolite di Charmouth unitamente ad alcune conifere e cicadeacee le fruttificazioni di una

(1) Joung aud Bird *Geological Survey of the Yorkshire Coast* 1822. In quest' opera sono assai mediocremente rappresentate alcune delle principali specie de' depositi fitolitiferi della contea di York.

(2) Nel bel lavoro del prof. Phillips, intitolato *Illustrations of the Geology of Yorkshire*, stampato nel 1835, sono annoverate molte specie, di cui è data la figura senza però che vi sia annessa alcuna descrizione. Nella *Fossil Flora of Great Britain* dei signori Lindley e Hutton ne troviamo 57 specie bellamente illustrate, 63 nella *Histoire des végétaux fossiles* del Brongniart, ed 83 nella *Flora der Vorwelt* dello Sternberg. Molte più ne enumerò il *Morris* nel suo *Catalogue of British fossils*, e varie specie formavano il subbietto di una dotta Memoria al Bunbury, quando leggeva nel marzo 1851 alla Società geologica di Londra le sue osservazioni: *On some fossil plants form the Jurassic Strata of the Yorkshire Coast.*

L' *Index paleontologicus* di Bronn, il *Tableau des genres des végétaux fossiles* del Brongniart, ed il *Genera et species plantarum fossilium* dell' Unger sono le opere più recenti che ne porgono il numero maggiore.

pandanea che fu bellamente illustrata dal Buckland ed a cui il Brongniart diede il nome di *Podocarya Bucklandi* (1).

Volgendo nuovamente verso settentrione ci si affaccia lungo il lido occidentale della Scozia l' isoletta d' Eig, nelle cui stratificazioni ritenute appartenere alla parte superiore della serie oolitica, scoperse il Witham dei frammenti, che esaminati al microscopio gli diedero a divedere la struttura propria di una conifera alla quale impose il nome di *Pinites eggensis*. Dal lato opposto, sulla riviera orientale bagnata dal mare del nord i banchi carboniferi di Brora nella contea di Sutherland adeguati dalla maestra penna del Murchison a quelli dell' oolite della contea di York segnano l' estremo punto in cui sieno comparse tracce della flora oolitica nell' emisfero boreale fissandolo al grado 58.mo di latitudine settentrionale (2).

Questo limite declinando alcun poco al sud si protende all'oriente dell'Inghilterra e si palesa nella Scania mercè le piante fossili di Hoer e di Hoganaes (3).

Nella Francia son noti i depositi fitolitifieri di Mamers, di Valoque, e d' Alençon collocati nella parte inferiore dell' oolite mentre, all' incontro quelli che si scoprirono successivamente a Verdun, a Chateau-roux, a Morestel, a Abergemens presso Nantua, a Seyssel e nel Bugey deggiono essere riferiti al piano del *Coral rag* (4).

(1) Questo fossile fu rinvenuto dal sig. Page di Bishport presso Bristol nella parte più bassa dell' oolite inferiore all' est di Charmouth nella contea di Dorset, e si serba ora nel museo d' Oxford.

Il prof. Buckland ne dà una particolareggiata descrizione ed una eccellente figura nel *Bridgewater treatise*, alla pag. 442 del vol. I, risguardante la geologia e mineralogia, ove accenna pure di avere intorno ad esso consultato l' illustre botanico Roberto Brown, che gli suggerì d' apporvi il nome generico di *Podocarya*.

(2) Oltre le scarse impronte trovate a Brora, si scopersero recentemente in Iscozia abbondanti resti vegetali nell'oolite. Il celebre Ugo Miller lesse alla Riunione dell' associazione britannica, ch' ebbe luogo in Glasgow nell' anno scorso, una Memoria sulle piante fossili della Scozia, in cui annovera cinquantadue specie come proprie di questa formazione.

(3) La non chiara successione degli strati, e la identità di alcune specie con quelle che giacciono nell' argilla wealdiana, hanno fatto porre in dubbio l' appartenenza delle piante di Scania al periodo oolitico, sebbene a questo sieno riferite da varj distinti naturalisti. Però se è vero che alcune fra queste specie sieno proprie dell' argilla wealdiana, tuttavia altre vi si trovano framiste, che spettano senza dubbio all' oolite. D' altronde le ben note analogie esistenti fra queste due flore possono rendere per ora egualmente ammissibile tanto l' una che l' altra classificazione fino a che altri fossili non ci porgano il loro ajuto per isciogliere la questione.

Frattanto rimane provato dalla natura stessa dei resti vegetali trovati nella Scania, ch' essi deggiono aver vissuto sotto condizioni eguali a quelle in cui vissero le piante che ci sono fornite dai depositi della contea di York. Trattarono, com' è noto, delle piante di Scania Brongniart, Hisinger, Nilsson e Forchammer.

(4) Mentre per le scoperte fatte in Inghilterra si andava aumentando il numero delle piante fossili trovate nell' oolite, il Desnoyers nel marzo 1825 leggeva alla Società filomatica di Parigi una Memoria intitolata *Observations sur quelques systèmes de la formation oolitique du nord-ouest de la France, et parti-*

Frequenti indizj della flora oolitica si scorgono pure nei terreni coralliani del Würtemberg, nei calcari litografici della Baviera, in qualche punto dell'Austria inferiore, nelle argille ferruginose di Ludwigsdorf, di Matzdorf, e di Wilmsdrof nella Slesia prussiana, in quelle di Kaminika Polska in Polonia e nelle sabbie quarzifere dei contorni di Mosca. I depositi della Slesia e della Polonia sono posti dal Goeppert sullo stesso orizzonte di quelli della contea di York, e quello dei dintorni di Mosca è riferito dai signori Auerbach e Frears alla parte superiore del gruppo Oxfordiano, ma quest'ultima classificazione non mi sembra per anco comprovata da sufficiente corredo d'altri fossili caratteristici (1).

Retrocedendo verso le regioni meridionali che cingono il gran bacino mediterraneo, c'imbattiamo nei depositi delle Alpi venete, ove assai prima di tutte le testè accennate scoperte si erano rinvenuti fino dal secolo scorso bellissimi esemplari di piante fossili presso il villaggio di Rotzo nei Sette Comuni in una roccia, la quale, come diremo appresso, spetta senz'alcun dubbio alla formazione giurassica. Se non che in quel tempo la geologia stratigrafica e paleontologica era ancor poco conosciuta e s'ignoravano i caratteri distintivi delle diverse formazioni componenti le montagne. Perciò non dee recar meraviglia se a questa scoperta non si diede l'importanza che meritava, e se i naturalisti d'allora si

culierement sur une oolithe a Fougeres de Mamers dans le département de la Sarthe, nella quale egli prendeva ad esaminare i diversi terreni che si succedono all'ovest di Parigi da Bellesme ad Alençon, ed indicava con rara precisione le relazioni di giacitura di una calcarea oolitica, la quale presso Mamers racchiude buon numero d'impronte vegetali.

Le piante raccolte dal Desnoyers a Mamers furono esaminate dal Brongniart, che le illustrò in una nota inserita nel fascicolo d'aprile 1825 degli *Annales des sciences naturelles.* Ma le determinazioni date allora a queste piante furono poscia dall'autore stesso rettificate nelle sue opere posteriori, essendosi accorto come la maggior parte di quelle ch'egli aveva ritenuto essere felci, dovessero invece riferirsi ad un genere di cicadeacea, le cui specie sono assai frequenti nella formazione oolitica.

In quanto agli altri luoghi di Francia, ne' quali si rinvennero piante nell'oolite, debbo qui riportare come il dott. Thiollière di Lione in una lettera a me diretta ribatta con validi argomenti le varie classificazioni date fin qui ai depositi fitolitiferi della Francia centrale, e li collochi sullo stesso orizzonte geologico dei calcari litografici di Solenhofen, Monheim e Kelheim in Baviera, e di Nussplingm nel Wurtemberg, notando tra le flore dei due paesi questa sola differenza, che mentre quella della Francia si avvicina a quella dell'Inghilterra, perchè costituita in gran parte di felci, di cicadeacee e di conifere, nella Germania, e specialmente a Solenhofen a queste classi trovansi associate le alghe in numero prevalente.

(1) I depositi oolitici con resti vegetali sparsi in più luoghi dell'Alemagna sono in generale poveri di specie, se ne togli quelli di Solenhofen, ove dominano le alghe e le conifere. Ne abbondano invece quelli del lias. Intorno alle piante dei primi si occuparono particolarmente Goeppert, Unger, Ettingshausen e Kurr. Parecchie specie si trovano pure descritte nella *Flora der Vorwelt* dello Sternberg, e nei *Beiträge zur Petrefactenkunde* del conte di Münster.

limitarono a conservare alcuni saggi di queste piante nelle loro collezioni come oggetti di semplice curiosità (1).

(1) Nell' opera postuma dell' abate Agostino dal Pozzo, intitolata *Memorie istoriche dei sette comuni vicentini*, pubblicata in Vicenza nel 1820, l' autore dopo aver parlato del famoso teschio d icoccodrillo trovato a Treschè, ed accennato alla esistenza nei Sette-Comuni di piante imprigionate nelle roccie, soggiunge alla pagina 346: « Non meno rara e curiosa è la sopra indicata scoperta di piante, le quali non sono » già rapprese fra strato e strato, come in parecchi altri luoghi di Europa, ma imprigionate in mezzo alla » sostanza della pietra, nella quale, oltre all' impronta che vi si ravvisa, si trovano le stesse erbe col loro » gambo, colle foglie, e talvolta anche co' fiori perfettamente conservati, le quali, usando diligenza, si pos- » sono anche levare. La pietra ove esistono è cenerognola, formata a strati non più grossi di mezzo piede, » e di natura calcarea. Questa si cava nel declivio del monte Spitz, mezzo miglio sopra la chiesa di Rotzo. » La scoperta fu fatta nel 1764 nell' occasione di coprire con tali lastre i murelli che attorniano il cimitero. » Venti e più anni dopo l' epoca di tale scoperta il dott. Orazio Maria Pagani, in una sua orazione letta all' Accademia olimpica di Vicenza, anno 1788, n.° XI, toccava egli pure questo argomento parlando di Rotzo, e dicendo: « Ella è una cosa che sorprende veramente e supera l' intelligenza, lo scoprire dentro a pietre » calcari finissime, compatte, rappresentazioni al naturale di piante e di erbe non mai conosciute dai più » valenti botanici. »

Reca, a dir vero, meraviglia come Giovanni Arduino, che poneva tanto studio nell' investigazione dei fenomeni geologici della sua patria, non abbia rivolta la sua attenzione a questo fatto, che in quel torno aveva menato rumore. Di lui troviamo soltanto il seguente breve cenno, scritto due anni dopo l' orazione del Pagani. « In Rotzo si trovano bensì dentro dure pietre calcaree a strati delle piante solo indigene di climi » caldissimi, dell' India, ec. « (*Nuovo giornale d'Italia*, 1790, tomo I, pag. 332, nella nota). Egualmente quel chiaro ingegno di G. B. Brocchi in una lettera al Guidoni, inserita l' anno 1794 nel *Nuovo giornale d' Italia*, tomo V, pag. 343, dopo avere anch' egli parlato del coccodrillo ch' era stato raccolto dal Barettoni, si limita ad aggiungere in proposito le seguenti parole: « Eppure anche questa è una produzione non indigena dei nostri « paesi, come non lo sono alcune erbe esotiche che si ritrovano in una pietra calcarea cenerognola dei monti di » Rotzo nei Sette-Comuni. » Si trattenne più a lungo sopra questo interessante argomento il celebre abate Fortis, il quale nelle sue *Mémoires pour servir a l' histoire naturelle, et principalement a l' oryctographie de l' Italie et des pays adjacens*, stampate a Parigi nel 1802, parlando dei luoghi più rimarchevoli dei Sette-Comuni, alla pag. 92 del vol. I, così si esprime: « Je n' ai visité la haut d' autre localité interessante, que » celle de Rotzo; ou dans une conche de pierre calcaire bleûatre et assez compacte on trouve des plantes » dessecchées et conservées dans leur état naturel, sans être aucunement incorporées avec la substance pier- » reuse qui les renferme; lorsque on en rencontre en cassant la pierre on peut en détacher les feuilles aussi » aisement, que si elles étaient prises entre deux cartons. » E più innanzi nello stesso volume, alla pag. 135, ripete questa indicazione, accennando alla inclinazione degli strati di Rozzo, e dicendo: « Les couches calcaires » de près de Rozzo sont très inclinées vers le sud. A deux ou trois cents pas de l' Eglise paroissiale de Rozzo » tout a coté du chemin on voit une de ces couches de couleur bleuâtre, dans la quelle se trouvent, quoique » bien rarement conservées dans leur état naturel comme dans un herbier au desséchement près quelques fou- » géres exotiques, dont les originaux sont encore inconnus. On nous a même assuré qu' on y a rencontré quel- » que squelette de poisson. La pièrre est assez compacte, elle a la fracture ecailleuse, et ne se fend point en » lames comme les ichtyolithes de Vestena Nova. » Nulla di più ci lasciò scritto questo arguto indagatore dei fenomeni geologici sopra un subbietto così importante, e duole ch' egli non abbia spinto le sue ricerche alla scopo di conoscere ove si conservassero quegli scheletri di pesci che gli si dicevano occorsi a taluno in mezzo alla roccia medesima, in cui si trovano rapprese le piante. Intorno a questi ittioliti non s' ebbero di poi altre notizie; ma che vi esistano è sufficientemente provato dai denti di *Pycnodus* che osservai negli strati di Rotzo e soprattutto poi dall' ittiolito di recente ivi trovato dal dott. Francesco Beggiato, direttore meritissimo del museo civico di Vicenza. In questo finora unico esemplare si scorgono abbastanza bene conservati due terzi del corpo

E fu soltanto dopo che posi in chiara luce col mezzo dei fossili come la calcarea ammonitica rappresentasse appo di noi l'oolite media e precisamente il gruppo dell' argilla d'Oxford e della roccia di Kelloway, che si potè valutare quanto dovessero riuscire interessanti per la scienza le piante di Rotzo, giacchè la loro posizione inferiore agli strati Oxfordiani ed intercalata alla parte superiore dei potenti depositi oolitici che si trovano ovunque nelle Alpi venete, tra la calcarea ammonitica ed i soggiacenti banchi dolomitici, le stabilisce coeve alla tanto celebrata flora oolitica della contea di York (1).

Estese le esplorazioni ad altri punti delle vicine montagne potei riconoscere l'esistenza dello strato fitolitifero a Mezza selva, nella Val d'assa, a Durlo, sul monte Alba presso Campo Fontana, nella valle dell' anguilla, e sul monte Pernigotti presso San Bortolamio in Val Tanara, e queste ricerche continuate per varii anni mi posero in grado di adunare un numero così ragguardevole di esemplari da poter proclamare il deposito delle Alpi venete come il più ricco di specie dopo quello della contea di York.

In Europa non troviamo altri indizii di questa flora all' infuori di quelli

compresa la testa. I caratteri presentati dalla forma di questa, dalla mandibula, dalla pinna pettorale e dalle squamme, m' indussero a ritenerlo per una specie nuova del genere *Pholidophorus*, cui diedi il nome di *P. Beggiatianus*. Questa determinazione fu anche avvalorata dal parere dell' illustre ittiologo dott. Jacopo Heckel di Vienna.

(1) Fino dal 1850, nel mio *Coup d' œuil sur les terrains stratifiés des Alpes vénitiennes*, alla pag. 6, io poneva nell' oolite inferiore lo strato a piante fossili di Rotzo, ed annunciava poscia le analogie tra la flora di Rotzo e quella di Scarborough in una comunicazione fatta all' i. r. Istituto geologico di Vienna nella tornata del 4 maggio 1852. Commetteva in pari tempo ad un intelligente e laborioso ricercatore e ristauratore di fossili, Giuseppe Cerato di Bolea, di recarsi a Rotzo, ed operarvi in più luoghi degli estesi escavi, indicandogli la precisa posizione dello strato, e la sua soggiacenza al calcare ammonitico, ed incaricandolo di ricercare se esistessero di cotali resti nel veronese o in altri luoghi nelle roccie sottoposte al detto calcare.

In quel torno il chiarissimo prof. Abramo Massalongo mi comunicava alcuni fossili (Brachiopodi e Lamelli branchi) raccolti nei terreni giurassici del veronese, e che riconobbi appartenere all'oolite inferiore. Sul rovescio d' uno degli esemplari ch' egli mi favorì, e che proveniva dal Vaio del paradiso, osservai alcune tracce di resti vegetali, e tosto pregai il prof. Massalongo a volerne curare la ricerca, esternandogli il mio convincimento, che anche nel veronese esistesse un deposito di piante nell' oolite; nè andò guari ch' egli m' inviò varii frammenti di piante, trovati dal sopra nominato Giuseppe Cerato sul monte Pernigotti in Val Tanara in uno strato posto, secondo le mie previsioni, sullo stesso orizzonte di quello di Rotzo. In questi frammenti mi fu agevole il ravvisare i caratteri della flora oolitica, quantunque l' aspetto della roccia fosse affatto diverso da quella di Rotzo, e diverse fossero pure le specie. Istituiti però dei lavori di ricerca anche sul monte Pernigotti, adunai in breve buon numero di piante fra le quali alcune specie dei generi *Cycadopteris*, *Otozamites*, *Pterophyllum*, *Brachyphyllum*, affatto simili a quelle del deposito di Rotzo, come indicai nella mia Memoria sopra i terreni giurassici delle Alpi venete, e sulla flora fossile che li distingue, stampata nel 1852. Finalmente recatomi sul luogo, constatai la giacitura degli strati fitolitiferi del monte Pernigotti, osservandovi la medesima successione che aveva notata sul monte Spitz di Rotzo, nei dintorni di Mezzaselva, e nella Val d' Assa.

che ci sono porti dalle alghe trovate negli scisti varicolori della Toscana (1) dai professori Meneghini e Savi e dai banchi carboniferi del Capo Mondego in Portogallo ove lo Sharpe rinvenne le impronte di una cicadeacea a cui Morris diede il nome di *Zamites gramineus* identificandola al *Cycadites gramineus* di Phillips (2).

Nell'Asia, Malcolmson e poscia Munro seguendo la via tracciata da Voysey e da Jenkins nell'esaminare i terreni del Deccan, trovarono nell'arenaria d' Hyderabad impronte di felci appartenenti al genere *Glossopteris*. Wapshare Hislop e Hunter vi scopersero di poi un maggior numero di resti, che gli ultimi nella loro Memoria geologica sui contorni di Nagpur riferirono ai generi *Aphyllum, Equisetites, Phyllotheca, Vertebraria, Pecopteris, Taeniopteris, Cyclopteris, Sphenopteris, Zamites, Poacites.* Alcuni esemplari di queste piante veduti dal Bunbury, il fecero propendere a ritenere tutti questi resti collocati nel terreno dell' oolite, e questa opinione viene confermata dalla comunicazione fatta all' associazione britannica nel settembre 1834 dall' illustre Grëenough, nella quale discorrendo della costituzione geologica dell' India imprende ad esaminarne la formazione giurassica e fa conoscere come la serie oolitica formi un elemento importante delle stratificazioni componenti l' Afganistan orientale e l' India settentrionale. Accenna quindi come i banchi carboniferi del paese di Cutch soggiacciano alla roccia di Kelloway e colloca nel terreno giurassico senza esitanza gli strati arenacei a piante fossili trovati nel Deccan da Hislop e Hunter (3).

Si mostra però inclinato a ritenere più antico il terreno carbonifero di

(1) È da notarsi come queste alghe appartengano a specie che si rinvengono nel sistema cretaceo, e che anzi finora si credevano esclusive di questo (*Chondrites Targioni, furcatus, intricatus*). Questo fatto però non vale ad infirmare l' importanza degli altri dati paleontologici e stratigrafici, che giustificano la classificazione data dai professori Meneghini e Savi ai schisti varicolori della Toscana. Imperciocchè se è vero che nella distribuzione dei resti organici quanto più alta è l' organizzazione, tanto più ricisamente sia definito il suo orizzonte stratigrafico, si può quindi ragionevolmente ammettere coll' illustre Murchison, che vegetali di una classe tanto inferiore, quali sono le alghe, e tanto acconci a sopportare i cambiamenti fisici, possano aver continuato a vivere, passando incolumi per quei grandi mutamenti, a cui non poteva resistere la vita animale e quella dei vegetali di un ordine superiore.

(2) Lo Sharpe, seguendo la serie secondaria da Buarcos fino al Capo Mondego, potè riconoscere come i banchi carboniferi che si trovano in quest'ultimo luogo sieno adagiati sovra una potente formazione arenaceo-marnosa, in cui si osservano parecchie conchiglie proprie del piano oolitico più basso, e sieno ricoperti da un' arenaria con istrati calcarei ad essa subordinati, i quali contengono i fossili caratteristici dell' oolite media. *Quart. Journal of the Geol. Soc. of London.* Vol. VI, 1850, 21 novembre 1849, pag. 135.

(3) Hislop and Hunter. *On the gèology and fossils of the neighbourhood of Nagpur, central India. Quart. Journ. Geol. Soc. of London.* Vol. XI, part. III, num. 43. August 1855, pag. 345.

Burdwan, nella cui flora, illustrata da J. Forbes Royle (1), scorge molta affinità colla flora carbonifera dell' Australia e ravvisa alcuni generi comuni alla formazione del vero carbon fossile. Ma la promiscuità di alcuni generi è un fatto che si ripete anche in altri luoghi ove sono ben distinte per altri caratteri, e solo che si rammenti avere il M'Coy dimostrato fino dal 1848, mercè lo studio di numerose impronte, l' appartenenza dei depositi carboniferi dell' Australia alla formazione oolitica, non esiteremo a riconoscere come appunto per questi confronti anche la flora Burdwan debba ritenersi dell' epoca oolitica.

E per vero, Hislop in una sua recente scrittura comunicata nel novembre 1855 alla Società geologica di Londra, dimostra la costante presenza di alcune specie in tutti i punti ove riconobbe alle Indie l' esistenza di una formazione oolitica d'acqua dolce e comprende in questa anche i carboni fossili di Burdwan.

In quanto poi ai depositi carboniferi dell' Australia essi contengono un genere proprio ed altri non poco comuni alle flore oolitiche delle Indie e dell' Inghilterra, fra i quali notava lo Strzelecki come forma prevalente la *Glossopteris Browniana* e M'Coy dichiarava mancare in essi ogni traccia dei *Lepidodendri*, delle *Sigillarie*, delle *Favularie* e delle *Stigmarie* che caratterizzano la formazione del litantrace (2).

Per queste scoperte fatte recentemente in Australia ci è reso noto come la vegetazione terrestre del periodo oolitico si estendesse nell' emisfero orientale fino ai gradi 150 di longitudine e 38 di latitudine australe.

All' incontro, potremo segnarne il limite occidentale volgendo lo sguardo al continente americano, ed ivi seguendo il capitano Fremont (3) nel suo viag-

(1) J. Forbes Royle Esq. *Illustrations of the Botany and other branches of natural History of the Himalayan mountains and of the flora of Caschemere.* London 1834, part. III. *Fossil plants form the Burdwan coal formation.*

(2) M'Coy. *On the fossil Botany and Geology of the Rocks associated with the Coal of Australia* 1847, con 9 tavole nel vol. XX, del giornale intitolato *Annals und magazine of natural history.*

In questo lavoro il M'Coy fa conoscere come i depositi carboniferi dell'Australia, sebbene riposino sopra una formazione in cui trovansi i fossili dell' epoca del vero carbon fossile, pure appartengono ad una formazione più recente, e precisamente a quella dell' oolite, senza che l' una si possa in alcuna maniera confondere con l' altra. Sembra quindi che vi sia stato un lungo periodo di tranquillità, e che alla flora carbonifera sia succeduta l' oolitica senza che nei periodi intermedj siensi interposte nuove formazioni. Questo fatto importantissimo per la storia antica del globo stabilisce l' Australia come il punto forse unico del globo, che sia rimasto emerso per si lungo tempo, mentre in altre parti si sconvolgevano, subissavano o sollevavano i depositi delle formazioni permiane, triassiche, e liassiche.

(3) Capit. Frément. *Report of the exploring expedition to the Rocky mountains in the Year* 1842. Washington 1845, pag. 131 e pag. 304 append. B. Il sig. Giacomo Hall, che in quest' opera esternava il

gio di esplorazione pelle terre bagnate dall' Oregone e nella California settentrionale ove al grado 111.° di longitudine e 41.° circa di latitudine boreale Giacomo Hall, che accompagnava la spedizione in qualità di naturalista, trovava una calcarea assai somigliante pei caratteri petrografici all' oolite di Bath ricoperta da un' argilla indurata con impronte di felci, fra le quali la *Glossopteris Phillipsii* comune negli strati fitolitiferi dell' oolite di Scarborough nell' Inghilterra.

Due anni dopo, cioè nel 1847, sir Charles Lyell leggeva alla società geologica di Londra una Memoria sulla struttura ed età probabile del combustibile fossile di James River presso Richmond nello stato di Virginia, che il prof. Rogers, fino dal 1842, aveva riferito all'epoca giurassica mostrandosi propenso a collocarlo nell' oolite inferiore. In questa scrittura il Lyell fa invece conoscere come ai fossili caratteristici di questa formazione si trovino in esso associate alcune forme che si ripetono nel trias e nel lias. Ma il Bumbury, che studiò e descrisse le piante fossili del deposito carbonifero di Richmond, raccolte dal Lyell, e che nel 1847 lasciava la questione ancor dubbia, non esita ora ad ammettere la sua appartenenza al sistema dell' oolite (1).

Con queste notizie nell' ultime parti alquanto problematiche si chiude il novero dei varii luoghi in cui fu dato rinvenir resti vegetali negli strati posti tra il lias e la creta.

Tracciata così in iscorcio la estensione geografica di questa flora e passando ad esaminarne la distribuzione nei varii piani dell' oolite, noi vediamo un gran numero di piante terrestri comparire nel gruppo inferiore, mancare di tali resti la roccia di Kelloway e l' argilla d'Oxford e dominare le alghe marine nel piano del Coral rag, mentre nel gruppo superiore scarse tracce di due cicadee segnano nuovamente la comparsa della flora terrestre nell' oolite di Portland dell' Inghilterra.

Pochi anni fa si annoveravano appena 180 piante proprie dei varii piani di questa formazione, ed ora, mercè le scoperte fatte nelle Alpi venete, nella Toscana, nelle Indie, nell' America settentrionale e nella Nuova Olanda, la flora

sospetto che dovessero riferirsi all'oolite le piante fossili trovate dal Frémont nel paese dell'Oregone, in una sua recente lettera mi avverte come valide ragioni lo inducano a ritenere che la flora fossile dell' Oregone e della California debba piuttosto appartenere ad altra epoca, e spettare invece all' oolite i resti fossili vegetali trovati nei terreni giurassici della vallata del Connecticut, della nuova Yersey, della Pensilvania, della Marilandia, della Virginia, e della Carolina settentrionale.

(1) Charles J. F. Bunbury. Lettera a me diretta in data 11 ottobre 1855.

dell' oolite conta 250 tra specie e varietà, delle quali all' incirca quattro quinti appartengono all' oolite inferiore.

Questo numero si compose di 148 acotiledoni, cioè di 36 alghe, 1 fungo, 15 calamarie, 85 felci, 5 licopodiacee e 6 rizocarpee; di due sole monocotiledoni, e queste appartenenti l' una alle najadee, l' altra alle pandanee; e di 101 dicotiledoni 80 delle quali spettanti alle cicadeacee, e 21 alle conifere.

Le alghe, quasi tutte marine, popolano gli strati dell' oolite media con parecchie specie di fucoidee e di floridee. Le calamarie limitate all' oolite inferiore sono rappresentate nell' ordine delle calamitee dal genere *Calamites*, in quello delle equisetacee dalle equisetiti, e nelle asterofillitee dai generi *Vertebraria Phyllotheca* e *Trizygia* proprii dei depositi indiani e dell' Australia.

Le felci spettano quasi per intero alle neuropteridee, alle sfenopteridee, alle pecopteridee ed alle daneacee colla giunta di una gleicheniacea, e di un nuovo genere cui diedi il nome di *Cycadopteris*. I generi *Isoetites, Lycopodites* e *Psilotites* vi rappresentano le licopodiacee, ed il genere *Sagenopteris* le rizocarpee. La *Caulinites Michelinii* di Pomel e la *Podocarya Bucklandi* del Brongniart segnano sole la presenza delle najadee e delle pandanee, e le cicadeacee si veggono dominare coi numerosi resti delle zamiti, delle otozamiti, dei pterofilli, delle nilsonie, delle cicadeoidee e dei picnofilli negli strati dell' oolite inferiore.

All' incontro, le conifere dopo che Brongniart e Unger (1) provarono come la maggior parte delle caulerpiti della calcarea litografica di Solenhofen si debbano ad esse riferire, si mostrano quindi abbondanti anche nel terreno coralliano, però sono più variate e numerose nell' oolite inferiore. Il genere arthrotaxites sembra quasi esclusivo degli strati di Solenhofen ove pure si rinviene il *Thuytes divaricatus* di Sternberg e tre *Brachyphyllum* si trovano in Francia sullo stesso orizzonte geologico. Negli altri depositi di Europa, che stan collocati nell' oolite inferiore, le conifere ci sono indicate dai generi *Thuytes, Cryptomerites, Pinites, Peuce, Palissya, Brachyphyllum, Araucarites*, e *Taxites*.

Dal fin qui detto chiaro apparisce come in quest' ultimo gruppo (ove ci sembra meglio spiegato dal copioso numero delle specie il vero carattere della flora oolitica) sieno dominanti i resti delle calamarie, delle felci, delle cicadea-

(1) Brongniart. *Tableau des genres du végétaux fossiles.* (Extrait du *Dictionaire d' histoire naturelles*, pag. 7. Unger. *Ueber einige fossile Pflanzen aus dem lithographische Schiefer von Solenhofen.* Mit. 2, Tafl.

cee e delle conifere, e questo fatto che si nota pur anco nelle flore del keuper e del lias e si ripete nell' argilla di Weald, induce a ritenere che durante l' epoche nelle quali si deposero tutti questi terreni le condizioni necessarie alla vegetazione di queste piante si sieno mantenute pressochè eguali in ciascheduno dei detti periodi.

Ed in vero, le calamarie, che nel Keuper giungono a 18 specie, si palesano con 4 nel lias, con 14 nell' oolite e si limitano a 3 sole equisetiti nell' argilla di Weald.

Le felci nel Keuper e nel lias aumentano dalle 38 alle 49 specie e quasi si raddoppiano nell' oolite riducendosi a 31 nel terreno wealdiano.

Le cicadeacee scarse nel Keuper, ove ne troviamo 6 sole specie, arrivano a 49 nel lias e ad 80 nell' oolite, poi scemano fino a 20 nella formazione wealdiana, e finalmente le conifere che compariscono con 9 specie nel Keuper, si mostrano con 12 nel lias, con 21 nell' oolite, e con 7 nell' argilla di Weald.

Così sebbene la prevalenza di queste classi in confronto delle altre componenti le flore di queste diverse formazioni stabilisca una ben distinta analogia fra di loro, pure, l' aumento considerevole nel numero delle felci, delle cicadeacee e delle conifere che si osserva nell'oolite, ci trae a ragionevolmente supporre, come quest'epoca segnando il punto culminante della loro vegetazione, le condizioni del globo fossero in allora, più che negli altri periodi, favorevoli al loro svolgimento.

Il celebre Brongniart da più anni avvertiva alle affinità sussistenti fra queste flore, notando tuttavia come fossero rare nell' oolite le felci a nervature reticolate, sì frequenti nel lias, come vi dominassero le otozamiti e le zamiti ossia le cicadeacee, che più sono analoghe alle viventi e diminuisse il numero delle nilsonie e dei pterofilli che più si discostano da quelle della flora attuale, e come alla fin fine le conifere vi fossero più numerose di quello si mostrino nel lias (1).

Queste conclusioni dettate da quel raro talento che sa riunire la precisione nei particolari all' ampiezza delle vedute generali e che traluce in ogni scritto di quell' illustre naturalista, anzichè trovarsi modificate dalle posteriori scoperte ricevettero da esse maggiore conferma e solo osserviamo come, tra le piante rinvenute nelle Alpi venete e che aumentano di 45 specie nuove la flora dell'oolite, si accresca il numero dei pterofilli ed appariscano alcune forme che segnano

(1) Brongniart. *Prodrome d' une histoire des végétaux fossiles*, pag. 196 e 202, e nel *Tableau des genres des végétaux fossiles*. Pag. 102 — 108.

una più precisa separazione fra questa flora e quelle dei terreni a lei più prossimi nell' ordine cronologico delle formazioni.

Però la flora dell' oolite ci presenta un carattere comune con queste nella prevalenza delle piante terrestri, le quali danno sicuro indizio di suolo emerso durante quell' epoca in più punti del globo. E in quali condizioni fossero poste queste terre sorte dal seno del vasto mare che in allora copriva tanta parte della superficie terrestre, ci viene svelato dalla natura stessa della loro vegetazione paragonata a quella parte della flora presente che più vi si avvicina.

Imperciocchè, se prendiamo ad esaminare le stazioni delle piante che attualmente appartengono a quelle classi e famiglie di cui dimostrammo esclusivamente composta la flora dell' oolite, noi vedremo le equisetacee frequenti nelle regioni temperate, mancare nell' emisfero australe, smenomarsi fra i tropici, ma quivi approssimare per la maggiore grandezza a quelle dell' oolite; le felci verdeggiare numerose nelle regioni tropicali bagnate dal mare, ridursi a poche nella flora continentale dei paesi caldi e dei temperati quando privi d' acqua o di sufficiente umidità, minuire ancor più dal Cancro al Polo, aumentarsi ed occupare gran parte del suolo nelle isole poste al di là del Capricorno e darci un criterio per ritenere che durante l' epoca oolitica, della cui flora formano non piccola parte, non esistessero già spaziose terre continentali ma isole poco estese che la presenza di alcune rizocarpee c' indica bagnate da acque dolci.

Le cicadeacee, scarse nelle regioni dell'antico mondo, collocate fra i tropici svolgono rigogliose le pinnate lor frondi in quelle poste vicino all' equatore nel nuovo. Aumentano di numero nell' emisfero orientale al di là del Capricorno e s' intrecciano alle conifere lungo le coste e nelle terre australi della Nuova Olanda e del Capo di Buona Speranza ove gli *Encephalartos* ricordano le zamiti ed i pterofilli dell' oolite come le zamie d' America ricordano quelle specie di otozamiti pelle quali il Brongniart aveva proposto il nome generico di *Sphenozamites* (1).

Le pandanaee rappresentate nell' oolite dalla *Podocarya Bucklandi,* le conifere dai generi *Thuytes, Peuce, Taxites*, dai brachifilli che si approssimano alle araucarie, dalle crittomeriti e dalle palissie analoghe alle *Cryptomerie* del Giappone sebbene in più scarso numero palesano tuttavia anch' esse una vegetazione che rammenta quella delle regioni più temperate del globo e più vicine al mare.

(1) Brongniart. *Tableau des genres des végétaux fossiles*, pag. 61.

Ma il carattere più essenziale e marcato della flora oolitica è specialmente fornito dal gran numero di cicadeacee che in essa dominava. Carattere che stabilisce la sua molta analogia principalmente colla flora che ora si osserva soltanto in alcune regioni dell' emisfero australe, mentre allo invece durante il periodo oolitico le piante di questa classe lasciarono frequenti traccie della loro presenza non solo nelle formazioni giurassiche della Nuova Olanda e della penisola Indiana, ma pur anco in quelle dell' Europa e dell' America settentrionale spingendosi fino al grado 58.^{mo} di latitudine settentrionale.

Da questi fatti e da queste analogie noi saremo indotti a concludere come questa parte del globo fosse a un di presso in que' lontani giorni nelle medesime condizioni di temperie e di suolo che vestono oggidì di una vegetazione quasi eguale le terre australi.

Nè la loro fauna contraddice a questa supposizione, giacchè le mandibole di marsupiali scoperte nell' oolite di Stonesfield, unico e singolare indizio della presenza di mammiferi nell' epoca secondaria, dimostrano come vivessero su quelle terre animali molto affini al *Phascolomys* o *Whombat* della Nuova Galles meridionale ed ai *Thylacinus* e *Phascogalus* della terra di Van Diemen (1).

Viveano con essi rettili giganteschi che oltrepassavano di gran lunga nelle lor dimensioni quelli che ora abitano nelle regioni più calde del globo e guizzavano nel mare circostante colle spente famiglie dei Lepidoidi e dei Picnodonti, gli *Acrodus,* i *Strophodus* e i *Ceratodus,* Cestracionti rappresentati nell'epoca attuale da una sola specie e questa abitatrice dell' oceano che cinge la Nuova Olanda, ove al presente stannosi pure confinate le trigonie e le terebratule che in numero sì strabocchevole deposero le loro spoglie nei sedimenti d'ogni piano dell' oolite.

Non è di questo scritto lo entrare in maggiori confronti tra queste faune, essendomi prefisso parlare solamente di ciò che risguarda il regno vegetale. Basterà quindi raccogliendo le sparse fila del nostro discorso rilevare, come si possa agevolmente dedurre da questi rapidi cenni:

(1) Il Cuvier nel 1818, vide nel museo d' Oxford due porzioni sinistre inferiori di queste mandibole, ed espresse fin d' allora la sua opinione, che potessero avere appartenuto ad un animale analogo ai Didelfi dell' epoca attuale. Buckland nel 1823, e Constant Prevost nel 1625, si occuparono di questi resti, e confermarono colle loro osservazioni il sospetto esternato dal Cuvier. Uno di questi esemplari è fornito di sette molari, un canino, e tre incisivi. Si rinvenner di poi altri quattro esemplari, e tutti questi resti, che formarono subbietto più volte agli studj de' più eminenti naturalisti, trovansi ora bellamente illustrati e figurati nella rinomata opera del prof. Owen, intitolata *British fossil mammalians*, pag. 15 — 70.

1.° Che i resti della flora oolitica, sebbene poco numerosi, si trovano però sparsi sovra gran parte del globo tanto nell' emisfero boreale che nell' australe.

2.° Che il maggior numero di questi resti giace sepolto negli strati dell'oolite inferiore e spetta alla flora terrestre, mentre nell'oolite media son prevalenti quelli delle alghe marine.

3.° Che la flora dell' oolite si collega a quella del Keuper, del lias e dell' argilla di Weald in guisa, da poterle calcolare vissute in circostanze poco tra loro dissimili.

4.° Che paragonata colla vegetazione attuale essa ci si palesa per molti caratteri analoga a quella vivente nelle regioni temperate dell'emisfero australe, e quindi induce a ritenere come in quell' epoca le poche terre emerse fossero circondate al paro delle australi da un vasto oceano che manteneva le condizioni di temperatura e di umidità favorevoli alla vegetazione di quelle famiglie di cui si scorge principalmente composta.

5.° Che le piante scoperte nell' oolite delle Alpi venete aumentano di un quinto il numero delle specie proprie di questa formazione, ed avvalorano queste conclusioni colla presenza di alcune forme nuove che segnano un' analogia ancor più pronunciata colle flore dell' Africa australe e della Nuova Olanda.

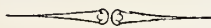
(*Letta il* 16 *marzo* 1856.)

OSSERVAZIONI

INTORNO

AD UNA CONDIZIONATA PARTICOLARITÀ DELLA GRANDINE

DEL

MEMBRO EFF. PROF. B. BIZIO

La meteorologia è sì povera e incerta ne' suoi deducimenti a fronte degli altri rami della scienza fisica, che qualunque fatto, ancorchè non di grande rilievo, dove sia nuovo e bene accertato, non vuol porsi in non cale. Il fatto quindi, di che oggi mi faccio a discorrere, mi si diè innanzi nel marzo, adesso non mi ricordo bene, se dell' anno 1835 o 1836, e consiste nel particolare, ch' entro a descrivere: Gittava uno di que' primissimi, miti temporali, che il volgo chiama *nunzii di primavera,* e il lampo e il tuono si accompagnavano alla caduta di poca grandine, la quale per la specialità sua fermava la mia attenzione. In fatti essa mi venne veduta non nelle specie ordinarie della grandine, ch' è di ghiaccio diafano e lucente, ma sì in forma di pallottoline candide, opache, grosse poco men di una nocciuola ordinaria. Questa novità di apparenze nella grandine mi condusse a raccorne, e farmi ad esaminarla attentamente. Rinvenni per ogn' intorno uno strato nevoso, piuttosto sofice che sodo, il quale struggendosi facilmente al calor della mano mi svelò nel mezzo, non senza mia grande sorpresa, un nucleo di ghiaccio diafano, nella forma precisa di un tetraedro perfetto. A sapere quale sia la compagine consueta della grandine, cioè tutto a rovescio di che in questa mi venne veduto, fui della novità grandemente ammirato, onde faceva disegno di renderla di pubblica conoscenza. Tuttavia occupato, come io era a quel tempo, nella compilazione della mia *Fisica dello*

spettacolo della natura ecc., tanto indugio s' interpose, che tornò vano il mio proponimento, talchè una osservazione al certo non ispregevole stava per giacersi perpetuamente nell' obblivione, dove quando che sia non si fosse data innanzi agli occhi di altro più oculato e zelante estimatore delle manifestazioni spontanee della natura.

Tuttavia, bisogna dire, che la predetta osservazione fosse riservata alla scarsità del mio ingegno, perocchè il giorno sette di questo corrente mese di aprile, cioè a dire venti anni dopo il narrato dianzi, nell' ora di poco oltre il mezzodì, si scurava il cielo con vista sì tenebrosa dar far temere una imminente tempesta. Perciò in mia casa, a guardia delle invetriate, si chiudevano le imposte delle finestre, e solo io, poco temente de' temporali, non consentiva di mettermi al bujo nella stanza in cui era. Tutto l' apparato tempestoso si sciolse brevemente in pochi smorti lampi e in tuoni niente fragorosi, cui seguitava la caduta di poca grandine, che sospinta dal vento giunse a percuotere i vetri della mia stanza. La sonorità di quelle piccole botte valse a richiamarmi, per così dire, la morbidezza sofice di quella grandine, osservata tanti anni addietro, onde mandai incontanente a raccorne, facendo pressa che mi fosse arrecata. Venutami innanzi, eccoti le pallottoline nevose vedute quella volta, e, ciò ch' è il meglio, in tutte per nucleo centrale il piccolo tetraedro di ghiaccio diafano, di che ho parlato dianzi.

Tutti conoscono la struttura della grandine, quando è eruttata dal grembo di furiose tempeste, de' turbini e degli uragani a sperdimento de' sudori e delle speranze agricole. In questa ha costantemente nel centro un nucleo, o granellino opaco, nevoso, vestito per ogn' intorno da ghiaccio diafano più o meno grosso. Il Poulliet nel descriverci la compagine di questa singolare meteora, ricorda che non di rado il ghiaccio cerchiante il bottoncino centrale ci viene veduto a suoli distinti, addossantisi gli uni agli altri, i quali talvolta procedono di modo, che al suolo diafano si addossa uno opaco, e così seguitamente sino all' ingrossarsi più o meno notevole del grano, e termina dicendo: *Questa circostanza merita tutta l' attenzione degli osservatori.* Ora, se questa alternazione degli strati opachi ai diafani può valere a sospingerci innanzi di qualche passo per arrivare forse un dì a veder meglio nel tenebroso mistero della grandine, io credo fermamente che assai più debba giovarci l' osservazione testè arrecata.

Per estimare debitamente il valore di questo fatto, bisogna portare l'attenzione alla mitezza della temperie, a cui si levò il temporale del giorno sette del

detto aprile. Il calore massimo di quel dì fu di $+10°,6$ del R. e la temperatura media dedotta da quattro osservazioni fu di $+7°,85$. Ora convien dire che questo poco di calore, proprio della stagione, non valse ad adunare nell' atmosfera che poca elettricità, sicchè il temporale mancò in tutto di quella gagliardìa di manifestazioni elettriche, onde le bufere s' addensano e dissolvono ne' bollori estivi. Io non intendo qui di farmi a nessuna dichiarazione del fatto, chè troppo trepiderei ad avvilupparmi in argomento sì arduo e malagevole, e sento quindi il debito di lasciarlo al tutto a que' forti e consumati ingegni, che dirizzarono con lunga meditazione ed esercizio i sapienti loro studii in un campo così ampio e a coltivarsi difficile. Mi permetto perciò solo d'invitarli a considerare con seria meditazione lo straordinario rovesciamento di effetti, che incontriamo nella grandine se venuta dall' impeto di una furiosa tempesta, o dalla pacatezza di un languido temporale. In questo caso le prime molecole acquee, che si consolidano, sono accozzate con tal misura di quieto procedimento, che bastano a mettersi in quella ordinata regolare disposizione, che occorre a fornirci un cristallo, il quale tuttavia riesce freddo sì, che, trovandosi in mezzo, o passando attraverso al vapore delle nubi, il costipa in forma nevosa. In contrario, nell' altra grandine le prime molecole sono aggruppate con impeto sì fattamente subitaneo da non esser loro consentito agio a disporsi regolarmente, e quel primo minuto aggruppamento solido è freddo tanto, che il vapore circostante è costipato istantaneamente in forma di diafano e duro ghiaccio che cerchia o fascia quel primo nucleo. Se da queste considerazioni suggerite dalla materiale visibilità de' fatti i sapienti cultori delle cose meteorologiche potranno condursi a qualche utile deducimento intorno a quel temuto fenomeno, io terrò guiderdonata abbastanza l' osservazione mia.

Anzi per aderire a quella rilevanza piaciuta graziosamente consentire da due miei distinti colleghi, chi per un verso e chi per l'altro, a questo mio lavoro, mi bisogna aggiungere: Che la forma osservata nel nucleo centrale di questa mia particolare gragnuola si accosta grandemente a ciò che afferma il Kâmtz nella sua *Prelezione di meteorologia* in queste parole: « I grani della grandine » somigliano sovente a segmenti sferici, triedri, o a piramidi triangolari, la » cui base è formata da un segmento sferico, e perciò il Duclos, il Nöggerath » ed altri osservatori opinavano, che la forma primitiva de' granelli sia quella » di una sfera, la quale s' infranga nella caduta. » Il Kâmtz però segue a mantenere, che la forma primitiva della grandine sia quasi piramidale, perocchè,

dic' egli, *la troviamo assai sovente nel nucleo nevoso cinto di ghiaccio trasparente.*

Io deggio però dichiarare, ch' eziandio senza fermarmi punto alla prefata mia osservazione, non saprei rendermi al partito de' signori Duclos e Nöggerath, i quali ritengono, che *la forma primitiva della grandine sia una sfera, la quale si rompa nella caduta.* In fatti diamo pure che il primo germe della gragnuola, accozzato in aria, sia una minuta sfera. Esso tirato dalla gravità, appena venuto in essere, comincierà la sua caduta con quel momento di moto accelerato, che porta la minuta mole, che scende e successivamente ingrossa a cagione del freddo che di più in più lo fascia e cinge costipando il vapore acqueo attraverso del quale tiene suo cammino. Questo, che avviene di un primo minuto nucleo, avviene di tutti gli altri, e quando parliamo del primo germe della grandine, non possiamo non vederli tutti di un'egual mole; talchè non sappiamo veder ragione, onde accada che nel cammino della scesa si debbano raggiugnere e con tanto di forza ed impeto da battere fra sè e spezzarsi. Questo sbattimento rovinoso potrebbe farsi in opera del vento, o meglio di venti procellosi, che si azzuffassero; il che può avvenire ed avviene; ma questo però non è il caso di tutte le gragnuole; sicchè non sappiamo, nemmeno a questo rifugio, tenerci nell' avviso de' prefati fisici: laonde la sentenza del Kâmtz ci par quella da dover seguire; perocchè essa verrebbe ad accostarsi molto al fatto certo ed ineluttabile, di che qui tenni discorso.

Ora il prelodato Kâmtz afferma, che *i grani della grandine somigliano sovente a segmenti sferici triedri, od a piramidi triangolari, la cui base è formata da un segmento sferico.* Qui non credo, ch' egli si faccia a parlare di tutto intero il grano, perocchè sarebbe stato troppo agevole a fermare da chicchessia la reale forma di questa singolare meteora, nè avremmo più di che discutere a questo proposito. Egli quindi favella al certo del nucleo centrale, od almeno della parte più interna, conciossiachè seguiti dicendo: *che la forma primitiva della gragnuola è quasi piramidale, perocchè tal forma si trova assai sovente nel nucleo nevoso cinto di ghiaccio trasparente.* Dunque è il nucleo nevoso precisamente che, a giudizio del nostro autore, veste tal forma, alla quale aggiustandosi i successivi fasciamenti del ghiaccio, ne tornerebbe una figura ricordante la figura del nucleo; nè io saprei al certo fingermi un pensiero al cui lume divisarmi di qual modo i minutissimi gruppi di diaccio, portanti l' opacità nevosa, bastassero a coordinarsi in forma regolare cristallina,

ch'è solo proprio delle singole molecole, e non de'confusi accozzamenti molecolari.

Dice ancora il Kàmtz, che le sue *piramidi triangolari posano in una base formata da un segmento sferico,* nè io intendo qui di contrappormi menomamente alla giustezza di questa osservazione; pur nondimeno posciachè il caso mio non entri nella cerchia di quelle rare osservazioni, che ci obblighino ad affermare, *sovente avviene*, ma in opposto deggio dire, *sempre avviene*, che il nucleo centrale sia un tetraedro, non posso pretermettere di avvertire alle circostanze, nelle quali ci troviamo necessitati di compiere le nostre osservazioni. Tuttochè a speculare sopra la forma della grandine s' incontri ognora lo sconcio di una troppo elevata temperie, pur nondimeno deggio affermare il caso mio esser uno de' più propizii; giacchè la grandine mentovata mi si diè innanzi ad una temperie di poco oltrepassante i dieci gradi. Tuttavia a snudare il nucleo diafano dal grosso fasciamento nevoso, che il cinge, bisogna adoperare una mano presta, conciossiachè quel poco caldo tende celeremente a struggere il minuto nucleo, e meglio lavora e più prontamente negli spigoli, come parti più assottigliate e quindi più facili a cadere strutte. Perciò, se diamo di avere fermati gli occhi agli spigoli determinanti una faccia, questi prestamente scompajono, e quella faccia, per la scomparita o smussamento degli spigoli, verrà quindi ad assumere una forma convessa, che, ove piaccia prenderla per base, avremo incontanente *la piramide triangolare avente per base un segmento di sfera,* ma questa non sarà opera della natura, sì uno sconciamento uscito dal guasto indotto nel lavoro genuino della natura stessa. Non intendo però qui nemmeno da lungi di suggerire il dubbio, che questo fosse caso incontrato al predetto distinto osservatore; ma posciachè per ben due volte, e sopra un gran numero di esemplari io avessi la mano in opera a cavare il mio tetraedro di mezzo a una pallottola di neve, così reputo di poter sopra altri accennare a quegli accidenti, che possono intervenire od intervengono durante l'osservazione.

Ad accertare la precisa forma de' cristalli dell' acqua, con tutto l' agio bisognevole a divisare altresì ogni particolare più minuto, incontrarono circostanze ben più propizie i signori Hericart de Thury e il dott. Clarke; perocchè il primo verificava le sue osservazioni nella ghiacciaja naturale di Foudeurle nel Delfinato, dove sull' agghiacciato pavimento, e quivi dentro alcune grandi stalatiti di ghiaccio internamente vuote, dieglisi a vedere cristalli limpidissimi di diaccio, il più de' quali gli vennero incontrati prismi esaedri, aventi nella base

superiore o libera alcune strie parallele alle facce laterali. In alcuni di questi prismi al sito degli spigoli intorno alla detta base, si rinvennero delle faccette; altri cristalli poi erano prismi triangolari.

A questa prima osservazione segue l' altra del Clarke professore di mineralogia a Cambridge, al quale incontrò di vedere sotto un ponte di legno presso la città predetta, il ghiaccio cristallizzato in romboidi grossi alcuni un pollice, i quali si erano venuti formando dalla condensazione di una nebbia ivi sollevata dagli sprazzi di una caduta di acqua, mentre la temperie si teneva per qualche frazione di grado sotto il gelo (1); laonde in questi casi non fu pericolo, che il caldo, nè anche per poco, venisse a sconciare cotali rilevanti osservazioni, per cui, quantunque uniche e speciali, si vogliono avere in pregio grandissimo; tuttavia il gentile mio collega, non solo è fermo in credere, ma desidera ch' io esplicitamente dichiari: « che questo terzo esempio circa la cristallizzazione dell' a-
» cqua è più importante degli altri due, perchè avvalorato 1.° da un gran nu-
» mero di esemplari, cioè un numero grande, come il numero dei grani di gran-
» dine; 2.° dalla ripetizione del fenomeno in due tempi diversi » i quali deducimenti, quando non fosse stato per aderire all' altrui cortesia, li avrei lasciati di buon grado al libero talento del leggitore.

(1) Vegg. *Annales de chimie et de physique.* Tom. XXI, pag. 515.

(*Lette il giorno* 23 *giugno* 1856.)

SULLE

PIÙ RECENTI ESPLORAZIONI DELL' AFRICA

E SU LA POSSIBILE ESISTENZA DI POPOLAZIONI BIANCHE

NELLE REGIONI CENTRALI DELLA MEDESIMA

MEMORIA

DEL M. E. AB. PROF. LODOVICO MENIN

La Gran Brettagna, solcando col suo navilio armato od inerme tutti i mari, visitando tutte le rade, entrando in tutti i porti, non sembra aver ancora fatto abbastanza a sfogo dell'inesausto suo traffico. Sono poco per lei tante asiatiche contrade cui ella impone leggi, bisogni e vizii. Poco l'aver reso egualmente profittevoli al suo commercio la tranquillità ed il turbamento dell' Europa, e delle due Americhe. Essa non sa darsi pace, se non si vede schiuso libero e sicuro varco al cuore dell' Africa. Questa smania originò in Londra una società detta *africana,* che non conosce sparmio quando si tratta d'inviare esploratori in quelle contrade. Nè mancarono parecchi che per tale oggetto le si offerissero, quali indotti da larghe promesse, quali dalla speranza di celebrità; ma sebbene questi fossero da natura donati di ferrea robustezza, e d' intrepidità superiore ad ogni cimento, pure soggiacquero od alla micidiale azione del clima od alla ferocia di quelle popolazioni intrattabili. Poco, a dir vero, n' avvantaggiò il commercio; non poco la storia naturale; molto la geografia. Conciossiachè Hornemann nel 1798 penetrando nella quasi obbliata regione de' Garamanti, il Fezzan d' oggidì, ne descrivesse i deserti, le terre ridotte a coltivazione, le vicende

del clima, i costumi degli abitatori ed i monumenti superstiti testimonii d'una defonta civiltà. Dobbiamo a Mungo Park le cognizioni relative ai Joloffi, ai Mandinghi, al Ludamar, al vasto regno di Bambarra, ad altre terre ed altre nazioni di cui ignoravamo non che le stranie consuetudini, i medesimi nomi. Browne ci rivelò il Darfur; Oudnei, Denham, Clapperton nell'anno 1822 ricalcarono nel Fezzan le traccie dell'Hornemann. Nel seguente inoltrarono nel Sudan mal cognito agli antichi sotto il nome d'Etiopia interiore, scopersero il lago Tsad, al quale Clapperton non diede minore lunghezza di 80 leghe, nè larghezza minore di 50. Lo stesso Clapperton soggiornò nella città di Kasso denominandola enfaticamente la Londra del Sudan, perlustrò le contrade adiacenti al lago, visitò i regni di Haussa e di Bornu, e sebbene perisse quando nel ritorno toccava quasi la costa africana, pure il servo di lui Riccardo Landen ne raccolse i preziosi manoscritti, ed aggiuntevi le proprie osservazioni ne fece dono all'impaziente curiosità dell'Europa. Ma ciò che stava più a cuore della società inglese era Timbuctu fra quante città il continente africano racchiude la più ricca, la più commerciante, la più popolosa. Il semplice tentativo di giungervi costò la vita a Mungo Park, al maggiore Hougton, al Belzoni, forse allo stesso maggiore Laing, sebbene affermino alcuni ch'egli v'entrò, e vi s'intrattenne. Il francese René Caillié fu degli altri più fortunato, se pure fortuna può dirsi l'essere spogliato, maltrattato, imprigionato, e l'aver salva quasi per miracolo la vita. In tanta miseria René Caillié non potè raccorre che scarse ed imperfettissime notizie; tuttavia era forza andarne paghi; chè non n'avevamo migliori. L'Inghilterra però non se ne mostrava contenta, e di fermo nol poteva. Quindi avvenne che il ministero Palmerston, nel 1847, decretasse una nuova spedizione all'Africa centrale. L'oggetto della medesima, dichiarato sinceramente mercantile, s'invernicò di un poco di scientifico, e la direzione ne fu affidata a James Richardson, già pratico dei pellegrinaggi africani, ond'aveva di recente pubblicato un'opera in due volumi col titolo *Richardson travels in the great Desert of Sahara,* 1845 1846; *including a description of oases and Cities Gadames, Gath and Murzuk.* Non era il Richardson molto avanti nella parte scientifica, quindi gli si diede a compagno un certo Owerveg, giovane prussiano di svegliato ingegno, intelligente geologo ed abile disegnatore. Enrico Barth d'Amburgo appassionato per le rischievoli imprese s'aggiunse volontario alla spedizione.

Questi coraggiosi dilungaronsi d'Europa l'anno 1849. Dovevano trovarsi

uniti a Tripoli, di là avviarsi pel deserto di Sahara al lago Tsad, visitare i paesi che il cerchiano, e tener conto quotidianamente di quanto scoprissero e di quanto giudicassero profittevole alla istruzione de' loro commettenti. I due alemanni vinsero in sollecitudine l'inglese, e per non infingardire a Tripoli perlustrarono la catena dei monti Gharian che levansi in faccia a chiunque da Tripoli s'accinge a penetrare nel Fezzan. Restituitisi a Tripoli ebbero la soddisfazione d'incontrarsi con Richardson ch'aveva già approntato quanto a lungo e difficile viaggio poteva riputarsi occorrente, perlochè risolsero la partenza per l'8 di marzo 1850.

Non fu senza penosi stenti e crudeli privazioni, che i nostri viaggiatori, lasciatasi a tergo la provincia di Tripoli, inoltrarono nel Fezzan, e ne raggiunsero la capitale Murzuk, dove, mercè la cordiale accoglienza del console inglese e le rispettose dimostrazioni delle turche autorità, si riebbero d'ogni disagio. Fattisi allora più che mai ardimentosi sfidarono le sabbie del Sahara, sebbene fosse cocente la stagione ed infestato il deserto da torme numerose di ladroni Tuareghi. Non le minaccie e gli assalti di costoro, non le arene roventi o il cielo di fuoco deviaronli dalla città d'Agadez situata nel cuore del Sahara. Leggiamo nel giornale di Barth, che le dimostrazioni del popolo e de' magistrati non potevano da lui desiderarsi più amichevoli, e che il capo della nazione volonteroso accondiscese a firmare seco lui un trattato d'alleanza colla regina Vittoria, fatto che mi sa di millanteria essendo presente Richardson condottiero della spedizione, ed unico rappresentante della Inghilterra.

Che che di ciò vogliasi pensare poco rileva. L'importante si è che i nostri viaggiatori trattisi incolumi da quelle spaventose solitudini calarono nel Sudan ch'è il paese dei negri. Qui partitesi le provincie, ciascuno imprese la sua particolare esplorazione. Ma non andò guari che Richardson estenuato dalle fatiche, consumato dall'influenza di un cielo nemico, soggiacque. Owerveg non tardò a seguirlo. Barth rimasto solo, lungi dal cedere alla desolazione cagionatagli dalla doppia perdita, e dal proprio isolamento, proseguì con lena infaticabile le incominciate perlustrazioni; s'assunse le parti del Richardson e dell'Owerveg, e quando gli parve aver soddisfatto, anzi vinto le speranze del Ministero che l'avea inviato, dell'Inghilterra, dell'Europa, dovrei dire del Mondo, indirizzossi alla regina dell'Africa, alla grande Timbuctu. V'entrò sotto mentito aspetto fingendosi inviato dalla sublime Porta, onde la pubblica riverenza ed il gaudio ne rese solenne l'ingresso; ma poco stante, ossia che trapelasse

l' inganno, o l' odio dei negri contro il bianco per un istante represso prorompesse poscia più forte, Barth fu tenuto in conto di ribaldo esploratore, se non peggio. Insultato dalla plebaglia, avuto in orrore dai grandi, famelico, cencioso e per soprasello logorato da lenta febbre, languì sette mesi in quella città che aveva sospirato di contemplare, come in durissimo carcere espiando, quasi delitto, la sua magnanima annegazione.

Troppo disprezzato per essere ben custodito, Barth giunse a sottrarsi da quel quotidiano supplizio, e poco o nulla più avventuroso di René Caillé ripigliò la strada del lago Tsad, rivide le città e i regni che niun altro aveva penetrato prima di lui, diede un addio all' Africa, ed alzando il sospiro della riconoscenza alla divinità che preservato l' avea in mezzo a pericoli infiniti, riposò a Marsiglia sul suolo europeo il giorno 8 settembre dell' anno 1855.

Ora riferirò i risultamenti importantissimi di questa memorabile spedizione.

1.° Barth ed Owerveg riconobbero non essere altro la supposta catena del Gharian che il declivio d' un altipiano elevantesi a 1500 piedi, e protendentesi nel territorio di Tripoli, ed in tutto quanto è lungo il Fezzan sino ai confini del Sudan. Gli avallamenti di questo altipiano verdeggiano per belle foreste, e la terra ferace vi compensa generosamente le fatiche dell' industrioso agricoltore. Quest' altipiano è seminato di sepolcri, d' edicole, e d' altre edificazioni romane. Vi s' incontrano altresì rovine di qualche castello bisantino, o di qualche chiesa cristiana, i cui freschi e musaici non ancora perirono del tutto.

2.° I Tuareghi ch' errano pel deserto sono il flagello de' popoli circostanti, conciossiachè sogliano vivere di rapina. Nondimeno frequentano i mercati di Agadez, del Fezzan, del Sudan. Ma le altre popolazioni visitate dai nostri viaggiatori non provano ribrezzo del color bianco, anzi desiderano vivamente d' entrare in relazioni amichevoli cogli europei.

3.° Le popolazioni collocate in prossimità del lago Tsad, non che le loro contermine, esercitano all' ombra paterna di moderati governi le arti indispensabili a vita immune da privazioni, e soprattutto l'agricoltura. Prospera la popolazione in istato di crescente aumentazione. Il solo regno di Bornu conta da circa dieci milioni di abitatori, ed in quello di Musgo a mezzogiorno del lago, l' occhio spazia sopra molte e molte leghe di terreni coltivati, gremiti di capanne, semplice e patriarcale albergo delle famiglie che li fecondano coi loro sudori. L' amore della letteratura non è straniero a questi popoli. Il Cheik di Bornu

regalò a Barth un libro intitolato *Edris Aloama,* ricco, per ciò che si afferma, d' importantissime istruzioni sulla geografia dell' Africa centrale. L' Emiro di Sokota ebbe a padre certo Bello, solito dividere i giorni tra la guerra e lo studio. Egli lasciò morendo opere numerose, delle quali Barth trascrisse un qualche brano.

4.° Il lago Tsad cui Clapperton diede una lunghezza di ottanta leghe sopra cinquanta di larghezza, non ha limiti determinati. Nella stagione estiva, si stringe così che desideri l' acqua in quasi tutto il bacino. Nella stagione delle pioggie le sue acque s'alzano, traboccano, inondano per immenso tratto le adiacenti pianure.

5.° Il fiume Kvvora, che per lo passato addomandavasi Niger e dove si versa nell' Atlantico il Dijaliba, viene ingrossato superiormente da due grandi fiumi navigabili il Faro e la Binua, i quali solcato con lunghi meandri l'ampio regno d' Adamora mettono nel Kvvora a 9 gradi e dieci minuti di latitudine boreale.

Ecco pertanto l' Africa molto più incivilita che le uccisioni ed i racconti dei precedenti viaggiatori non ci permettevano supporre. Ecco le popolazioni africane vogliose di affratellarsi colle europee, stringendo i legami di fruttuoso commercio che farà di fermo cessare quello obbrobrioso cui finora la vigilanza e la forza europea non giunsero ad abolire. Ecco fiumi di prolungatissimo corso confondere assieme le acque per agevolare l' ingresso nelle più riposte contrade d' una parte di mondo riputata inaccessibile. L' invito è seducente, nè l' Inghilterra tarda a seguirlo. Già il ministero Palmerston arroventò le caldaie della Plejade, e questa, solcato l'Atlantico, risale il Kvvora, entra nella Binua, sosta nel regno d' Hamaruva, tratta famigliarmente cogl'indigeni, dei quali verifica essere altrettanto pacifiche le intenzioni quanto mansueti i costumi. L' Europa n' attende le rivelazioni con impaziente curiosità. Frattanto il campo è tuttora aperto alle conghietture ed io approfitto del momento per esporre le mie, stringendomi alla cerchia di quegli studii che per tanti anni fui destinato a professare.

Le relazioni del viaggio di Richardson, Ovverveg, Barth, pubblicate a Londra tosto che vi pervenivano i giornali di que' viaggiatori, non contengono ancora indizii delle investigazioni per cui è dato approfondire le condizioni essenziali delle nazioni. Per maniera d' esempio, fanno menzione delle opere scritte dai dotti del Sudan, ma non entrano in minute ricerche sulla loro lingua,

anzi sembrano supporre che non ignoriamo qual sia; non s'occupano a chiarire l'indole della loro letteratura, non toccano delle religioni, delle pubbliche e private cerimonie, delle superstizioni, delle tradizioni e d'altre simili traccie superstiti ed incancellabili dell'antico stato d'un popolo travolto e mutato dal torrente delle rivoluzioni. Colla guida di sì fatti indizii, non sarebbe malagevole stabilire quali relazioni abbiano un giorno legato insieme bianchi e negri, e se l'affezione attualmente dimostrata non sia forse una ricordanza dell' antica famigliarità. In mancanza di ciò, io fonderò le mie conghietture su d'altri argomenti quali verràmigli somministrando la storia.

L'Africa settentrionale, teatro per secoli di luttuosi rivolgimenti, dovette necessariamente trasmetterne alle parti più interne l'urto e le conseguenze. Il più antico che giungesse a nostra cognizione fu quello che spianò la dominatrice dei mari, la regina del continente africano, la superba Cartagine. La possanza di quella metropoli non si limitava alle grandi sue munizioni ed all'estesissimo commercio. N'era vasto il territorio e nell' interna regione per considerevole spazio disteso. A questo territorio alludeva il console romano Censorino quando consigliava gl'inviati Cartaginesi a portarsi in pace la distruzione della loro città. *Ritiratevi* diceva loro *nella vostra Africa lungi dal mare. Ivi ai vostri numi, a voi stessi fondate sedi novelle. Vivrete più felici lungi dallo strepito delle armi, scevri dagli stimoli d'impotente ambizione.* Nè dal solo commercio, ma ben anche dall'agricoltura Cartagine derivava la propria opulenza. Personaggi ragguardevolissimi dedicarono a quest'arte studii profondi, siccome Magone che della coltivazione lasciò ventotto volumi, avuti in tanta stima dai Romani che della ricca biblioteca cartaginese donata a Massinissa quegl'uni riserbarono per sè e voltati li vollero nella lingua del Lazio. L'importanza dell'agricoltura induceva i Cartaginesi a non impoverire mai di braccia la campagna, qual che ne fosse altrove il bisogno. Furiando la guerra stipendiavano la cavalleria leggera de' Numidi, i fanti della Mauritania e, ad imitazione di qualche potenza moderna, raccozzavano legioni straniere, arruolando nelle Spagne, nella Gallia meridionale, nell'Epiro, nella Grecia in ogni luogo ove s'avvenivano in carne disperata e venale.

Ora chi potrà mai credere che un tanto popolo, in sì gran parte inetto alle armi, disseminato in vasta ed ubertosa provincia abbia preferito seppellirsi sotto le rovine della capitale? Gli storici romani, con quella ampollosità che sempre occorre nelle antiche relazioni, descrissero stragi incredibili, pure non

osarono annunziare sterminata la nazione. Per lo contrario Appiano, sulla fede di Polibio testimonio oculare, narra che occupata dai Romani la città, minacciata strettamente la cittadella, ventimila femmine e trentamille maschi, rinfusamente gettaronsi ai piedi di Scipione Emiliano implorando la vita che fu loro donata da un vincitore abbastanza generoso per volere iscortata da' suoi legionarii quella moltitudine sì che uscisse indenne dalle mura cadute in balia di sfrenata soldatesca.

La nazione dunque sopravisse alla capitale; e poichè l' Emiliano incendiatala non lasciò bireme nel porto, non palischermo alla rada, impedita dalla fuga per la via di mare, ristituissi alle terre native, ove se passata grandezza e perduta indipendenza potesse dagli uomini agevolmente dimenticarsi, tradotti avrebbe giorni tranquilli ed avventurosi.

Ma i Padri coscritti, dichiarata l' Africa provincia romana, scorgendosi agitati dai tumulti Gracchiani, deliberando di alleggerire di faziosi la città, decretarono la riedificazione di Cartagine e l' invio d' una colonia a popolarla. Fu allora che la soperchianza romana tramutatasi in Africa, il territorio cartaginese invadendo e a mano a mano inoltrando usurpatrice nel Fezzan v' innalzò le numerose costruzioni già prima vedute da Hornemann e Clapperton e recentemente dalla spedizione Palmerston ed affidando come soleva a suoi schiavi il lavoro delle terre, premette e rincacciò ai confini del Sudan i miseri Cartaginesi, i quali vessati da una oppressione la quale, per fuggire ch' essi facessero, li raggiungeva, dovettero rimpiattarsi dove la natura stessa dei luoghi inospiti e selvaggi fosse vallo e barriera all' invasione.

Io poi non so persuadermi di ciò che potrebbe taluno immaginare essere essi di concordia periti da poi siccome stremati dagli stenti, dalle privazioni e dal clima. Perciocchè l'esilio vigoreggia la socievolezza e l'amor di nazione, la comunità della sventura rende più sollecito e pronto il fratellevole soccorso, e l' umana specie balestrata dalla nemica fortuna tanto più ingegnosa ed attiva diventa per la propria conservazione, quant' è più derelitta. Nutro quindi speranza non sia lontano il momento in cui i nostri s' abbatteranno nelle reliquie di quella grande nazione che per tanti anni contese per l' impero del mondo, e forse allora brillerà il raggio che ci dia meglio a conoscere un popolo presentatoci finora da' suoi nemici sotto l' aspetto il più sinistro, non che i Tirii e i Fenicii intorno ai quali le pagine vetuste mostraronsi di precise notizie sì avare.

Altro disastro ancora più funesto per l' Africa settentrionale fu la discesa

dei Vandali comandati dal feroce Genserico. Caduta la romana repubblica, succeduto l' impero non è quasi credibile a qual grado di prosperità quella provincia salisse. Vi formicolava la popolazione, le città sorgevano quasi a vista l' una dell' altra. Tanta sui feraci campi biondeggiava copia di messi che, senza impoverire gl' indigeni, ne ritraeva abbondanza la popolosa Italia, non più sfamata dai troppo angusti granai della Sicilia e della Sardegna. La religione cristiana vi aveva introdotti e resi generali i santi principii dell' onesto e del giusto, la tolleranza della fatica, il sentimento di concordia, la riverenza alle leggi. I subugli de' Donatisti amplificati nei libri dei Padri poco toccavano il popolo che poco ne intendeva i motivi, e quegli stessi subugli fuor di dubbio contribuirono a mantener desti gl' ingegni e solidare la fede dei veri credenti. Quindi i numerosi vescovi africani non meno illustri per esimia pietà che per profonda dottrina. Il dottissimo Morcelli nell'acclamata sua opera *Africa christiana*, segnatine i confini, noverò settecento e quindici sedi vescovili ed argomenta non averle noverate tutte.

Si desuma da tanti episcopati la popolazione. I Vandali di Genserico ed egli stesso professavano la religione cristiana, ma quale Ulfilas, l' apostolo di tutti i barbari, l' aveva insegnata cioè infetta di arianesimo. Non penso che quelle genti rapaci fossero colte dal ticchio di teologizzare o di convertire, ma prendevano la dissidenza religiosa a pretesto dei saccheggi e delle spogliature nelle quali mostravansi infaticabili e senza pietà. Il mare sulle prime aperto sovvenne alle emigrazioni; ma non andò guari che i Vandali signori di tanta costa dieronsi a corseggiare tenendo i porti, e le spiaggie custodendo come assediate. Per la qual cosa riputavansi fortunati coloro che sottrarsi potevano rifuggendo all' interno. Di tali fughe fa cenno il Morcelli favellando dei vescovi dannati a lavorare colle loro mani la terra: *Sedem in pacatis regionibus stabilem quaesiverunt sub Genserico et Trasamundo* (1), ed altrove: *Inter haec tamen multi fuga arrepta sibi consuluere, quos deserta loca receperunt* (2).

Possidio, il quale può dirsi aver chiuso gli occhi in Ippona al santo vescovo Agostino, ripetè i gemiti del moribondo, il quale negli ultimi istanti dolevasi che i figli della sua Sionne dovessero porre in salvo la vita *in ipsas montium sylvas et cavernas petrarum et speluncas confugientes* (3). Io dunque deduco

(1) *Africa christiana.* Tom. III, pag. 215.
(2) *Africa christiana.* Tom. III, pag. 127.
(3) *Africa christiana.* Tom. III, pag. 128.

che non v' era allora africano che osasse affidare la propria fuga al mare, deduco che i fedeli salvandosi nei monti, nelle selve, nelle caverne ritiraronsi nel Fezzan ove ai dogmi perseguitati aprirono i santuarii veduti dall' Owerveg. Belisario prostrò il regno dei Vandali e l' ultimo loro re Gelimero tradusse in catene a Costantinopoli. L' Africa passò agl' imperatori bisantini e fu appunto allora che sursero le castella dal medesimo Owerveg osservate.

Che i Vandali lasciassero l' Africa diradata d' abitatori non è necessario dimostrarlo dopo ciò che si è detto. Chi mai vorrà credere passati tutti i mancanti pel filo delle spade ariane? Sarebbe carnificina incredibile di un popolo alla cui evasione non s' intraversavano insuperabili ostacoli. Sarebbe una strage di cui resterebbe dolorosa ed onorata memoria nei fasti della chiesa ortodossa. Il martirologio africano conta qualche migliaio di vittime comprese quelle delle persecuzioni imperiali, ma tali vittime immolate in quattro secoli possono forse calcolarsi nello sperpero di molti milioni? Chi mai oserà affermare che gli Africani, durante la persecuzione dei Vandali, navigarono ad altre coste, se non può additarceli a prova; perciocchè si riconoscerebbero anche oggidì!

Se dunque gli abitanti dell' Africa settentrionale non furono tutti esterminati, se non s' incontrarono rifuggiti su questa o quella costa del Mediterraneo, non può spiegarsi il fenomeno della loro sparizione altrimenti che supponendoli ritirati nelle provincie interne.

L' Africa sottomessa agl' imperatori bizantini non vide splendere giorni più fausti attanagliata dalla sordida avidità dei governatori imperiali e poco stante costretta a soccombere sotto le armi e l' intolleranza degli Arabi. Quella emigrazione che aveva avuto principio alcuni secoli prima, allora si compì verso il cuore dell' Africa. Se gli Arabi per la semplice smania di torre e padroneggiare, e più tardi i Turchi non paventarono le solitudini del gran deserto, penetrarono a Timbuctu, inoltrarono mercanteggiando nel Sudan, potremo noi riputare inverisimile che ivi s' addentrassero Cartaginesi e Cristiani incalzati da ineluttabile necessità?

Affidato a queste ragioni io stabilii siccome verisimile la esistenza di popolazioni bianche in mezzo alle negre, non intesi però ch'esporre una conghiettura. Noi frattanto congratuliamoci che tutto arride al nostro secolo. Il ridicolo orgoglio di Serse fece inutilmente incatenare l' augusto Ellesponto. Le catene che noi gettiamo nel mare strettamente collegano disgiuntissimi continenti, e ci mostrano compiutamente verificata l'esclamazione del Venosino: *Nequidquam*

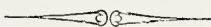
Deus abscidit . . . Oceano dissociabili terras. La sola Africa centrale circonvallata da deserti, chiusa in un cerchio di fuoco, ricusava i suoi abitanti al consorzio dell' umana famiglia. Il nostro secolo spezzò l' ardente anello, superò il deserto, stese al negro fratellevole amplesso, e verrà tra poco, speriamo, il giorno in cui il mercadante della trasformata Algeria e l' ardito navigatore della Brettagna incontrandosi sulla Binua laveranno ivi a gara l' infamia dell' inumano commercio e quella finora vilipesa materia di traffico innalzeranno in compenso alla Fede del fraterno amore, al nobile esercizio della ragione, ai beni della verace civiltà.

(*Letta il* 17 *agosto* 1856).

SULLA

RISOLUZIONE NUMERICA DELLE EQUAZIONI

MEMORIA

DEL M. E. PROF. GIUSTO BELLAVITIS

1. Principale tra gli oggetti dell' algebra inferiore si è la determinazione di quei valori numerici che soddisfanno ad una o più equazioni date; di ciò mi occupai in due Memorie, che ebbero l' onore d' esser comprese tra quelle di questo i. r. Istituto (vol. III, 1846 e vol. IV, 1852), nonchè in una nota inserita negli Atti per la sessione dell' aprile 1852. Furono tratto tratto proposti parecchi metodi per la risoluzione delle equazioni anche soltanto algebriche, i quali però sono bene spesso piuttosto soddisfacenti in astratto che utili nell' effettiva calcolazione; sicchè credo utile di ritornare su questo argomento ed esporre con sufficienti particolari le vie che mi sembrano più comode e sicure per giungere alla determinazione delle radici delle equazioni.

2. Il soggetto naturalmente si divide nelle seguenti parti: Determinazione numerica — delle radici reali di un'equazione trascendente o, se algebrica, di grado così elevato che non giovi trattarla come le equazioni algebriche, — delle radici immaginarie di un'equazione, — delle radici reali di più equazioni simultanee,— delle radici immaginarie di più equazioni simultanee. — Per l' ultima parte nulla io avrò a dire, poichè se coll' eliminazione non si riconduca la questione ad una sola equazione, io credo che la ricerca sia tanto laboriosa da non potersene occupare, e da lasciare all' ingegno del calcolatore la scelta delle strade da tentarsi nei singoli casi speciali.

3. In quanto alle radici reali delle equazioni di grado anche molto elevato contenenti tutti o quasi tutti i termini, la loro determinazione dee a mio cre-

dere considerarsi come un' operazione aritmetica (analoga alla divisione od all' estrazione delle radici), che eseguita col processo Budan-Horner e sussidiata dal teorema del Fourier non lascia sperare alcun miglioramento; poichè a me sembrano inutili quei metodi che possono tornar comodi soltanto in casi particolari, o quelle riduzioni ad equazioni di 1.° o di 2.° grado, a cui la questione naturalmente si riduce quando si segue la via diritta e generale per tutti i casi.

4. Tre cose si richieggono nella ricerca delle radici, cioè, il processo più acconcio per approssimarsi indefinitamente al loro valore numerico, la scelta di quegli intervalli, nei quali si può ritenere che vi sia qualche radice, e alcuni criterii che, assicurandoci della mancanza di radici, pongano un limite agli inutili tentativi di cercare radici che non esistono, e d' altra parte non ci traggano mai in errore facendoci credere privo di radici un intervallo che realmente ne contenesse. Gioverà dare da prima uno sguardo alle varie strade che possono guidare allo scopo; poscia cogli esempi e con particolari considerazioni si acquisterà facilità di percorrerla.

Radici reali di una sola equazione.

5. La sostituzione di parecchi valori in luogo dell' incognita e la determinazione degli errori corrispondenti, cioè dei valori che prende quel membro dell' equazione che dovrebbe uguagliarsi a zero, gioverà molto a conoscere l'andamento della funzione, e gl' intervalli, nei quali sono da ricercarsi le radici.

6. Allo scopo predetto tornerà spesso acconcia la costruzione grafica della corrispondenza tra i valori dell' incognita e gli errori; nel che talvolta sarà preferibile di separare l'equazione proposta in due membri, i cui valori daranno le ordinate di due curve aventi per ascisse i valori dell' incognita; le intersezioni delle due curve indicheranno altrettante radici. Una stessa equazione potrà dar occasione a più figure relative a differenti intervalli costrutte in iscale differenti, secondo che l'andamento delle curve presenta maggiori o minori difficoltà e dubbii intorno alle cercate intersezioni.

7. Per non estendere le sostituzioni troppo da lungi e nulladimeno conoscer bene ciò che si riferisce a valori grandissimi dell' incognita, si potrà dopo avere studiato l' intervallo da $x = a - b$ ad $x = a + b$ prendere per nuova incognita la $b:(x - a) = \xi$ e studiare l' intervallo da $\xi = -1$ a $\xi = 1$.

8. Quando si abbia scorta una radice, che sensibilmente si scosti dalle

altre, in guisa di conoscere un valore dell' incognita, che si avvicini a quella radice molto più che alle altre, potrà molto comodamente usarsi l' *approssimazione lineare mediante la tangente*, ossia il metodo del Newton; e ciò non determinando separatamente i valori della funzione e della sua derivata, bensì nello stesso tempo che si calcola il valore della funzione, tenendo conto della variazione, che esso soffrirebbe per un cangiamento mediocremente piccolo dell' incognita. Questo processo fu trovato molto opportuno dal celebre Gauss nella sua Memoria pubblicata nel vol. IV, di quelle dell' accademia di Gottinga (1848-1850), ed io pure lo aveva suggerito nella Nota IV, della succitata Memoria del 1846.

9. In questo processo riesce molto comodo l' uso delle tavole numeriche, che presentano le differenze corrispondenti ad una data variazione dell' *argomento*. Se l' equazione sia composta di tre termini o poco più, gioverà, a calcolare il logaritmo della somma di due termini, l'uso dei logaritmi *additivi* immaginati da prima dal Leonelli, e conosciuti sotto il nome del Gauss; come si vede in ambedue le Memorie citate nel § precedente.

10. Per rendere più utile l' *approssimazione lineare* giova apparecchiare la funzione, e scegliere l' incognita, in guisa che il termine da cui dipende la maggior variazione della funzione sia all' incirca proporzionale all' incognita.

11. Che se alquante radici sieno vicine, sicchè coll'approssimazione lineare vi sarebbe poca probabilità di separarle, bisognerà ricorrere ad un' *equazione ausiliaria* algebrica di grado elevato almeno tanto quanto è il numero delle radici che si sospetta esistere nell' intervallo considerato. A tal fine si attribuiranno all' incognita successivamente tanti valori quanto è il grado dell' equazione ausiliaria accresciuto dell' unità, e con uno dei metodi d' interpolazione si formerà la funzione algebrico-intera, che per tutti quei valori si accorda colla funzione proposta.

12. Quando i valori attribuiti all' incognita formano una progressione aritmetica, il metodo più comodo mi sembra quello fondato sul calcolo delle successive differenze dei valori che prende la funzione, e da me adoperato nella Nota IV della succitata Memoria (1846). Seguendo l' Enke esso può alcun poco semplificarsi nel modo seguente. I termini successivi della progressione aritmetica dei valori attribuiti all' incognita si distinguano coi numeri ... -2, -1, 0, 1, 2, ... ; i valori corrispondenti della funzione sieno ... A_{-1}, A_{-2}, A, A_2, A_1 ...., si calcoli la seguente tavoletta delle loro differenze

$$
\begin{array}{r|lllll}
-2 & A_{-4} & & & & \\
 & & B_{-3} & & & \\
-1 & A_{-2} & & C_{-2} & & \\
 & & B_{-1} & & D_{-1} & \\
0 & A & & C & & E \\
 & & B_{1} & & D_{1} & \\
1 & A_{2} & & C_{2} & & \\
 & & B_{3} & & & \\
2 & A_{4} & & & &
\end{array}
$$

dove $B_{-3} = A_{-2} - A_{-4}$, $B_{-1} = A - A_{-2}$, $B_{1} = A_{2} - A$, $B_{3} = A_{4} - A_{2}$ $C_{-2} = B_{-1} - B_{-3}$ ecc. Sia B_{0} la media aritmetica tra le due differenze prime B_{-1} B_{1} che nella tavoletta stanno una sopra e l' altra sotto di A; C sia la seconda differenza che sta nella stessa riga orizzontale di A; D_{0} sia la media aritmetica tra le due differenze terze D_{-1} D_{1}, che stanno una sopra e l' altra sotto della stessa riga orizzontale, e così in seguito.

La funzione sarà espressa dalla seguente formula d' interpolazione

$$
\begin{aligned}
y = A + t\Big(B_{0} - \tfrac{1}{6} D_{0} + \tfrac{1}{30} F_{0} - \tfrac{1}{140} H_{0} + \text{ec.}\Big) \\
+ t^{2}\Big(\tfrac{1}{2} C - \tfrac{1}{24} E + \tfrac{1}{180} G - \tfrac{1}{1120} I + \text{ec.}\Big) + t^{3}\Big(\tfrac{1}{6} D_{0} - \tfrac{1}{24} F_{0} \\
+ \tfrac{7}{720} H_{0} - \text{ec.}\Big) + t^{4}\Big(\tfrac{1}{24} E - \tfrac{1}{144} G + \tfrac{7}{5760} I + \text{ec.}\Big) \\
+ t^{5}\Big(\tfrac{1}{120} F_{0} - \tfrac{1}{360} H_{0} + \text{ec.}\Big) + t^{6}\Big(\tfrac{1}{720} G - \tfrac{1}{2880} I + \text{ec.}\Big) \\
+ t^{7}\Big(\tfrac{1}{5040} H_{0} - \text{ec.}\Big) + t^{8}\Big(\tfrac{1}{40320} I - \text{ec.}\Big) + \text{ec.}
\end{aligned}
$$

Perciò se la funzione debba uguagliarsi a zero si avrà un'equazione, dalla quale dedurremo tutti i valori di t, che stanno nell' intervallo, pel quale si sono calcolati i valori della funzione. Trovato il valore di t, se ne deduce subito quello dell' incognita.

13. Mostriamo come si possa profittare di qualche valore fuori di quelli corrispondenti ai valori dell' incognita che sono in progressione aritmetica. Supponiamo che si sieno calcolati A_{-4} A A_{4}, e poscia anche A_{2} (a ciò indotti dal vedere che il valore desiderato cadeva tra A ed A_{4}): senza calcolare A_{-2}, che compirebbe la progressione aritmetica, si potrà col mezzo delle differenze B_{1}, B_{3}, C_{3}, e supponendo costante la terza differenza D, dedurne

i valori di C_{-2}, C, B_{-3}, B_{-1} ed A_{-2}. Ciò potrà conseguirsi supponendo che i valori A A_2 A_4 corrispondano a $t = -1, 0, 1$; dopo di che la formola del § precedente, posto $t = -3$, darà (segnando con B_2 la media aritmetica tra le differenze B_1 B_3)

$$A_{-4} = A_2 - 3\left(B_2 - \frac{1}{6}D\right) + \frac{9}{2}C_2 - \frac{27}{6}D = A_2 - 3B_2 + \frac{9}{2}C_2 - 4D,$$

dalla quale si dedurrà il valore di D.

14. Che se i valori dell' incognita procedano ancora più irregolarmente, si esprimerà la y in funzione intera della x operando nel seguente modo. Sieno x_1 x_2 x_3 ... i valori della x, pei quali si conoscono i corrispondenti y_1 y_2 y_3 ...; si formi la funzione intera $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ ..., la quale mediante il solito calcolo (che serve per la risoluzione delle equazioni) si divide per $x - x_1$ e dicasi X_1 il quoziente. Mediante il medesimo calcolo si determini il valore a_1 del polinomio X_1 quando in esso si fa $x = x_1$. La y sarà espressa approssimatamente dalla somma di tutti i polinomii analoghi a $\frac{y_1}{a_1}X_1$. Infatti ponendo $x = x_1$ spariscono tutti i termini $\frac{y_2}{a_2}X_2$, ec. (perchè tutti comprendono il fattore $x - x_1$), ed il termine $\frac{y_1}{a_1}X_1$ si riduce ad y_1.

15. Il precedente processo consiste come è palese nel calcolo della formola

$$y = \frac{(x-x_2)(x-x_3)\ldots}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots}y_1 + \frac{(x-x_1)(x-x_3)\ldots}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots}y_2$$
$$+ \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)\ldots}y_3 + \text{ec.}$$

i moltiplicatori di y_1 possono porsi sotto le due forme

$$\frac{x-x_2}{x_1-x_2} = 1 + \frac{x-x_1}{x_1-x_2}, \quad \frac{x-x_3}{x_1-x_3} = 1 + \frac{x-x_1}{x_1-x_3}, \text{ ecc.}$$

sicchè il coefficiente di y_1 si sviluppa nella serie

$$1 + \frac{x-x_1}{x_1-x_2} + \frac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_1}{x_1-x_3} + \frac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{x-x_3}{x_1-x_3}\cdot\frac{x-x_1}{x_1-x_4} + \text{ec.}$$

$$= 1 + \frac{x-x_1}{x_1-x_2}\left\{1 + \frac{x-x_2}{x_1-x_3}\left[1 + \frac{x-x_3}{x_1-x_4}(1 + \text{ec.})\right]\right\}.$$

Simili sviluppi si eseguiscono sui moltiplicatori di

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2,\quad \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3,\ \text{ecc.}$$

e si vedrà che la formola d'interpolazione prende la forma

$$y=y_1+(x-x_1)\left\{y_{12}+(x-x_2)\left[y_{123}+(x-x_3)(y_{1234}+\text{ec.})\right]\right\}$$

essendo

$$y_{12}=\frac{y_1}{x_1-x_2}+\frac{y_2}{x_2-x_1},$$

$$y_{123}=\frac{y_1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{y_2}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{y_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Queste funzioni $y_{12}\,y_{123}$ ec., che sono simmetriche rispetto agl'indici 1, 2, 3, ec. furono dette *interpolari*, e si possono calcolare più brevemente nel seguente modo. Accanto e tra mezzo ai valori di $y_1\,y_2\,y_3\ldots$

$$\begin{array}{c|ccccccc}
x_1 & y_1 & & & & \\
 & & y_{12} & & & \\
x_2 & y_2 & & y_{123} & & \\
 & & y_{23} & & y_{1234} \\
x_3 & y_3 & & y_{234} & & \\
 & & y_{34} & & & \\
x_4 & y_4 & & & &
\end{array}$$

si pongano i

$$y_{12}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\quad y_{23}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2},\quad y_{34}=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3},\ \text{ec.}$$

che sono le differenze dei y, divise per le corrispondenti differenze di x. Poscia si calcolino le

$$y_{123}=\frac{y_{23}-y_{12}}{x_3-x_1},\quad y_{234}=\frac{y_{34}-y_{23}}{x_4-x_2},\ \text{ec.}$$

che sono le differenze tra le predette, divise per le differenze tra i valori estremi dei x. Similmente sia

$$y_{1234}=\frac{y_{234}-y_{123}}{x_4-x_1},\ \text{ec. ec.}$$

Non è difficile riconoscere che queste y_{12}, y_{123}, y_{1234}, ec. sono eguali alle precedenti. Quando la formula d' interpolazione si adopera per trovare la y corrispondente ad una data x, giova prendere da prima i valori della x, che più s' avvicinano al dato x: quantunque in tal modo si cangi l' ordine $x_1\ x_2\ x_3 \dots$ pure le funzioni interpolari (essendo simmetriche rispetto agl' indici) si mantengono le stesse. Così, per esempio, se i valori che ordinatamente più si avvicinano ad x sieno $x_3\ x_2\ x_4\ x_1\ x_5$ ecc., si adopera la formola

$$y = y_3 + (x - x_3)\{y_{23} + (x - x_2)[y_{234} + (x - x_4)(y_{1234} + \text{ec.})]\}$$

nella quale si scrissero le $y_{23}\ y_{234}\ y_{1234}$ ec., invece delle loro eguali y_{32}, y_{324}, y_{3241}, ecc.

16. Le predette formole d' interpolazione sviluppate secondo le potenze della x, e poscia risolte alla maniera delle equazioni algebriche daranno, come dicemmo al § 11, i valori dell' incognita x, che corrispondono approssimatamente ad un dato valore della funzione y. In questi calcoli gioverà tener conto di un maggior numero di decimali nei coefficienti delle varie potenze dell' incognita; poichè trovato il valore approssimato di questa, esso si sostituirà nella data equazione, e se ciò dia luogo ad un piccolo errore, questo servirà a rettificare l' ultimo termine dell' equazione algebrica, che approssimatamente tien luogo dell' equazione proposta, e procedendo dopo ciò alla sua risoluzione si verrà ad ottenere un valore più esatto dell' incognita.

17. Quando sia comodo calcolare le derivate delle funzioni che deve annullarsi, esse daranno immediatamente l' equazione algebrica ausiliaria, che serve ad avvicinarsi alle radici poco discoste dall' assunto valore. Infatti è notissimo che se F è il valore della funzione per $x = 0$, E quello della sua derivata prima, e $2D$, $6C$, $24B$ quelli delle derivate seconda terza e quarta, si ha l' equazione $Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F = 0$.

18. Se nella funzione e nelle sue derivate poniamo prima $x = 0$, in guisa da ottenere come sopra F, E, D; poscia poniamo $x = a$ ne dedurremo (come è evidente e come mostreremo anche al § 27) i coefficienti F_5 E_5 D_5 della trasformata in $(x - a)$. Trovati così i tre ultimi termini tanto dell' equazione in x quanto della sua trasformata in $(x - a)$, sostituitili nella solita tabella di calcolo (veggasi il § 22) troveremo altri termini dell' equazione

$$\begin{array}{l|l} & \qquad\quad D+E+F \\ \hline a & \qquad C_2+D_3+E_4+F_5 \\ & \quad B_2+C_3+D_4+E_5 \\ & A+B_3+C_4+D_5 \end{array}$$

mediante le

$$E_4=\frac{F_5-F}{a},\quad D_3=\frac{E_4-E}{a},\quad D_4=\frac{E_5-E_4}{a},\quad C_2=\frac{D_3-D}{a},\quad C_3=\frac{D_4-D_3}{a},$$

$$C_4=\frac{D_5-D_4}{a},\quad B_2=\frac{C_3-C_2}{a},\quad B_3=\frac{C_4-C_3}{a},\quad A=\frac{B_3-B_2}{a}:$$

dopo di che il calcolo si continuerà nella solita maniera. In simil modo la conoscenza dei valori della funzione e della sua prima derivata per $x=0$ e per $x=a$ condurranno ad un' equazione ausiliaria del 3.° grado. Che se si conoscessero i valori della funzione e della sua prima derivata per $x=0$ per $x=a$ e per $x=b$ colla formola d' interpolazione del § 15, si otterrebbe un' equazione di 5.° grado.

19. Per la compiuta risoluzione di un'equazione, oltre i metodi per approssimarsi indefinitamente ad una o più radici, occorrono dei criterii, che stabiliscano il numero delle radici comprese in un dato intervallo. Questa parte è teoricamente la più imperfetta. Distingueremo i criterii, che mostrano l'assenza di radici, da quelli che ne assicurano la presenza; ossia quelli che danno un numero per certo non inferiore al numero delle radici comprese in un dato intervallo, e quelli che danno un numero per certo non superiore. Cominciamo dai criterii della prima specie, cioè da quelli che danno un limite superiore al numero delle radici.

20. Per le equazioni algebriche aventi tante radici (intendo sempre parlare delle reali) quant' è il grado, la regola del Cartesio dà un criterio compiuto che non lascia niente a desiderare. Per esempio se un' equazione del 6.° grado presenta ne' suoi termini 2 permanenze di segno e 4 variazioni, vi sarà una trasformata in $(x+a)$ con 6 variazioni di segno, una in $(x-b)$ con 2 sole ed una in $(x-c)$ con nessuna. La prima equazione per la regola del Cartesio non può avere alcuna radice negativa, e per ipotesi ne ha precisamente 6 di positive; l' equazione in x non può avere più di 4 radici positive, quella in

$(x-b)$ non più di due, e quella in $(x-c)$ non ne può avere alcuna; dunque necessariamente due radici cadono tra $-a$ e 0 due tra 0 e b, e due tra b e c. Ed in ogni intervallo, in cui non ci fosse alcuna perdita di variazioni di segno, non potrebbe nemmeno cadere alcuna radice, poichè ciascuna equazione ha nè più nè meno tante radici quant' è il numero delle sue variazioni di segno.

21. Ma se la precedente equazione di 6.° grado abbia quattro sole radici reali, la regola del Cartesio ci lascia dubbioso se esse cadano per esempio tutte quattro tra 0 e b, giacchè l' equazione in x avendo 4 variazioni di segno può avere 4 radici positive, e l'equazione in $(x-b)$ con 4 permanenze di segno può averne altrettante negative. Rimarrebbe pur dubbioso se vi fossero due radici in un intervallo, nel quale non vi sia alcuna perdita di variazioni di segno, a motivo di essere 4 il numero di variazioni in ciascuna equazione, perchè una delle due equazioni può avere due radici positive e l' altra due radici negative. Ecco dunque l' importanza dell' utilissima regola del Fourier sostituita a quella del Cartesio, secondo la quale in un intervallo non vi possono mai essere più radici del numero di variazioni di segno, che si perdono dall' una all' altra delle due trasformate che stanno agli estremi di quell' intervallo.

22. Il teorema o regola del Fourier può dimostrarsi in maniera affatto elementare nel seguente modo. Il polinomio $Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E$ diviso per $(x-a)$ dà $Ax^3+B_1x^2+C_2x+D_3$ ed il residuo E_4, essendo $B_1=aA+B$, $C_2=aB_1+C$, $D_3=aC_2+D$, $E_4=aD_3+E$. Similmente calcolando le $B_2=aA+B_1$, $C_3=aB_2+C_2$, $D_4=aC_3+D$ avremo il quoziente $Ax^2+B_2x+C_3$ ed il residuo D_4 del polinomio $Ax^3+B_1x^2+C_2x+D_3$ ancora diviso per $x-a$. Poi se $B_3=aA+B_2$, $C_4=aB_3+C_3$, $B_4=aA+B_3$ le successive divisioni per $x-a$ daranno ancora il quoziente $Ax+B_3$ ed il residuo C_4, il quoziente A ed il residuo B_4. Tutti i predetti coefficienti si dispongono nella seguente tabella di calcolo (ommesse per brevità le potenze della x)

$$\begin{array}{r|l}
 & A+B+C+D+E \\ \hline
a & A+B_1+C_2+D_3+E_4 \\
 & A+B_2+C_3+D_4 \\
 & A+B_3+C_4 \\
 & A+B_4 \\
 & A
\end{array}$$

I residui A, B_4, C_2, D_4, E_4 sono evidentemente i coefficienti del polinomio trasformato in $(x-a)$

$$A(x-a)^4+B_4(x-a)^3+C_4(x-a)^2+D_4(x-a)+E_4 .$$

Secondo il teorema del Fourier il numero delle radici dell' equazione $Ax^4+Bx^5+Cx^2+Dx+E=0$ comprese tra zero e la quantità positiva a non può superare il numero delle variazioni di segno che si perdono dalla serie $A\ B\ C\ D\ E$ alla serie $A\ B_4\ C_4\ D_4\ E_4$ dei coefficienti dell' equazione proposta in x e della sua trasformata in $(x-a)$, e ne può esser inferiore di un qualche numero pari. Infatti se noi consideriamo attentamente le seguenti serie, nelle quali dall' una all' altra è mutato sempre un solo termine nell' ordine stesso in cui essi successivamente si calcolano,

$$\begin{array}{ccccc}
A & B & C & D & E \\
A & B_1 & C & D & E \\
A & B_1 & C_2 & D & E \\
A & B_1 & C_2 & D_3 & E \\
A & B_1 & C_2 & D_3 & E_4 \\
A & B_2 & C_2 & D_3 & E_4 \\
A & B_2 & C_3 & D_3 & E_4 \\
A & B_2 & C_3 & D_4 & E_4 \\
A & B_3 & C_3 & D_4 & E_4 \\
A & B_3 & C_4 & D_4 & E_4 \\
A & B_4 & C_4 & D_4 & E_4
\end{array}$$

vedremo che da una serie alla successiva non vi potrà mai esser acquisto di variazione di segno, e se cangi segno un termine, che non sia l' ultimo, vi potrà essere la perdita di due variazioni di segno. Così per esempio se vi sia cangiamento di segno da C a $C_2=aB_1+C$ questo C_2 sarà necessariamente dello stesso segno di B_1 e perciò da $B_1\ C_1\ D$ a $B_1\ C_2\ D$ si manterrà l' unica variazione di segno, se D è di segno opposto a B_1 e perciò dello stesso segno di C; e si perderanno le due variazioni se D è dello stesso segno di B_1. Che se poi vi è cangiamento di segno nell' ultimo termine da E ad E_4 vi sarà la perdita di una variazione, poichè $E_4=aD_3+E$ è necessariamente dello stesso

segno di D_3. Ora noi possiamo supporre che si passi dall' equazione in x alla sua trasformata in $(x - a)$ non immediatamente, bensì col mezzo di tante successive trasformate in $(x - \alpha)$ in $(x - \beta)$ in $(x - \gamma)$ ed in $(x - a)$, essendo $\alpha\ \beta\ \gamma\ a$ quantità positive crescenti, talmente scelte che in ciascuno degl' intervalli tra $0\ \alpha\ \beta\ \gamma\ a$ non possa cadere che una sola radice, e vedremo che ogni radice fa perdere almeno una variazione di segno. I valori che fanno perdere qualche pajo di radici, indipendentemente dall' ultimo termine, si dicono valori *critici.*

23. Il teorema del Fourier offre il seguente criterio per la mancanza di radici. Quando dai coefficienti di un' equazione in x a quelli della sua trasformata in $(x - a)$ non vi è alcuna perdita di variazioni di segno, in quell' intervallo non esiste per certo alcuna radice. Inoltre, se si conoscono alcuni valori critici, il numero delle radici che cadono in un intervallo non può mai superare il numero delle variazioni che in esso si perdono, diminuito del doppio del numero dei valori critici compresi nel medesimo intervallo. È un valor critico quello, pel quale la trasformata manca di alcuni termini, in guisa che vi sia la perdita di una o più paja di variazioni di segno quando dopo avere attribuito a tutti i coefficienti, che sono eguali a zero, tali segni che il numero delle variazioni sia il maggior possibile, si passa a contare le variazioni indipendentemente dai termini nulli, ossia attribuendo a questi tali segni che il numero delle variazioni sia il minor possibile. Così nell'equazione $x^6 - x^5 + x^3 + x - 1 = 0$, essendo che da $+1 - 1 + 0 + 1 - 0 + 1 - 1$ a $+1 - 1 - 0 + 1 + 0 + 1 - 1$ vi è la perdita di un pajo di variazioni, se ne dedurrà che $x = 0$ è un valor critico dell' equazione e perciò essa non potrà avere che 4 radici reali. Nell' equazione $x^6 - x^3 - x = 0$ il valor $x = 0$ oltre esser una radice è anche un valor critico doppio, perchè dalla $+1 - 0 + 0 - 1 + 0 - 1 + 0$ alla $+1 + 0 + 0 - 1 - 0 - 1 - 0$ vi è la perdita di 5 variazioni, una delle quali dipende dalla radice, e le due paja dipendono dal valor critico, che per tal ragione dicesi *doppio.*

24. Mediante la ricerca dei valori critici si può assicurarsi del vero numero delle radici comprese in un dato intervallo; e quella ricerca può conseguirsi collo stesso processo, con cui si procede (§ 22) alla determinazione approssimata di ciascuna radice; essendo facile di scegliere la cifra a, con cui si eseguisce la tabella di calcolo, in modo che nella trasformata vada ad annullarsi l' uno o l' altro coefficiente. Nè è già necessario di determinare tutti i valori,

che annullano qualche coefficiente; così per esempio, se un'equazione presenti i segni $+-++\,+-+$ e la trasformata abbia i segni $+++-+++$; non ci sarà alcun bisogno di cercare il valore, che annulla il secondo termine, nè i due valori che annullano il terzo; poichè considerando i cinque primi termini si vede, che essi conservano lo stesso numero di variazioni, e perciò non esiste nel proposto intervallo alcun valore che annulli il 5.° termine; quindi rimarrà soltanto da vedere qual sia il valore, che annulla il penultimo, e riconoscere se esso sia un valor critico, oppure se separi le due radici, che annullano l' ultimo termine.

25. Quantunque si abbia così un modo sicuro per riconoscere la presenza di tutte le radici delle equazioni algebriche, pure gioveranno altri criterii, che possano assicurare della mancanza di radici in un dato intervallo, anche senza bisogno di riconoscere la presenza di tanti valori critici, quante sono le paja di variazioni perdute. Il criterio che io trovo più comodo consiste nel separare, se sia possibile, il primo membro dell'equazione in parti, le quali tutte conservino il medesimo segno per tutto l' intervallo di cui si tratta, perlochè la loro somma non potrà per certo annullarsi. Ora è facile riconoscere che da $x=0$ ad $x=a$ si conservano positive le quantità

$$f,\quad -\frac{g}{a}x+g,\quad \frac{h-k}{a^2}x^2-\frac{h}{a}x+k,\quad \frac{l}{a^2}x^3-\frac{m}{a}x+n,$$

moltiplicate per qualsivoglia potenza della x; purchè le a, f, g, h, k, l, m, n sieno tutte positive, e non sia h maggiore di $2k$, nè l minore di $\frac{m^2}{4n}$. Viene da ciò che se per un' equazione, per esempio $Ax^6+Bx^5 \ldots Fx+G$, si calcolino colla cifra a i numeri $F_5\,E_4 \ldots A_0\,Z$ mediante le stesse relazioni del processo Budan-Horner, ma procedendo invece da destra verso sinistra

$$\begin{array}{c|ccccccc} & A & B & C & D & E & F & G \\ \hline a & Z & A_0 & B_1 & C_2 & D_3 & E_4 & F_5 & 0 \end{array}$$

cioè facendo

$$aF_5=-G,\quad aE_4=F_5-F,\quad aD_3=E_4-E\ \ldots\ aB_1=C_2-C,$$

$$aA_0=B_1-B,\quad aZ=A_0-A.$$

L' equazione proposta mancherà per certo di radici nell' intervallo da 0 ad a se si verifichi uno dei seguenti casi: 1.° Che tutti i termini $F_5\ E_4 \ldots A_0\ Z$ abbiano segni eguali. 2.° Che se ad un termine, per esempio E_4 dello stesso segno dell' ultimo (F_5) ne succeda uno D_3 di segno opposto, sia peraltro $E - E_4$ inferiore (in quantità e fatta astrazione dal segno) ad E_4, ed il successivo termine C_2 sia dello stesso segno dell' ultimo F_5. Quando (per esempio $E - E_4$) sia dello stesso segno dei $E_4\ F_5$ e sia superiore (fatta astrazione dal segno) ad E_4, invece dell' equazione $aD_3 = E_4 - E$ bisognerà adoperare la $aD_3 = -\frac{E^2}{4E_4}$, e se ne risulti C_2 dello stesso segno di F_5 si continuerà il calcolo nello stesso modo già stabilito. I casi considerati sotto i numeri 2.° e 3.° potranno anche aver luogo più di una volta, e resterà sempre dimostrata l' assenza di radici da $x = 0$ ad $x = a$, purchè nei termini $F_5 \ldots A_0$ non ve ne sieno mai due successivi di segno opposto ad F_5, nè sia di segno opposto all' ultimo termine F_5 il primo Z. Giova osservare che nelle divisioni che servono a determinare i $F_5 \ldots Z$ si può servirsi di valori approssimati, purchè le frazioni che si aggiungono ai valori esatti non sieno giammai dello stesso segno di F_5.

26. Un altro criterio per riconoscere la mancanza di radici da $x = 0$ ad $x = 1$ si è di porre $x = \frac{1}{x_1}$, poscia se la trasformata in $(x_1 - 1)$ non abbia radici positive, la proposta non ne avrà di minori di 1. Se la trasformata ha tutti i termini di egual segno essa manca evidentemente di radici positive; se invece essa presenta delle variazioni di segno, bisognerà applicare il medesimo criterio a ciascun intervallo, nel quale sparisce qualche pajo di tali variazioni. Questo criterio fu adoperato dal Budan, il quale non essendo in possesso del teorema del Fourier doveva applicarlo a ciascun intervallo da x ad $x - 1$, anche nel caso, in cui la conservazione dello stesso numero di variazioni di segno (dall' equazione in x a quella in $x - 1$) toglie ogni dubbio sulla possibilità di radici di quell' intervallo.

27. Il teorema del Fourier, anzichè ai segni dei coefficienti di un' equazione, per esempio, $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0$ e della sua trasformata in $(x - a)$, $A(x-a)^4 + B_4(x-a)^3 + C_4(x-a)^2 + D_4(x-a) + E_4 = 0$, suole piuttosto riferirsi ai segni che prendono la funzione e le sue derivate quando vi si pone $x = 0$ oppure $x = a$. Ciò torna allo stesso effetto, poichè paragonando la $A(x'+a)^4 + B(x'+a)^3 + C(x'+a)^2 + D(x'+a) + E$

colla $Ax'^4 + B_4 x'^3 + C_4 x'^2 + D_4 x' + E_4$ si vede che $E_4 = Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E$, $D_4 = 4Aa^3 + 3Ba^2 + 2Ca + D$, $C_4 = 6Aa^2 + 3Ba + C$, $B_4 = 4Aa + B$, che, non badando ad alcuni moltiplicatori numerici, sono la funzione $Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$, e le sue *derivate* quando vi si pone $x = a$. La considerazione dei coefficienti dell'equazione e della sua trasformata è generalmente molto più comoda di quello che sia la sostituzione dei valori dell' incognita nelle derivate; poichè le trasformate servono nello stesso tempo al calcolo delle radici. Pure se qualche derivata sia tale che si scorga facilmente tra quali confini essa conservi invariato il proprio segno potrà tornar più comodo adoperare le derivate. Così per esempio se fosse proposta l' equazione $x^9 - 6x^4 - 33x - 30 = 0$, si calcolerebbe soltanto la sua prima derivata $9x^8 - 24x^3 - 33$; poichè la seconda $72x^7 - 72x^2$, si mantiene evidentemente sempre negativa da $-\infty$ a 1 e sempre positiva da 1 a $+\infty$. Facendo le sostituzioni $-\infty, 0, 1 + \frac{1}{\infty}, \infty$ i segni della funzione e della sua derivata prima e seconda sono $-+-$, $---$, $--+$, $+++$; sicchè vi è la perdita di due variazioni da $-\infty$ a 0 e di una da 1 a ∞; quindi l' equazione ha per certo una radice maggiore di 1. Per decidere intorno alle due variazioni si potrà cercare la radice della derivata $9x^8 - 24x^3 - 33 = 0$, che è -1, la quale sostituita nella funzione e nella derivata seconda, dà ad esse segni eguali, e perciò è un valor critico.

28. Anche per le equazioni trascendenti se la funzione, che deve uguagliarsi a zero, non presenti valori isolati discontinui dai vicini, nè cessi d' essere sviluppabile secondo le potenze dell' incognita, essa avrà, pei valori dell' incognita, pochissimo minori, e pochissimo maggiori di quel valore che la annulla, segno opposto, e segno eguale a quello della sua derivata: perlochè nell' accrescersi dell' incognita vi è la perdita di una variazione di segno tra la funzione e la derivata corrispondentemente a ciascuna radice della proposta equazione. Dunque se la funzione non divenga mai infinita, essa non potrà annullarsi due volte di seguito, senza che nell' intervallo la derivata cangi segno, e perciò si annulli o divenga infinita o discontinua. Risulta da ciò il teorema del Rolle, pel quale nelle equazioni algebriche due radici sono sempre separate da una radice dell' equazione derivata. Ne viene pure che se in un dato intervallo la funzione e le sue derivate prima, seconda, terza, ... n^{esima} rimangono continue e finite, e la n^{esima} conservi in quell' intervallo sempre lo stesso segno, l' equazione non

potrà avere nel medesimo intervallo più radici del numero di variazioni di segno, che si perdono nella serie della funzione e delle sue derivate fino all' n^{esima} quando vi si sostituisce prima il valore inferiore poscia il superiore dell' incognita; e la differenza tra il numero delle radici e quello delle variazioni perdute non sarà mai un numero dispari. Infatti se nella serie delle funzioni $f, f', f'' \ldots f^{(n)}$ immaginiamo sostituiti tutti i valori dell' incognita dal minore al maggiore dei confini del dato intervallo, vedremo che quando cangia segno la f si perde una variazione di segno, poichè prima di annullarsi essa era di segno opposto alla f', e dopo annullata diventa dello stesso segno. Quando cangia di segno la f' se le sue vicine $f\, f''$ hanno segni opposti, nè si perde nè si acquista alcuna variazione, ma se le $f\, f''$ hanno segni eguali, siccome la f' prima di annullarsi aveva segno opposto della f'', così si perdono due variazioni di segno. Dicasi lo stesso di tutte le altre derivate, eccettochè dell' ultima, che si suppone non cangiar mai di segno.

29. I casi in cui alcune derivate si annullassero insieme, potrebbero discutersi separatamente, ma possono anche considerarsi come limiti dei casi, in cui le funzioni si annullino una alla volta, le altre avendo valori piccolissimi. Ogni radice di un' equazione, che annulli eziandio la sua derivata prima dee considerarsi come una radice doppia, che sarà tripla se si annulli anche la derivata seconda, e così in seguito.

30. Nel precedente teorema invece della derivata f' potrà porsi una funzione f_1 che nel dato intervallo si mantenga sempre dello stesso segno della f'; poscia invece della f'' scriveremo la derivata della f_1 oppure una funzione, che conservi sempre lo stesso segno della f_1', e così in seguito. Ciò rende comoda l' applicazione del teorema del Fourier alle equazioni, che mancano di molti termini. Sia per esempio proposta la $f = x^7 - 32x^4 + 160x^2 - 128 = 0$, ricercandone le radici positive possiamo dividere la derivata per x ed avremo $f_1 = 7x^5 - 128x^2 + 320$; faremo lo stesso per la derivata della f_1, ed avremo la $f_2 = 35x^3 - 256$; e la f_3 si manterrà sempre positiva. I segni delle $f\, f_1\, f_2\, f_3$ per $x = 0$ sono $- + - +$, e per x grandissima sono $+ + + +$. Per riconoscere come si perdano le tre variazioni di segno, basterà ricercare l' unica radice positiva della $f_2 = 0$, che è poco minore di 2, il qual valore conserva alla f_1 il segno positivo, perciò fa perdere due variazioni di segno. Così resta dimostrato che la proposta equazione ha una sola radice positiva. Alla stessa conclusione si giungerebbe operando in

altre maniere simili: così per esempio la $f = x^7 - 32x^4 + 160x^2 - 128$ divisa per x^7 poscia derivata dà $f_1 = 96x^4 - 800x^2 + 896$, e nuovameute differenziando $f_2 = 12x^2 - 50$, $f_3 = 24$. L'annullarsi della f_2 non presenta alcun valore critico ed infatti la $f_1 = 0$ ha due radici positive. Siccome per $x = 0$ le $f f_2$ hanno segni eguali, così sarà alla minore delle predette radici che potrà corrispondere un valor critico, il che infatti si riconosce esser vero. Se si voglia sapere quante sono le radici negative della predetta equazione, mutando il segno alla x, si porrà $f = x^7 + 32x^4 - 160x^2 + 128$, $f_1 = -96x^4 + 800x^2 - 896$, $f_2 = -12x^2 + 5$, $f_3 = -24$, e la minore radice della $f_1 = 0$ mostrerà che le due variazioni di segno spariscono mediante un valor critico.

31. Serva per altro esempio l' equazione trascendente

$$f = 5^x - 2 . 3^x + 3 . 2^x - 5 = 0 .$$

Invece della derivata

$$f' = \lg 5 . 5^x - 2 \lg 3 . 3^x + 3 \lg 2 . 2^x ,$$

prenderemo la

$$f_1 = \lg 5 \left(\frac{5}{2}\right)^x - 2 \lg 3 \left(\frac{3}{2}\right)^x + 3 \lg 2 ,$$

ed invece della f_1' la

$$f_2 = \lg 5 . \lg \frac{5}{2} \left(\frac{5}{3}\right)^x - 2 \lg 3 . \lg \frac{3}{2} ,$$

la cui derivata è sempre positiva. I segni di queste $f\, f_1\, f_2\, f_2'$ per $x = -\infty$, per $x = 0$ e per $x = \infty$ sono $- + - +$, $- + + +$, $+ + + +$. Per conoscere come si perdano le due variazioni corrispondenti ad x negativa, osserveremo che la f_2 si annulla per x poco maggiore di -1, il qual valore rende f_1 positiva, e così si perdono le due variazioni; dunque la $f = 0$ ha soltanto una radice positiva.

32. Quando per una stessa determinazione dell' incognita la proposta funzione ammetta più valori differenti si dovrà discutere diligentemente la continuità di ciascun valore, sia corrispondentemente al cangiamento dell' incognita, sia nel passaggio dalla funzione alle sue derivate. Il teorema del Fourier riuscirà di pochissimo vantaggio; e piuttosto a mostrare l'assenza di radici si dovrà

ricorrere all' altro criterio di spartire l' equazione in parti, che si mantengano tutte dello stesso segno: oppure mostrare che dando ai varii termini della funzione i valori più acconci non si può giungere, dentro del dato intervallo, a mutarne il segno.

33. Veniamo ai criterii che assicurano della presenza di radici. Se la f è una funzione dell' incognita x che almeno in un dato intervallo non cessi d' esser continua e finita, e se la f cangi di segno dall' uno all' altro confine dell' intervallo, la $f=0$ ammette per certo un numero dispari di radici in quell' intervallo.

34. Credo utile esporre brevemente la teoria degli *indici* data dal Cauchy, da cui si fa tosto dipendere il teorema dello Sturm. Segneremo con $I(f, \varphi)$ l' *indice* relativo ad un certo intervallo, cioè la somma di tante unità positive quante sono le variazioni di segno che si perdono nelle funzioni $f\ \varphi$, quando la variabile x passa da un valore immediatamente minore ad uno immediatamente superiore a ciascun valore, che annulla la prima delle $f\ \varphi$; e di tante unità negative quante sono le variazioni di segno che con eguale supposizione si acquistano nei valori delle $f\ \varphi$. Perciò se le $f\ \varphi$ non si annullino mai insieme, la somma dei due indici $I(f, \varphi)+I(\varphi, f)$ eguaglierà la somma di tante unità positive o negative quante sono le variazioni di segno, che si perdono o si aquistano all' annullarsi dell' una o dell' altra delle $f\ \varphi$. Ritenuto che dentro del dato intervallo le $f\ \varphi$ sieno sempre continue e finite, esse cangeranno di segno soltanto annullandosi; ed è facile riconoscere che la predetta somma eguaglierà eziandio il numero delle variazioni che nelle $f\ \varphi$ si perdono da un confine all'altro; cioè essa sarà $+1$, -1, o 0, secondo che, quando all' incognita si attribuiscono successivamente i due valori minore e maggiore, che formano i confini dell' intervallo, nelle $f\ \varphi$ si perde una variazione, o se ne acquista una, o nulla si perde nè si acquista. Se la φ_2 sia una funzione, che, almeno per tutti i valori che rendono $\varphi=0$, abbia segno opposto di f (il che esclude il caso che le $\varphi\ \varphi_2$ si annullino insieme) sarà $I(\varphi, f)=-I(\varphi, \varphi_2)$; e perciò anche $I(f, \varphi)-I(\varphi, \varphi_2)$ uguaglierà il numero delle variazioni che nelle $f\ \varphi$ si perdono dall' uno all' altro confine. Per la stessa ragione se la φ_3 sia, almeno per tutti i valori che rendono $\varphi_2=0$, di segno opposto alla φ sarà $I(\varphi, \varphi_2)-I(\varphi_2, \varphi_3)$ eguale al numero di variazioni che (sempre dal minore al maggiore confine) si perdono nelle $\varphi\ \varphi_2$. Perciò sommando sarà $I(f, \varphi)-I(\varphi_2, \varphi_3)$ eguale al numero delle variazioni che si perdono nelle $f\ \varphi\ \varphi_2$. Continuando

lo stesso ragionamento ed osservando che se φ_r non muta mai di segno è necessariamente $I(\varphi_r, \psi) = 0$, vedremo che se le $\varphi_2\ \varphi_3 \ldots \varphi_r$ sieno determinate colla predetta condizione, che coll' annullarsi di ciascuna delle $f\ \varphi\ \varphi_3 \ldots \varphi_r$ quella che la precede e quella che la segue abbiano segni opposti, e l' ultima conservi in tutto il dato intervallo egual segno, l' indice $I(f, \varphi)$ sarà dato dal numero delle variazioni di segno che nelle $f\ \varphi\ \varphi_2 \ldots \varphi_r$ si perdono dal primo al secondo confine dello stabilito intervallo.

35. Se la f' è la derivata della f, l' indice $I(f, f')$ eguaglia il numero delle radici differenti della $f = 0$ contenute in un dato intervallo: poichè quando la x è infinitamente poco minore di una delle radici della $f = 0$, le $f\ f'$ hanno segni opposti, ed acquistano segni eguali per x infinitamente poco maggiore della radice; e perciò ogni radice (semplice o multipla) della $f = 0$ dà l' indice $+1$. Quando la f è una funzione algebrica razionale intera della x, la f' sarà di grado meno elevato, e potremo formare le $f_2 f_3 \ldots$ di gradi sempre meno elevati. Se giungeremo ad una f_r, che in tutto lo stabilito intervallo conservi egual segno, il numero $I(f, f')$ di valori differenti, che rendono $f = 0$, eguaglierà quello delle variazioni, che nelle $f\ f'\ f_2 \ldots f_r$ si perdono dal primo al secondo confine dell' intervallo. Se le $f\ f'$ avessero qualche fattore comune, esso potrebbe togliersi, dopo di che, mutandosi egualmente i segni di tutti i termini $f\ f'\ f_2 \ldots f_r$, il numero delle loro variazioni resterebbe quello stesso di prima.

36. L'applicazione di questo celebre teorema dello Sturm ad un'equazione composta di molti termini riesce bene spesso molto laboriosa; ne faremo qui la facile applicazione all'equazione del § 27, nella quale $f = x^9 - 6x^4 - 33x - 30$, $f' = 9x^8 - 24x^3 - 33$, prendendo $f_2 = xf' - 9f = 30x^4 + 264x + 270$, siamo certi che quando $f' = 0$, f_2 avrà segno opposto ad f. Riconosciuto che la f_2 rimane sempre positiva, vedremo che corrispondentemente ad $x = -\infty$, $= 0$, $= \infty$, le $f\ f'\ f_2$ avranno i segni $-+-+$, $--+$, $+++$: perciò la $f = 0$ ha una sola radice, che cade nell' intervallo tra 0 e ∞, nel quale si vede che sparisce una variazione di segno. Che la $f_2 = 0$ non abbia alcuna radice positiva risulta dalla mancanza di variazioni di segno. Per assicurarsi che non ne ha nemmeno di negative, muteremo il segno all' incognita, e della $30x^4 - 264x + 270$ calcoleremo la trasformata in $(x-1)$ che ha i coefficienti $30 + 120 + 180 - 144 + 36$; le sue due variazioni di segno spariscono quando diminuiamo ancora l'incognita di $\frac{1}{2}$, come si vede nel seguente calcolo

$$\begin{array}{c|l} & 30+120+180-144+36 \\ \hline \frac{1}{2} & 30+135+247-\ 21+25 \\ & 30+150+322+140 \end{array}$$

Col criterio dato al § 25 si riconosce che in questo intervallo di $\frac{1}{2}$ non può esistere alcuna radice

$$\begin{array}{c|l} & 30+120+180-144+36 \\ \hline {}^{1}\!/_{2} & -828-384-\ 72+144-\ 72 \quad 0 \end{array}$$

37. La maniera più generale per ottenere le $f\ f'\ f_2 \ldots$ di gradi decrescenti consiste nel sommare a $-f$ la f' moltiplicata per un binomio $\alpha x+\beta$ in guisa che la $f_2=-f+(\alpha x+\beta)f'$ sia almeno di due gradi inferiore a f; oppure in guisa che $-f+(\alpha x+\beta)f'$ possa dividersi per x^2. Nello stesso modo si procede per tutte le funzioni seguenti.

Ricerca delle radici immaginarie delle equazioni.

38. Prima di accennare i metodi d'approssimazione, i quali divengono più laboriosi a motivo della simultanea determinazione della parte reale e del coefficiente di $\sqrt{-1}$, diamo il criterio per conoscere il numero delle radici comprese in un dato intervallo. Comincio da un teorema dovuto all'Autore della teoria degl' indici intorno al numero delle radici reali di due equazioni simultanee $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$ comprese in un dato intervallo. Ora l' intervallo non è più definito, come nel caso di una sola incognita, da due confini della medesima, bensì da un *circuito* chiuso. Supponiamo per esempio che si cerchino tutte le soluzioni, per le quali x è compreso tra x_0 ed x_1 ed y è compreso tra y_0 ed y_1; considerando le $x\ y$ come le coordinate ortogonali d' un punto, vedremo che le predette condizioni si riducono a ciò che il punto espresso dalle coordinate $x\ y$ cada dentro del rettangolo $ABCD$, di cui il lato AB parallelo alle x corrisponde ad $y=y_0$, e si estende da x_0 ad x_1; il lato BC corrisponde ad $x=x_1$, e si estende da y_0 ad y_1; il lato CD corrisponde ad $y=y_1$ e si estende da x_1 ad x_0; finalmente il lato DA corrisponde ad $x=x_0$, e si estende da y_1 ad y_0. Se invece si voles-

sero le soluzioni, per le quali fosse $(x-a)^2+y^2<1$, ciò sarebbe lo stesso come chiedere tutte le soluzioni, per le quali i punti espressi dalle coordinate $x\ y$ cadono dentro del circolo che ha il raggio 1, ed il centro nel punto $x=a$, $y=0$.

39. Come nel caso di una sola equazione ad una sola incognita $f(x)=0$, la conoscenza dei segni dei valori $f(x_0)\ f(x_1)$ corrispondenti ai punti estremi dell' intervallo non indica il numero delle radici comprese in quell' intervallo, ma soltanto l' eccesso del numero delle radici corrispondenti ad un valor positivo della derivata $f'(x)$ sul numero di quelle corrispondenti a $f'(x)$ negativa; così pure pel caso di due equazioni a due incognite si ha il teorema: L' indice $I(\varphi, f)$ corrispondente a tutto un circuito chiuso eguaglia il doppio dell'eccesso del numero delle soluzioni simultanee delle $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$ comprese dentro quel circuito e corrispondenti ad un valor positivo della funzione $\delta=D_x f D_y \varphi - D_y f D_x \varphi$ sul numero di quelle corrispondenti a δ negativa. Si avverta che il circuito dee tutto percorrersi nel verso, con cui abbiamo precedentemente descritto il circuito $ABCD$ (poichè se lo si percorresse nell'altro verso l' indice muterebbe di segno). Per ogni combinazione di x ed y, che esprime un punto appartenente al circuito e che rende $\varphi=0$, dee osservarsi se nel verso in cui si percorre il circuito vi sia perdita od acquisto di variazione nei segni di $\varphi\ f$ prima o dopo di quel punto, e deve contarsi l'indice $+1$ nel primo caso, e -1 nel secondo: l'indice $I(\varphi, f)$ è la somma di tutti questi indici parziali. La δ è la funzione *alternata* o *determinante* delle derivate prime, la caratteristica D_x indicando la derivazione rispetto alla variabile x, e la D_y quella rispetto alla y. Siccome compiuto il circuito si ritorna al punto di partenza, così (§ 34) è $I(\varphi, f)=-I(f, \varphi)$, e sì l' uno che l' altro dei due indici darà lo stesso valore: calcolandoli entrambi si diminuirà il pericolo di sbagliare.

40. Per dimostrare il precedente teorema premettiamo che se lo spazio contenuto in un circuito si separi in due parti, l' indice corrispondente al circuito intero eguaglierà la somma degli indici dei due circuiti parziali: infatti, quando si percorrono nel verso stabilito i due circuiti parziali, quella parte di circuito che separa i due spazii contigui viene percorsa nei due sensi opposti; quindi le due porzioni di indice si distruggono a vicenda, e l' indice del circuito totale eguaglia la somma degli indici spettanti ai due circuiti parziali. Noi possiamo perciò limitarci a considerare un circuito, che contenga

dentro di sè una sola soluzione delle due equazioni $f=0$, $\varphi=0$; sia esso il rettangolo $ABCD$ col lato AB diretto parallelamente alle x positive, il lato BC parallelo alle y positive, il lato CD rivolto verso le x negative, e DA verso le y negative. Dentro di questo rettangolo sia FG la curva, a tutti i punti della quale corrispondono tali valori delle $x\,y$, che rendono $f=0$, e $\Phi\,\Psi$ la curva per la quale sia $\varphi=0$; e queste due curve si taglino dentro del circuito nel solo punto M. Supponiamo per fissar le idee che i punti $F\,G\,\Phi\,\Psi$ sieno distribuiti sui lati del rettangolo nell' ordine $AF\Phi BGC\Psi D$, e per tutto lo spazio $AFM\Psi D$ i valori delle $f\,\varphi$ sieno positivi; la f sarà negativa tanto nello spazio $MF\Phi$ quanto nello spazio $M\Phi BG$, che sono separati dal primo dalla curva FG, per la quale è $f=0$. Così pure la φ sarà negativa nei due spazii $M\Phi BG$, $MGC\Psi$, e positiva nello spazio $MF\Phi$; mentre la f è positiva anche nello spazio $MGC\Psi$. Nel punto M la derivata $D_y f$ è positiva, perchè nell' aumentare della y la f passa dal negativo al positivo, invece le tre derivate $D_x f$, $D_x \varphi$, $D_y \varphi$ sono tutte tre negative, dunque la δ è positiva. Se ora percorreremo il circuito $ABCD$ troveremo che l' indice $I(\varphi, f)$ è formato da $+1$ dipendente dalla variazione che si perde nel punto Φ mentre le due funzioni $\varphi\,f$ dai segni $+-$ prendono i segni $--$, e da $+1$ dipendente dall' altra variazione che si perde nel punto Ψ. Invece l' indice $I(f, \varphi)$ è -2, risultando dalle due variazioni di segno che si acquistano nei due punti F, G percorrendo il circuito da A verso B e da B verso C. Così si ha, come esige il teorema, $I(\varphi, f)=-I(f, \varphi)=2$ doppio del numero di soluzioni comprese nel circuito. Il teorema rimane dimostrato colla discussione di tutti gli altri casi, che possono occorrere nei segni delle funzioni nelle quattro parti, che stanno intorno a ciaschedun punto d' intersezione M delle due curve $f=0$, $\varphi=0$.

41. Questo teorema riesce di scarso giovamento nella risoluzione simultanea di due equazioni, attesochè due soluzioni corrispondenti una a δ positiva ed una a δ negativa si nascondono a vicenda, nè se ne scorge l' esistenza. Ma se si abbia una equazione $F(X)=0$, della quale si cerchino le radici immaginarie, ponendo $X=x+\xi\,\mathcal{V}$ (dove l'apposito segno $\mathcal{V}$ sta in luogo di $\sqrt{-1}$) avremo $F(X)=f(x, \xi)+\varphi(x, \xi)\,\mathcal{V}$, che è soddisfatta dalle due equazioni simultanee $f(x, \xi)=0$, $\varphi(x, \xi)=0$. Ora, ritenuto che la funzione F dell' immaginaria X sia tale che ne esista la derivata, il differenziale della precedente equazione darà

$$F'(dx + d\xi\, \nu) = (D_x f + D_x \varphi\, \nu)\, dx + (D_\xi f + D_\xi \varphi\, \nu)\, d\xi\,,$$

quindi

$$F' = D_x f + D_x \varphi\, \nu = D_\xi \varphi - D_\xi f \nu\,,$$

perciò

$$D_\xi \varphi = D_x f, \quad D_\xi f = -D_x \varphi\,, \quad \text{e}$$

$$\delta = D_x f D_\xi \varphi - D_x \varphi D_\xi f = (D_x f)^2 + (D_x \varphi)^2$$

è sempre positiva. Viene da ciò l'importantissimo teorema che l'indice

$$I(\varphi, f) = -I(f, \varphi)$$

esteso per tutto un circuito chiuso dà il doppio del numero delle radici immaginarie della $F(X)$, che rappresentano (secondo il vero significato degli immaginarii) dei punti compresi dentro di quel circuito.

42. Per calcolare uno degli indici $I(f, \varphi)$ bisogna supporre che le x ξ sieno le coordinate ortogonali di un punto, il quale percorra tutto il circuito. In particolare nel circuito rettangolare descritto al § 38 pel lato AB si dovranno cercare i valori di x compresi tra x_0 ed x_1, che danno $f(x, \xi_0) = 0$, ed osservare se corrispondentemente ad essi si perdano o si acquistino variazioni nei valori di $f(x, \xi_0)$ $\varphi(x, \xi_0)$. Una tal ricerca potrebbe eseguirsi operando sulle funzioni $f(x, \xi_0)$ $\varphi(x, \xi_0)$ come nel teorema dello Sturm si opera sulle $f(x)$ $f'(x)$; ma il calcolo riuscirebbe in pratica molto più laborioso di quello che determinare approssimatamente tutte le radici della $f(x, \xi_0)$, che sono comprese nell'intervallo da x_0 ad x_1 e sostituirle nella $\varphi(x, \xi_0)$. Cercando contemporaneamente le radici delle due equazioni $f(x, \xi_0) = 0$, $\varphi(x, \xi_0) = 0$ si conosce con maggior facilità il segno che compete ad una delle funzioni quando l'altra si annulla, e si determinano nello stesso tempo i due indici

$$I(\varphi(x, \xi_0), f(x, \xi_0)) \qquad I(f(x, \xi_0), \varphi(x, \xi_0))$$

la cui somma si verifica osservando che (§ 34) essa deve eguagliare il numero di variazioni che si perdono da $f(x_0, \xi_0)$, $\varphi(x_0, \xi_0)$ a $f(x_1, \xi_0)$, $\varphi(x_1, \xi_0)$; perlochè se una delle $f(x, \xi_0)$ $\varphi(x, \xi_0)$ conservi sempre lo stesso segno da

x_0 ad x_1, è inutile occuparsi dei cangiamenti di segno dell' altra; infatti in tal caso uno degli indici è nullo, e l'altro è subito dato dalla predetta loro somma. Si calcoleranno pure nello stesso modo gl' indici

$$I(\varphi(x_1, \xi), f(x_1, \xi)) \qquad I(f(x_1, \xi), \varphi(x_1, \xi))$$

da ξ_0 a ξ_1; gli indici

$$I(\varphi(x, \xi_1), f(x, \xi_1)) \qquad I(f(x, \xi_1), \varphi(x, \xi))$$

da x_1 ad x_0; e finalmente gli indici

$$I(\varphi(x_0, \xi), f(x_0, \xi)) \qquad I(f(x_0, \xi), \varphi(x_0, \xi))$$

da ξ_1 a ξ_0. Il doppio del numero delle radici comprese nel circuito $ABCD$ è uguale tanto alla somma dei quattro indici $I(\varphi, f)$, che noi per brevità di linguaggio diremo gli indici *positivi* (il che non esclude il caso che alcuno di essi sia negativo) quanto alla somma col segno cangiato dei quattro indici $I(f, \varphi)$, che noi diremo gli indici *negativi*, perchè la loro somma non può mai esser positiva, potendo bensì esser positivo alcuno di essi.

43. Dopo aver conosciuta la posizione di ciascuna radice immaginaria, credo che per le equazioni algebriche il metodo migliore di avvicinarsi al loro valore sia quello da me dato nel *Saggio sugli immaginarii*, e che consiste nel calcolare successivamente le varie cifre della parte reale e della parte immaginaria della radice. Supponiamo che l' equazione sia del 3.° grado, ed abbia già i coefficienti immaginarii, e sia

$$(l+\lambda\surd)X^3+(m+\mu\xi)X^2+(n+\nu\surd)X+p+\pi\surd=0.$$

Separeremo i coefficienti reali dagli immaginari, e su di essi col solito processo Budan-Horner e colla cifra a, che noi sceglieremo nel modo che ci parrà più opportuno allo scopo finale, calcoleremo i coefficienti della trasformata in $(X-a)$

	$l+m+n+p$	$\lambda+\mu+\nu+\pi$
a	$l+m_1+n_2+p_3$	$\lambda+\mu_1+\nu_2+\pi_3$
	$l+m_2+n_3$	$\lambda+\mu_2+\nu_3$
	$l+m_3$	$\lambda+\mu_3$

Dopo ciò volendo passare a calcolare una cifra α della parte moltiplicata per $\sqrt{-1}$ dovremo trasportare da una tabella all'altra i termini presi alternativamente, e mutare il segno a quelli che risultano moltiplicati per $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$, come apparisce dalla prima riga delle seguenti tabelle

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & \lambda - m_3 - \nu_3 + p_3 & -l - \mu_3 + n_3 + \pi_3 \\
\hline
\alpha & \lambda + m_4 + \nu_5 + p_6 & -l + \mu_4 + n_5 + \pi_6 \\
 & \lambda + m_5 + \nu_6 & -l + \mu_5 + n_6 \\
 & \lambda + m_6 & -l + \mu_6
\end{array}
$$

che si suppongono calcolate colla cifra α, cioè $\alpha\lambda - m_3 = m_4$, $\alpha m_4 - \nu_3 = \nu_5$, $\alpha\nu_5 + p_3 = p_6$; $-\alpha l - \mu_3 = \mu_4$, $\alpha\mu_4 + n_3 = n_5$, ecc. Dopo ciò i coefficienti della trasformata in $(X - a - \alpha\sqrt{-1})$ si otterranno eseguendo sugli ultimi coefficienti dei mutamenti inversi di quelli eseguiti da prima; sicchè si calcolerà poscia una nuova cifra a' della parte reale mediante le seguenti tabelle

$$
\begin{array}{r|l|l}
 & l - m_6 + n_6 + p_6 & \lambda - \mu_6 - \nu_6 + \pi_6 \\
\hline
a' & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}
$$

44. Per le equazioni trascendenti, oppure anche per le equazioni algebriche non complete, che contengono alcuni termini con potenze molto elevate, sicchè le trasformate riuscirebbero composte di moltissimi termini, credo utile, dopo aver isolata quella radice che vuol ricercarsi, di determinare alcuni valori della $F(X)$ corrispondenti, per esempio, ai quattro valori della X, che rappresentano i quattro vertici del rettangolo $ABCD$, nel quale è compresa la radice; poscia col mezzo della formula d' interpolazione del § 15 trovare la funzione di terzo grado, che per quei quattro valori si accordi colla $F(X)$, e risolvere l' equazione di 3.° grado; al che possono anche giovare le formule Cardaniche. Col mezzo dell' equazione ausiliaria di 3.° grado si potrà molto avvicinarsi alla radice desiderata, particolarmente se sostituendo il valore approssimato nella $F(X)$ si rettifichi opportunamente l' ultimo termine dell'equazione ausiliaria.

Radici reali di due equazioni simultanee.

45. Io credo che, parlando in generale, per risolvere approssimatamente due equazioni tra due incognite, se l' eliminazione di un' incognita riesca troppo

laboriosa, il metodo migliore sia quello di costruire le due curve espresse da tali equazioni considerando le $x\,y$ come due coordinate ortogonali, poscia stabilire con una prima approssimazione i valori delle incognite. Nel caso che si credesse che qualche intersezione cadesse troppo da lungi si potrebbe come al § 7 formare una seconda figura, nella quale le coordinate dei punti fossero $\frac{a}{x}$, $\frac{a}{y}$.

46. Per approssimarsi poi a ciascuna soluzione mi sembra opportuno di dare alla x una serie di valori vicini alla intersezione che si tratta di determinare; poscia per ciascun valore della x calcolare i corrispondenti valori della y mediante la risoluzione numerica delle due equazioni; la differenza tra i due valori della y si esprimerà col mezzo delle formule d' interpolazione (§ 12 e seg.) in funzione intera della x: sicchè si otterrà un' equazione che si risolverà coi metodi dati per una sola incognita.

Esempii numerici.

47. Gli accennati precetti si renderanno più chiari e compiuti applicandoli ad alcuni esempii, che tolgo per la maggior parte dalle altrui memorie.

Esempio 1.° trattato dallo Spitzer (*Allgemeine Auflösung der Zahlen-Gleichungen* Wien 1851). Proposte le due equazioni $x^y = 5$, $y^x = 4$ prendendo due volte il logaritmo della prima e sostituendovi la seconda ho l' equazione ad una sola incognita

$$\frac{1}{x}\lg 4 + \lg\lg x = \lg\lg 5 = -0{,}155541 \cdot 5\,.$$

Quando $\lg x$ (logaritmo di x) è positivo si ha $\frac{1}{x}\lg 4 - 0{,}602 < 0$ e $\lg\lg x + 0{,}758 < 0$ finchè $\lg x < 0{,}175$, e la somma di due quantità negative non potendo esser nulla, ne viene che l'equazione non può avere radici da $\lg x = 0$ a $\lg x = 0{,}175$. Se $\lg x > 0{,}175$ si ha $\frac{1}{x}\lg 4 - 0{,}402 < 0$ e $\lg\lg x + 0{,}558 < 0$ finchè $\lg x < 0{,}277$. Se $\lg x > 0{,}277$ si ha $\frac{1}{x}\lg 4 - 0{,}318 < 0$, e $\lg\lg x + 0{,}474 < 0$ finchè $\lg x < 0{,}336$. Se $\lg x > 0{,}336$ si ha $\frac{1}{x}\lg 4 - 0{,}278 < 0$ e $\lg\lg x + 0{,}434 < 0$ finchè $\lg x < 0{,}368$. D' altra parte per $\lg x > 0{,}45$ è

$\lg\lg x + 0{,}347 > 0$, e $\frac{1}{x}\lg 4 - 0{,}191 > 0$ finchè $\lg x < 0{,}499$, e la somma di due quantità positive non potendo esser nulla, ne viene che manca ogni radice da $\lg x = 0{,}45$ a $\lg x = 0{,}499$. Per $\lg x > 0{,}499$ è $\lg\lg x + 0{,}302 > 0$, e $\frac{1}{x}\lg 4 - 0{,}146 > 0$ finchè $\lg x < 0{,}616$. Per $\lg x > 0{,}616$ è

$$\lg\lg x + 0{,}211 > 0 \quad \text{e} \quad \frac{1}{x}\lg 4 - 0{,}055 > 0 \quad \text{finchè} \quad \lg x < 1{,}040, \text{ ecc.}$$

Così è palese che l'equazione non può aver alcuna soluzione fuori dell' intervallo di $\lg x > 0{,}368$, $< 0{,}45$.

48. Per rendere più utile l' *approssimazione lineare* prenderemo (§ 10) per incognita la $\lg\lg x = t$, e daremo all' equazione la forma

$$\mathrm{Nl}\,(9{,}779639{\cdot}8 - \mathrm{Nl}\,t) + t + 0{,}155541{\cdot}5 = 0$$

(indicando colla caratteristica Nl il numero, di cui segue il logaritmo). Prendiamo per prima posizione $t = -0{,}4$, ossia col solito uso dei complementi aritmetici $t = 9{,}6$, le tavole logaritmiche danno il corrispondente

$$\mathrm{Nl}\,t = 0{,}398107{\cdot}2,$$

a cui attribuiamo la *variazione* o *differenza* 100·0 (col punto io separo la sesta dalla settima decimale), le stesse tavole ci mostrano che la corrispondente differenza del logaritmo t è 109·1. Sottraendo $\mathrm{Nl}\,t$ dal costante 9,779 . . . avremo un logaritmo, a cui spetterà la differenza $-100{\cdot}0$; il corrispondente numero ha la differenza $-55{\cdot}4$; ad esso si sommano i due ultimi termini dell'equazione e si ottiene l' errore $-3727{\cdot}2$ colla corrispondente differenza 53·7; questo errore e questa differenza hanno il rapporto $-69{,}41$; perciò il termine $t = 9{,}6$, a cui compete la differenza 109·1 ha l'errore $-69{,}41 \times 109{\cdot}1 = -7573{\cdot}$, tolto il quale esso diviene $t = 9{,}607573{\cdot}$, che sarà la nostra seconda posizione.

Costanti	0,155541·5		9,779639·8	
t	$=$ 9,6	109·1	$\mathrm{Nl}\,t =$ 0,398107·2	100·0
$\mathrm{Nl}\,(9,77\ldots - \mathrm{Nl}\,t)$	$=$ 0,240731·3 —	55·4	9,381532·6 —	100·0
Errore	$= -$ 3727·2 :	53·7 $= -69,41$		
t	$=$ 9,607573·	107·2	$\mathrm{Nl}\,t =$ 0,405110·	100·0
	0,236880·8 —	54·6	9,374529·8	
Errore	$= -$ 4·7 :	52·6 $= -0,0893$		

Il secondo errore $-0,0893 \times 107{\cdot}2 = -9{\cdot}6$ tolto dalla seconda posizione dà $t = 9,607582{\cdot}6$, perciò $\mathrm{Nl}\,t = \lg x = 0,405119{\cdot}$ ed $x = 2,541669$.

49. Esempio 2.° È un vantaggio del predetto metodo che gli errori nei primi tentativi possono ritardare la determinazione desiderata, non mai renderla difettosa; esso si applica con molta facilità ad altra equazione, che tolgo dalla succitata memoria

$$4^x + 5^x = 10\,;$$

il termine, da cui dipende la maggior *differenza* è il secondo che noi perciò (§ 10) porremo $5^x = t$ e l' equazione diventerà

$$\mathrm{Nl}\,(a \lg t) + t - 10 = 0, \quad \text{essendo} \quad a = \frac{\lg 4}{\lg 5} = 0,861353{\cdot}1\,.$$

Attribuendo per prima posizione a t il valore 5 e la differenza 0,001 si trova che esso ha l' errore $-0,592$, tolto il quale si ha per seconda posizione $t = 5,592$, che dà l' errore $-1948{\cdot}$ e perciò il valore $t = 5,593948$, di cui nello stesso modo si verifica l' esattezza.

		Numeri	differ.	logaritmi	differ.
Costante	—	10			
t	$=$	5,	1000·	$\lg t =$ 0,698970·0	86·8
		4,	689·	$a \lg t =$ 0,602060·0	74·8
Errore	—	1,000000·0 :	1689· $= -,592$		
t	$=$	5,592	1000·	$\lg t =$ 0,747567·2	77·7
		4,404730·	678·	$a \lg t =$ 0,643919·3	66·9
Errore	—	3270· :	1678· $= -1,948$		

50. Prendo per 3.° Esempio l' equazione $f = e^x - 2x - 5 = 0$; la funzione derivata è $f' = e^x - 2$, e se prendiamo $f_2 = f' - f = 2x + 3$, essendo facilissimo assicurarsi in quali intervalli la f_2 conservi lo stesso segno, sarà applicabile il teorema dello Sturm (§ 35) ed il numero $I(f, f')$ delle soluzioni comprese in un intervallo, nel quale la f_2 non cangia di segno, sarà dato dal numero di variazioni, che si perdono nelle $f f' f_2$. Del resto nel caso presente basta considerare le sole $f f'$, essendo palese che la f' ha una sola radice.

51. Adoperando l' approssimazione lineare gioverà dare (§ 10) all' equazione due forme differenti secondo che se ne ricerca la radice negativa o la positiva. Per la negativa si conserverà la forma

$$\mathrm{Nl}\,(k\,x) - 2x - 5 = 0$$

(essendo $k = 0{,}434294\cdot5$ il modulo dei logaritmi ordinarii) giacchè il termine che ha maggior influenza è quello proporzionale all' incognita. Cominceremo colla supposizione $x = -2{,}5$ a cui attribuiremo la differenza $0{,}001000\cdot$ e troveremo l' errore $-0{,}042800$; sicchè la seconda posizione sarà

$$x = -2{,}4572$$

(a cui attribuiamo la differenza $100\cdot$); e troviamo l'errore $-38\cdot9$ ed il valore esatto $x = -2{,}457161\cdot1$

	Numeri	differ.	logaritmi	differ.
Costante	— 5			
x =	— 2,5	1000·0		
Nl (k x) =	0,082085·0	82·1	kx = — 1,085736·2	434·3
— $2x$ =	5,	— 2000·0		
Errore	82085·0 :	— 1971·9 = — 42,8		
x =	— 2,4572	100·0		
	0,085674·5	8·6	kx = — 1,067148·4	43·4
— $2x$ =	4,9144	— 200·0		
Errore	74·5 :	— 191·4 = — 0,389		

52. Per la radice positiva cominciando colla posizione $x = 2$ troveremo per seconda posizione $x = 2{,}3$

Costante	-5			
$-2x = -4$		$-2000\cdot$		
	$7{,}389055.$	$7390\cdot$	$kx = 0{,}868589\cdot 0$	$434\cdot 3$
Errore $=$	$-1{,}610945\cdot :$	$5390\cdot = -298{,}9$		
$-2x = -4{,}6$		$-2000\cdot$		
	$9{,}974182\cdot$	$9972\cdot$	$kx = 0{,}998877\cdot 3$	$434\cdot 3$
Errore $=$	$,374182 :$	$7972\cdot = 46{,}95$		

e siccome la maggiore differenza è quella che è variabile da una posizione all'altra, così l' approssimazione lineare condurrebbe alcun poco in lungo. Potremo profittare delle due fatte posizioni e delle corrispondenti differenze, che possono prendersi per le derivate, e secondo la regola data al § 18 verremo a formare un' equazione del 3.° grado, che ci darà la radice $x = 2{,}2516$. I valori della funzione $e^x - 2x - 5$ corrispondenti a $x = 2$ ed $x = 2{,}3$ sono $-1{,}6109$, $0{,}3742$ e le derivate sono $5390 : 1000$, $7972 : 1000$, volendo adoperare la cifra $3'$ come se fosse un intero, moltiplicheremo questi valori per 10000 e per 1000, poscia nella seguente tabella perchè l' ultimo termine -16109 divenga, mediante il moltiplicatore $3'$, $+3742$ bisognerà che il precedente termine sia 6617, che per diventare 7972 esige il precedente termine 452; così pure avremo $(6617 - 5390) : 3 = 409$, e $(452 - 409) : 3 = 14$. Dopo ciò si procede col solito processo, e si calcolano le cifre $-5''$, $1'''$, 6^{iv} della cercata radice $x = 2{,}2516$.

		$+5390$	-16109	
$3'$		$+409$	$+6617$	$+3742$
	14	$+452$	$+7972$	
	14	$+494$		
$-5''$	$,014$	$+4{,}87$	$+772{,}8$	-122
	$,01$	$+4{,}8$	$+749$	
$1'''$		$,0\ 5$	$+74{,}9$	-47
6^{iv}			$7{,}5$	-2

53. Del resto se si volesse adoperare l' approssimazione lineare si disporrebbe l' equazione così

$$kx - \lg(2x+5) = 0$$

e con due sole posizioni si troverebbe il valore $x = 2,251636$

$x = 2,$	1000·	$kx = 0,868589{\cdot}0$	434·3	
$2x+5 = 9,$	2000·	$\lg(2x+5) = 0,954242{\cdot}5$	96·5	
		Errore — 85653·5 :	337·8	$= -253,56$
$x = 2,253560{\cdot}$	1000.	$kx = 0,978708{\cdot}7$	434·3	
$2x+5 = 9,507120{\cdot}$	2000·	$\lg(2x+5) = 0,978049{\cdot}0$	91·4	
		Errore 659·7 :	342·9	$= 1,924$
$x = 2,251636{\cdot}$				

54. Per ispingere l' approssimazione più innanzi occorrono tavole logaritmiche più estese; riescono comodissime quelle proposte dal Leonelli, ed io colgo ben volentieri questa occasione per esporre come si determini il logaritmo iperbolico di $2x+5 = 9,503272{\cdot}$. L' unità divisa per $0,950327{\cdot}2$ dà il quoziente 1 ed il residuo $,049672{\cdot}8$, che diviso pel suo complemento $0,9503\ldots$ dà il quoziente $,05$ ed il residuo $2156{\cdot}44$ (il quale si ottiene facendo a memoria il prodotto $1,05 \times 49672{\cdot}8$ e sottraendone $,05$). Il suddetto $2156{\cdot}44$ diviso pel suo complemento $,9978\ldots$ dà per quoziente la sua prima cifra $,002$ ed il residuo $160{\cdot}75288$ (il quale si ottiene formando a memoria il prodotto $1,002 \times 2156{\cdot}44$ e dal prodotto sottraendo $,002$). Proseguendo in simil maniera si trova che

$$1 = 0,950327{\cdot}2 \times 1 \times 1,05 \times 1,002 \times 1,0001 \times 1,00006 \ldots$$

quindi per ottenere il logaritmo di $9,503272{\cdot}$ basterà sottrarre dal logaritmo di 10 quelli di 1,05 di 1,002 ecc., il che si vede eseguito qui sotto coi logaritmi iperbolici, che riescono più comodi dei tabulari

1,052160·772601		1,052160·772601
,049672·800000	lgh 10 =	2,302585·092994
2156·440	lgh 1,05 =	48790·164169
160·752880	lgh 1,002 =	1998·002663
60·768955	lgh 1,0001 =	099·995000
0·772601	lgh 1,00006 =	59·998200
		772601
$x = 2{,}251636$	lgh $(2x + 5)$ =	2,251636·160361

Se x riceve l' aumento 1·, lgh $(2x + 5)$ riceverà l' aumento

$$\frac{2\cdot}{9{,}503272\cdot} = \cdot 210454\ ;$$

perciò il precedente errore ·160361 diviso per 789546 darà per valore corretto $x = 2{,}251636\cdot 203104$.

55. Esempio 4.° L' approssimazione lineare mediante il calcolo delle differenze serve con egual facilità per l' equazione

$$\sqrt[3]{(28 + x)} - \sqrt[4]{(65 - x)} + x = 0$$

e partendo da $x = 0$ si trova prima $x = -0{,}187$ poscia $x = -0{,}188302$. Ed $x = -6$ dà similmente l' altra radice $x = -5{,}713985$.

56. Esempio 5°. Anche per l'equazione $x - \operatorname{tg} x = 0$ risolta dall' Eulero e dal Poisson niun metodo è più comodo di quello dell'approssimazione lineare. Se nel secondo termine della $\operatorname{ltg} x - \lg x = 0$ poniamo

$$x = \frac{5\pi}{2} \text{ la } \operatorname{ltg} x = 0{,}673241\cdot 1 \text{ dà } \frac{2}{\pi} x = 2{,}8669\ ;$$

prendiamo per prima posizione $\frac{2}{\pi} x = 2{,}86$ ed alla $\operatorname{ltg} x = 0{,}673308\cdot 8$, che è la parte più influente attribuiamo la differenza 100·0, alla quale corrisponde nell' arco la differenza 31·2 e nel $\lg\left(\frac{2}{\pi} x\right)$ la differenza 4·7. Si trova

l'errore $-1904 \cdot 4$, che tolto dalla $\operatorname{ltg} x$ dà il nuovo valore $0,652575 \cdot 4$, da cui poi si ottiene il valore esatto $0,652576 \cdot 0$ ed $x = 4,493409$.

		$\lg \frac{\pi}{2} =$	$0,196119 \cdot 9$	
		$\operatorname{ltg} x =$	$0,650671 \cdot 0$	$100 \cdot 0$
$\frac{2}{\pi} x = 2,86$	$31 \cdot 2$	$\lg \left(\frac{2}{\pi} x\right) =$	$0,456366 \cdot 0$	$4 \cdot 7$
		Errore $-$	$1814 \cdot 9 :$	$95 \cdot 3 = -19,044$
		$\operatorname{ltg} x =$	$0,652575 \cdot 4$	$100 \cdot 0$
$\frac{2}{\pi} x = 2,860593 \cdot 2$	$31 \cdot 1$		$0,456456 \cdot 1$	$4 \cdot 7$
		$-$	$6 :$	$95 \cdot 3 = -0,006$

57. Lo Stern (*Journal Crelle* T. XXII, 1841) fa successivamente le due ipotesi $x = 4,4$ e $4,5$ e per ciascuna calcola non solo il valore della funzione $f = x \cos x - \operatorname{sen} x = 0$, ma eziandio quelli delle sue derivate $f' = - x \operatorname{sen} x$, $f'' = - x \cos x - \operatorname{sen} x$. Il modo più opportuno di utilizzare questi sei valori è quello dato al § 18; cioè si scrivano in una prima riga i valori di

$$\frac{1}{2} f'' = 1,151933, \quad f' = -4,187050, \quad f = 0,400662$$

corrispondenti ad $x = 4,4$, dovremo poi col solito calcolo mediante la cifra $1'$ pervenire ai valori di

$$\frac{1}{2} f'' = -0,963056, \quad f' = -4,398885, \quad f = -0,028948$$

corrispondenti ad $x = 4,5$. Dopo di che continuando il solito calcolo prima colla cifra $-07'''$ poscia colle 4^{IV} 1^{V} si trova il valore esatto fino all'ultima decimale $x = 4,49341$

```
                 — 11519 — 418705 + 400662
   1′  |----------------------------------------
       |     + 614 — 10905 — 429610 —   28948
       |  + 13 + 627 — 10278 — 439888
       | 7 + 20 + 647 —  9631
       | 7 + 27 + 674
       | 7 + 34
 — 07‴ |----------------------------------------
       |           —   0,96 — 4392,2 +   1797
       |           —   1,0  — 4385
  4^IV |----------------------------------------
       |           —   0,01 — 438,5  +     43
   1^V |----------------------------------------
       |                    — 43,9   —      1
```

58. Esempio 6.° Prendiamo a considerare l' equazione risolta dal Poisson e dallo Stern

$$f = (4 - 3x^2)\,\text{sen}\,x - 4x\cos x = 0\,;$$

la sua derivata è $f' = -x\,(3x\cos x + 2\,\text{sen}\,x)$; se poniamo

$$f_2 = \frac{5x\cos x\,\text{sen}\,x - 2\,\text{sen}^2 x + 4\cos^2 x}{4x\cos^2 x}\,f' - \frac{5}{4}\,f = \text{sen}\,x\,(\text{tg}^2 x - 5),$$

non è difficile riconoscere che quando $f' = 0$ la f_2 si riduce sempre a $-\frac{5}{4}f$, e perciò ha segno opposto alla f, si potrà dunque applicare alle funzioni $f\,f'\,f_2$ il teorema dello Sturm (§ 35) per tutti quegli intervalli nei quali la f_2 conserva lo stesso segno. Per x piccolissima le $f\,f'\,f_2$ sono tutte tre negative, e perciò nessuna variazione di segno si può perdere fino a $\frac{2}{\pi}\,x = 65.°54'$. in cui la f_2 diventa positiva; la variazione di segno sussiste fino a $\frac{2}{\pi}\,x = 114°6'$ perchè anche allora la f è negativa. In questo punto la f' è positiva e la f_2 diventa negativa, quindi si hanno due variazioni di segno, una delle quali si perde quando $\frac{2}{\pi}\,x = 180°$, perchè allora la f è positiva; e perciò da $\frac{2}{\pi}\,x = 114°\,6'$ a 180, cade una radice della $f = 0$. Continuando questo esame vedremo che ciascuna radice cade tra $i\,180° + 114°6'$ e $(i+1)\,180°$, essendo i un numero intero positivo.

59. Determiniamo quella radice che cade tra 3 e 4 retti. Per maggior speditezza di calcolo esprimo gli angoli in parti decimali di angolo retto, secondo quel metodo che fu con tanta attività promosso, e poi con sì deplorabile debolezza abbandonato dai matematici. Daremo all' equazione la forma

$$1 - x \cot x = \frac{5}{4} x^2,$$

quando $\frac{2}{\pi} x$ supera 3 interi potremo considerare l' equazione approssimata $-\cot x = \frac{5}{4} x$ ed in questa siccome $\lg(-\cot x)$ è la parte più variabile, così porteremo su di essa tutto l'errore; da $\frac{2}{\pi} x = 3$ dedurremo

$$0{,}54830 = \mathrm{l}\,(-\cot 3{,}825)\,.$$

Cominciamo dunque colla posizione di $\frac{2}{\pi} x = 3{,}83$, a cui attribuiamo la differenza 0,00037 acciocchè il termine $\mathrm{l}(-\cot x)$ che è il più influente, abbia la differenza in numero rotondo 0,00100. Per calcolare il logaritmo del primo membro dell' equazione mi servo dei logaritmi additivi di Leonelli-Gauss, mediante i quali ad $A = \lg(-x \cot x)$ si trova corrispondere $A + B = C = \lg(1 - x \cot x)$, da cui sottraendo il logaritmo del secondo membro dell'equazione si ottiene l' errore $-0{,}07214$, che diviso per la corrispondente differenza 93 e moltiplicato per 100, che è la differenza del $\lg(-\cot x)$ dà $-0{,}07759$ per l' errore di tal logaritmo; sicchè per seconda posizione prenderemo $\mathrm{l}(-\cot x) = 0{,}64052$. Ripetendo il calcolo si trova il nuovo errore $-0{,}00085$ tolto il quale si ha $\mathrm{l}(-\cot x) = 0{,}64137$. Calcolando poi con 7 decimali si verifica l' esattezza di $\mathrm{l}(-\cot x) = 0{,}641369\cdot9$.

Numeri		differ.	logaritmi	differ.
$\frac{\pi}{2}$	costante		0,19612	
$-\cot x$			0,56293	100
$x = 3{,}83$		37	0,58320	4
			$A =$ 1,34225	104
			$B =$ 0,01931	$-$ 4
			$C =$ 1,36156	100
$\frac{5\pi^2}{16}$	costante		$-$ 0,26730	
x^2			$-$ 1,16640	$-$ 7
		Errore	$-$ 0,07214 :	93 $= -$ 7759

$-\cot x$			0,64052	100	
$x = 3,85680$	32		0,58623	4	
		$A =$	1,42287	104	
		$B =$	0,01610	$-$ 4	
		$C =$	1,43897	100	
x^2		$-$	1,17246	$-$ 7	
	Errore	$-$	79 :	93	$= -$ 0,85

$\frac{\pi}{2}$		0,196119·9	
$-\cot x$		0,641370·0	100·0
$x = 3,857069·2$	31·9	0,586257·4	3·6
26,53062	63·3	1,423747·3	103·6
27,53062	63·3	1,439816·0	99·8
$\frac{5\pi^3}{16}$		$-$ 0,267301·1	
x^2		$-$ 1,172514·8	$-$ 7·2
	Errore	·1 :	92·6

60. Esempio 7.° Sia ora proposta l' equazione trascendente

$$x^{\sqrt{2}} - x + 0,1 = 0\,;$$

la sua derivata $\sqrt{2}\; x^{\sqrt{2}-1} - 1 = 0$ ha evidentemente una sola radice positiva $= 0,43313$, la quale dà al primo membro della proposta un valor negativo, perciò (§ 30) questa ammette precisamente due radici positive. Per trovarle faccio parecchie sostituzioni, così per $x = 0,2$ il primo membro dell' equazione prende il valore $y = 0,002685\cdot$, ecc. se le posizioni non formano una progressione aritmetica adopereremo la formula d' interpolazione data al § 15: a tale scopo disporremo in colonne i valori di x ed i corrispondenti di y, le differenze dei secondi le divideremo per le rispettive differenze della x, sicchè per esempio la differenza tra $-26330\cdot$ e $-14423\cdot$ divisa per 0,2 darà $59535\cdot$; così avremo la colonna dei valori di y_{12}, y_{23}, y_{34}, y_{45}. Le

differenze tra questi le divideremo per le differenze tra gli estremi x, cioè per $0,4 - 0,2$, $0,6 - 0,3$, $0,7 - 0,4$ ed avremo i valori di $y_{123} = 598250$, y_{234}, y_{345}. Le cui differenze divise per $0,6 - 0,2$, $0,7 - 0,3$ daranno y_{1234} e y_{2345}, e finalmente la differenza di questi divisa per $0,7 - 0,2$ darà $y_{12345} = 219828$.

x	y				
0,2,	2685				
		− 204900			
0,3	− 17805		+ 598250		
		− 85250		− 289082	
0,4	− 26330		+ 482517		+ 219828
		+ 59535		− 179168	
0,6	− 14423		+ 410950		
		+ 182820			
0,7	+ 3859				

Dopo ciò per calcolare il polinomio

$$y = y_1 + (x - ,2)\{y_{12} + (x - ,3)\,[y_{123} + (x - 0,4)\,(y_{1234} + (x - 0,6)\,y_{12345})]\}$$

potremo disporre il calcolo come nelle solite tabelle, ma prese dall'alto al basso; cioè dopo avere scritto in una riga orizzontale i termini y_{12345}, y_{1234}, y_{123}, y_{12}, y_1 operando sui due primi termini colla cifra $6'$ (volendo trattare come interi questi decimi, si diminuirono opportunamente i numeri della prima riga) si otterranno i due termini della seconda riga: colla cifra $4'$ si opererà su questi e sul terzo numero della prima riga, e si otterranno i tre termini della terza riga, e così in seguito. La maniera di questo calcolo e la sua dimostrazione si fanno palesi ponendo mente che il desiderato polinomio diviso per $(x' - 2')$ deve dare il residuo 2685, poi diviso per $(x' - 3')$ deve dare il residuo 20490 e così in seguito.

$6'$	21,9828	− 289,082	+ 5982,50	− 20490,0	+ 2685
$4'$	21,9828	− 420,979			
$3'$	21,9828	− 508,910	+ 7666,42		
$2'$	21,9828	− 574,858	+ 9193,15	− 43489,3	
	21.9828	− 618,824	+ 10342,87	− 61875,6	+ 89664

Per tal maniera otteniamo i coefficienti di un'equazione del 4° grado di cui cercheremo nel solito modo le due radici, come qui si vede

	21,9828	— 618,824	+ 10342,87	— 61875,6	+ 89664
2′	21,9828	— 574,858	+ 9193,15	— 43489,3	+ 2685
	21,983	— 530,89	+ 8131,4	— 27227	
	21,98	— 486,9	+ 7158		
	22,0	— 443			
1″	,0022	— ,441	+ 71,14	— 2651,6	+ 33
	,002	— ,44	+ 70,7	— 2581	
		— ,4	+ 70		
0 1ᴵⱽ			+ ,01	— 25,8	+ 7
3ⱽ				— 2,6	— 1

	21,9828	— 618,824	+ 10342,87	— 61875,6	+ 89664
6′	21,9828	— 486,927	+ 7421,31	— 17347,7	— 14422
	21,983	— 355,03	+ 5291,1	+ 14399	
	21,98	— 223,2	+ 3952		
	22,0	— 91			
8″	,0022	— ,073	+ 38,94	+ 1751,4	— 411
	,002	— ,06	+ 38.5	+ 2059	
		— ,1	+ 38		
2‴			,38	+ 206,7	+ 2
			,4	+ 207	+
—01ⱽ				+ 2,1	+ 0

Le due radici 0,21013, 0,68199 sostituite nella proposta equazione danno due piccoli errori, che si tolgono tenendo conto delle differenze

	Numeri	differ.	logaritmi	differ.
	$x = 0,210130\cdot0$	$100\cdot0$	$-,677511\cdot9$	$206\cdot7$
	$x^{\sqrt{2}} = 0,110116\cdot7$	$74\cdot1$	$-,958146\cdot9$	$292\cdot3$
Errore	$133:$	259	$= 51\cdot3$	
	$x = 0,681990\cdot0$	$100\cdot0$	$-,166222\cdot0$	$63\cdot7$
	$x^{\sqrt{2}} = 0,582004\cdot7$	$120\cdot7$	$-,235073\cdot5$	$90\cdot1$
Errore	$-147:$	-207	$= 71\cdot0$	

e ne risultano i valori $x = 0,2100787$, $0,681919\cdot0$.

61. Per ricercare le radici immaginarie possono adoperarsi le derivate dell' equazione proposta, ma se partiremo da valori immaginarii di x, la cui *inclinazione (argomento)* sia compresa tra $-\pi$ e $-\pi$ noi ricadremo sempre sulle radici reali; poichè infatti tutte le radici immaginarie della proposta equazione (che sono in numero infinito) hanno inclinazioni ben diverse. Sulla retta su cui vogliamo prendere le quantità reali vi sia la lunghezza $OH = 0,1$, e si descriva la curva per tutti i punti X della quale sia $HX = (OX)^{\sqrt{2}}$; essa è costituita da due ovali, l'una si estende dal punto che ha l'ascissa (contata da O verso H) eguale a $0,07456$ radice dell'equazione $x^{\sqrt{2}} + x - 0,1 = 0$ fino alla predetta $0,210079$, e l' altra si estende dalla predetta ascissa positiva $0,681919$ fino all' ascissa negativa $-1,2111$ radice della

$$x^{\sqrt{2}} - x - 0,1 = 0\ .$$

Ogni punto di questa curva darà una radice immaginaria dell' equazione proposta, purchè alle inclinazioni delle rette OX HX si aggiungano due multipli di 2π tali che tra le due somme abbia luogo il rapporto $1:\sqrt{2}$. Per esempio nell' ovale esterna vi è un punto corrispondente ad $OX = HX = 1$, il triangolo isoscele OHX ha l' angolo in $O = 0,968$ di angolo retto, e l' angolo esterno in H è di $1,032$, e dovremo trovare due numeri interi $i\ j$ che soddisfacciano approssimatamente la

$$(4i + 0,968)\sqrt{2} = 4j + 1,032\ ,$$

ossia all' incirca la

$$1393\,i + 83 = 985\,j\,,\quad \text{il che dà}\quad i = 33864\,,\quad j = 47981\,,$$

perciò una radice immaginaria è poco differente da $x = \varepsilon^{135456,968}$.

62. Una radice, che dipende da un punto della medesima curva poco discosto dal precedente, è quella espressa approssimatamente da $x = OX = \varepsilon^{-19}$, poichè ne risulta

$$x^{\sqrt{2}} = \varepsilon^{-26,87} = \varepsilon^{1,13} = -\mathrm{Nl}\,9,30704 + \varepsilon\,\mathrm{Nl}\,9,99088 = -0,20279$$

$$+ \varepsilon\,0,97923 \quad \text{e} \quad x^{\sqrt{2}} - x + 0,1 = -0,10279 - \varepsilon\,0,02077\,.$$

Questo medesimo valore approssimato di $x = \varepsilon^{-19}$ ci dà

$$\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1} = \mathrm{Nl}\,0,15051\,\varepsilon^{0,13} = \mathrm{Nl}\,0,14140 + \varepsilon\,\mathrm{Nl}\,9,45755$$

$$= 1,38480 + \varepsilon\,0,28678\,;$$

sicchè la prima derivata della funzione $x^{\sqrt{2}} - x + 0,1$ è

$$= 0,38480 + \varepsilon\,0,28678\,.$$

Si trova pure la seconda derivata

$$(2 - \sqrt{2})\,x^{\sqrt{2}-2} = 0,11879 - \varepsilon\,0,57361\,,$$

e la derivata terza

$$-(2 - \sqrt{2})^2\,x^{\sqrt{2}-3} = 0,33602 + \varepsilon\,0,06959\,.$$

Queste derivate divise per 1, 1.2, 1.2.3 danno (ommettendo le derivate d'ordine superiore) per determinare $x_1 = x - \varepsilon$ l' equazione del 3.° grado

$$(5600 + \varepsilon\,1160)\,x_1^3 + (5940 - \varepsilon\,28680)\,x_1^2$$

$$+ (38480 + \varepsilon\,28678)\,x_1 - 10279 - \varepsilon\,2077 = 0\,.$$

Come dicemmo al § 43 i coefficienti si separano in due tabelle e colle comuni cifre $2'$, $2''$ si ha in mira di ridurre gli ultimi termini

	5,600 + 59,40 + 3848,0 — 10279	1,160 — 286,80 + 2867,8 — 2077
2′	5,600 + 70,60 + 3989,2 — 2301	1,160 — 284,48 + 2298,8 + 2521
	5,600 + 81,8 + 4153	1,16 — 282,2 + 1734
	5,6 + 93	1,2 — 280
2″	,006 + ,94 + 417,2 — 1467	,001 — 2,80 + 167,9 + 2857
	,006 + ,95 + 419,1	,001 — 2,80 + 162,3
	,006 + ,96	,001 — 2,80

— 1467, + 2857 ad aver un rapporto non molto discosto da quello dei termini penultimi — 162,3 + 419,1 che nelle tabelle successive diventeranno i loro divisori. Eseguite nei termini le trasposizioni indicate al § 43, si trovano le due cifre — 7″, — 5‴ della parte immaginaria, le quali rendono gli ultimi termini — 305, — 126 quasi proporzionali ai penultimi + 37,6 + 14,8.

	,001 — ,96 — 162,3 — 1467	— ,006 + 2,80 + 419,1 + 2857
√. — 7″	— ,001 — ,97 — 155,5 — 379	— ,006 + 2,84 + 399,2 + 63
	— 1,0 — 149	— ,01 + 2,9 + 379
√. — 5‴	— ,01 — 14,8 — 305	+ ,03 + 37,8 — 126
	— ,01 — 14,8	+ ,03 + 37,6

e rimettendo i termini nella prima posizione calcoleremo le cifre 8‴ 2$^{\text{IV}}$ della parte reale

	+ ,01 + 37,6 — 305	— ,03 + 14,8 — 126
8‴	+ ,01 + 37,7 — 3	— ,03 + 14,6 — 9
	+ 38	+ 14
2$^{\text{IV}}$	+ 3,8 + 5	1,4 — 6

Raccolte le cifre si ha $x_1 = 0{,}2282 - 0{,}075$, e perciò

$$x = 0{,}2282 + \sqrt{\ }\,0{,}925 = \mathrm{Nl}\,9{,}97897\,\sqrt{\ }^{-19{,}1540}.$$

Rifacendo il calcolo con questo valore molto più approssimato

$$x = 0{,}228227 + \sqrt{\ }\,0{,}924991$$

troveremo

$$x^{\surd 2} - x + 0{,}1 = 0{,}000221{\cdot}1 - \surd\, 0{,}000055{\cdot}7$$

e la sua derivata $= 0{,}378653 + \surd\, 0{,}143778$ sicchè l'equazione del 1.° grado che dà la seconda correzione è

$$(37865 + \surd\, 14378)\, x_2 + 22{,}11 - \surd 5{,}57 = 0$$

che si risolve nel seguente modo

	37865	+22,11	14378	— 5,57
-4^{v}	378,7	+ 696	143,8	—1132
$\surd\, 3^{\text{iv}}$	—143,8	+ 265	378,7	+ 4
-6^{v}	37,9	+ 38	14,4	— 82
$\surd\, 2^{\text{v}}$	— 14,4	+ 9	37,9	— 6
-2^{vi}	3,8	+ 1	—1,4	— 3
$\surd\, 1^{\text{vi}}$	— 1,4	+ 0	3,8	+ 1

e dà la correzione $x_2 = -0{,}000462 + \surd\, 0{,}000321$. Così abbiamo la radice esatta fino all' ultima decimale

$$x = 0{,}227765 + \surd\, 0{,}925312 = \text{Nl}\, 9{,}979061{\cdot}8\, \surd^{-19{,}153649}.$$

63. Esempio 8.° Si cerchino le soluzioni reali delle due equazioni

$$xy^2 + (x^2 + 7)\, y - x^2 + x = 0\,, \quad 4y^2 - 3xy - x^2 + 5x = 0\,.$$

Quando x è grandissima negativa, le due radici della prima equazione sono 1 e $-x$, e quelle della seconda sono $-\frac{x}{4}$ e x; mentre x aumenta avvicinandosi allo zero, la prima radice della prima equazione poco si discosta dall' unità, e la prima radice della seconda equazione va diminuendo; ma per $x = -1$ esse sono ancora discoste, cioè l'una $y = 0{,}26$ e l'altra $y = -0{,}9$. Soltanto ad $x = 0$ esse divengono ambedue $y = 0$. Così abbiamo intanto la soluzione $x = 0$, $y = 0$, che è una soluzione semplice, perchè quando $x = 0$ la seconda equazione ha bensì ambedue le radici $= 0$, ma la prima equazione

ha una radice $=0$ ed una infinita. Quando x diventa positiva la seconda equazione comincia col mancare di radici (reali) e soltanto per $x=3{,}4$ ha la radice doppia $y=1{,}2$ ed allora la prima equazione ha una radice $y=0{,}3814$ e l' altra negativa: la differenza tra queste due radici è $0{,}8186$. Per $x=3{,}6$ la seconda equazione ha le radici $0{,}6$ $2{,}1$ e la radice positiva della prima è $0{,}4349$, che paragonata colla prima delle predette dà la differenza $0{,}1651$. Ecco il dettaglio di calcolo per la risoluzione delle due equazioni di 2.° grado corrispondenti ad $x=3{,}8$

	$3{,}8+21{,}44-10{,}64$		$4-11{,}4+4{,}56$
$4'$	$38+2296-1456$	$4'$	$4-98+64$
	$38+2448$		$4-82$
$6''$	$3{,}8+2470{,}8+265$	$8''$	$4-788+96$
	$3{,}8+2494$		$4-756$
$-1'''$	$,04+249{,}4+16$	$1'''$	$,4-755{,}6+204$
-06^{v}	$+2{,}5+1$		-755
		2^{iv}	$-755+53$
		7^{v}	$7{,}6$
	$y=0{,}45894$		$y=0{,}48127$

la differenza tra questi due valori è $0{,}02233$. Per $x=3{,}9$ le due equazioni hanno le radici $0{,}470378{\cdot}3$ $0{,}429830{\cdot}5$ colla differenza $-0{,}040547{\cdot}8$. Colle fatte supposizioni e colle trovate differenze tra le radici delle due equazioni noi formeremo come spiegammo ai §§ 15 e 60 la seguente tabella

3,2	8186			
		-16338		
3,6	1651		15313	
		-7150		-17771
3,8	22,33		2873	
		-6288		
3,9	$-405{,}478$			

Prenderemo per incognita la $x_1=x-3{,}9$ e profittando del valore corrispondente ad $x=3{,}9$ calcolato con maggior numero di decimali, ci faremo a risolvere l' equazione

$$-405,478+x_1\left\{-6288+(x_1+,1)\left[2873-(x_1+,3)\,1771\right]\right\}=0\,,$$

i cui coefficienti si determinano nel modo seguente, e si calcola poi il valore di $x=-0,064$

$-3'$	$-17,771$	$+28,73$	$-628,8$	$-405,478$
$-1'$	$-17,771$	$-24,58$		
-0	$-17,771$	$-42,25$	$-653,4$	
	$-17,771$	$-42,25$	$-653,4$	$-405,478$
$-7''$	$-,177$	$-2,99$	$-632,5+$	373
	$-,18$	$-1,7$	-621	
	$-,2$	$+0$		
$6'''$			$-62,1$	0

quindi $x=3,9-0,07+0,006=3,836$, valore che sostituito nelle due equazioni presenta tra le due radici la differenza $-0,00063$ (se non si fosse tenuto conto della posizione $x=3,2$ che poteva considerarsi come troppo discosta dalle altre, si sarebbe ottenuto un valore meno approssimato), sicchè con facile calcolo se ne deduce $x=3,8347$ ed $y=0,4530$,

64. Le equazioni precedentemente proposte essendo rispetto alla y del solo 2.° grado rendono facile la sua eliminazione, il che darà colla segnatura delle funzioni alternate ossia determinanti

$$\begin{vmatrix} x\,, & x^2+7\,, & -x^2+x, & 0 \\ 0\,, & x\,, & x^2+7, & -x^2+x \\ 4\,, & -3x, & -x^2+5x & 0 \\ 0, & 4\,, & -3x, & -x^2+5x\,, \end{vmatrix}=0,$$

che rappresenta l' unione di tutti i seguenti prodotti, ognuno dei quali contiene ordinatamente un termine per ciascuna colonna ed inoltre un termine per ciascuna riga; ogni termine che ha al di sopra uno o più segni — è tolto da una riga superiore ad altrettanti dei termini che lo precedono in quel prodotto, e questo ha il segno + o —, secondo che il numero di tali segni — è pari o dispari

$$xx(-x^2+5x)(-x^2+5x)-x(-3x)(x^2+7)(-x^2+5x)$$

$$+x(-3x)(-3x)(-x^2+x)-x.4(-x^2+5x)(-x^2+x)$$

$$+4(x^2+7)(x^2+7)(-x^2+5x)-4(x^2+7)(-3x)(-x^2+x)$$

$$-4x(-x^2+x)(-x^2+5x)+4.4(-x^2+x)(-x^2+x)$$

$$=-6x^6-4x^5+33x^4+229x^3-96x^2+980\,x=0$$

la qual equazione oltre la radice 0 ha appunto la radice $x=3,8347$ come apparisce dal seguente calcolo

	6 +	4 —	33 —	229 +	96 —	980
3	6 +	22 +	33 —	130 —	294 —	1862
	6 +	40 +	153 +	329 +	693	
	6 +	58 +	327 +	1310		
	6 +	76 +	555			
	6 +	94				
8′	,006 +	,988 +	63,404 +	1817,23 +	21467,8 —	14458
	,006 +	1,036 +	71,69 +	2390,8 +	40594	
	,006 +	1,08 +	80,3 +	3033		
	,01 +	1,1 +	89			
3″		,0001 +	,089 +	30,60 +	4151,2 —	2004
			+ ,09	+ 30,9	+ 4244	
4‴				+ ,31	+ 425,6 —	302
7ⁱᵛ					42,7 —	3

La mancanza delle altre due radici positive si riconosce facendo svanire il penultimo termine, onde vedere se esso presenti un valor critico; infatti operando colla cifra 2′

$$
\begin{array}{r|l}
 & ,06+,4\ \ -33\ \ -2290+9600-980000 \\
\hline
2' & ,06+,52-32,0-2354+4892-970216 \\
 & ,06+,64-30,7-2415+\ \ 62 \\
 & \ \ \ +,7\ \ -29\ \ -2473
\end{array}
$$

si rende palese la mancanza di radici tra 0,2 e 0,3, che è l'intervallo, in cui spariscono le due variazioni di segno. La mancanza di radici negative apparisce anche più facilmente.

65. Esempio 9.° Prendo dalla memoria dello Spitzer l' esempio delle due equazioni

$$y^3-4xy+2x^2-x^3=0\,, \qquad (x-1)\,y^2+x^2=0\,.$$

Quando x è negativa la prima equazione ha una radice reale negativa, che, quando x è grandissima, è poco differente da x, mentre la seconda equazione ha la radice $-\sqrt{-x}$. Per $x=-16$ le due predette radici sono -15, -4; e la prima radice si riduce a -4 soltanto quando è all' incirca $x=-4$; ma allora la seconda equazione ha la radice $-1,8$: e perchè la prima equazione abbia la radice $-1,8$ bisogna che sia $x=-2$ ed allora la seconda equazione ha la radice $-1,1$. In questa maniera ci conduciamo ad $x=-1,2$ a cui corrispondono nelle due equazioni le radici

$$y=-0,837583\,, \qquad y=-0,809040$$

colla differenza $-0,028543$. Con altre due posizioni formiamo la tavoletta

x	differ.		
$-1,2$	-28543		
		32839	
$-1,1$	4296		-3621
		29218	
$-1,0$	33515		

Ponendo $x=-1,1-\frac{1}{10}x_1$ la formula del § 12 ci dà l' equazione

$$4296-31028\,x_1-1810\,x_1^2=0$$

che col solito calcolo dà $x=-1,11374$

	$-18{,}10$	$-3102{,}8$	$+4296$
$1''$			
	$-18{,}10$	$-3120{,}9$	$+1175$
	$-18{,}1$	-3139^{*}	
$3'''$			
	$-{,}18$	$-314{,}4$	$+232$
	$-{,}2$	-315	
7^{IV}			
		$-31{,}5$	$+11$
4^{V}		-3	-1

a cui si trova corrispondere in ambedue le equazioni $y = -0{,}76606$.

66. La $x = 0$ è una radice doppia del sistema delle due equazioni, poichè $y = 0$ è allora una radice doppia della seconda equazione e tripla della prima. Quando x è molto piccola, per esempio $x = 0{,}01$ la prima equazione ha le radici $-0{,}2$, $0{,}005$, $0{,}2$ e l' altra le $\mp 0{,}01$, che stanno comprese tra le prime, e che al crescere di x (fino all' unità) vanno aumentando di valore fino a sorpassare le radici estreme della prima equazione. Faremo le supposizioni $x = 0{,}6$, $x = 0{,}8$ e poscia, per avvicinarsi al desiderato valore, anche le altre due $x = 0{,}78$, $x = 0{,}82$; le corrispondenti radici delle due equazioni sono

	$x = 0{,}6$	$0{,}78$	$0{,}8$	$0{,}82$
prima equazione	$-1{,}64510$	$-1{,}87506$	$-1{,}89856$	$-1{,}92169$
	$+1{,}43101$	$+1{,}63259$	$+1{,}65399$	$+1{,}67522$
seconda	$\mp 0{,}94864$	$\mp 1{,}66297$	$\mp 1{,}78885$	$\mp 1{,}93276$

quindi formeremo la seguente tavoletta delle differenze tra le radici positive

6	-48237			
		28486		
7,8	3038		11877	
		52240		4942
8	13486		22750	
		61340		
8,2	25754			

e ponendo $10x = 7{,}8 + x_1$ avremo come ai §§ 15 e 60 l' equazione

$$3038 + x_1 \left\{ 52240 + (x_1 + 0{,}2)\,[11877 + (x_1 + 1{,}8)\,4942] \right\} = 0$$

i cui coefficienti si determinano nel solito modo (§ 60)

−1,8	+4942	+11877	+52240	+3038
0,2	4942	+20772,6		
0	4942	+19784,2	+48085,5	
	4942	+19784,2	+48085,5	+3038
−7''	,049	+19,44	+4672,5	−2328
	,049	+19,10	+4538,8	
	,05	+18,75		
5'''		+,188	+454,82	−54
		+,188	+455,76	
1^{IV}		,0019	+45,578	−8

e poi si trova $x_1 = -0,0649$, $x = 0,77351$, questo valore sostituito nelle due equazioni proposte dà ad y i due valori 1,625616, 1,625330, che presentano la differenza −0,000286; perciò il fine della tabella precedente (nel quale a bella posta (§ 16) si tenne conto di un maggior numero di decimali di quelle che occorrevano) deve correggersi come segue

1^{IV}	0,002	+45,58	−286
6^{IV}	0,002	+45,59	−12
3^{V}		4,5	−

cioè al trovato valore di x_1 deve aggiungersi 0,00063, e quindi si ha

$$x = 0,773573 .$$

In simil modo si opera per trovare l' altro valore di x; ecco la tavoletta delle differenze tra i valori negativi della y

$10\,x$	differenze			
6	−69646			
		26909		
7,8	−21209		12096	
		51190		4956
8	−10971		23000	
		60390		
8,2	+ 1107			

ed ecco la formazione e la risoluzione dell' equazione in $x_1 = 10\ x - 8^2$, la quale dà $x_1 = -0{,}01705$ quindi $x = 0{,}818295$; e siccome questo valore sostituito nelle due equazioni proposte dà l' errore $-0{,}000061$, così correggendo si trova $x_1 = -0{,}016956$ ed $x = 0{,}818304$

$-4'$	4,956	+230,00	+6039,0	+1107
$-2'$	4,956	+249,82		
	4,956	+259,73	+6538,6	+1107
$-2''$	,005	+2,59	+648,7	— 190
	,005	+2,58	+643,5	
$3'''$		,026	+64,43	+ 3
		,025	+64,51	
-05^{v}			,6451	+ 0
			,6451	— 6,1
9^{v}			,6451	— ,3
4^{vi}			,065	0

67. Esempio 10.° Quando l'eliminare un' incognita non riesca moltissimo laborioso io lo credo il migliore partito: così nell' esempio dato dallo Spitzer

$$x^4 + y^4 = 300\,, \qquad x^3 + y^3 = 80$$

mi sembra opportuno di porre $x^3 = z$ ed eliminata la y risolvere l' unica equazione

$$z^{\frac{4}{3}} + (80 - z)^{\frac{4}{3}} = 300\,.$$

È evidente che z non può essere nè < 8 nè > 72, e basterà cercare le radici da $z = 8$ a $z = 40$; ora se partiamo da $z = 8$ e facciamo i calcoli mediante i logaritmi additivi, tenendo conto delle differenze

Numeri	differ.	logaritmi	differ.
$z = 8,$	,01	0,90309	54
$80 - z = 72,$	$-$,01	1,85733	$-$ 6
$\frac{80}{z} - 1$		0,95424	$-$60
$\left(\frac{80}{z} - 1\right)^{\frac{4}{3}}$		$A =$ 1,27232	$-$80
		$B =$ 0,02260	4
		$C =$ 1,29492	$-$76
costante 300		$-$ 7,52288	
$z^{\frac{4}{3}}$		1,20412	72
Errore		0,02192 :	$-$ 4 $= -$548

troviamo per seconda posizione $z = 13{,}48$ e per terza $z = 14{,}22$, ed operando con 7 decimali si giunge a $z = 14{,}2143$.

68. Esempio 11.° Per la determinazione delle radici immaginarie delle equazioni algebriche non mi pare opportuno di ridurci a due equazioni fra due incognite reali, e trovo molto preferibile il metodo diretto (§ 43). Quando l'equazione è di grado poco elevato sarà facile scorgere la posizione delle radici immaginarie; ma in ogni caso vi si perviene con tutta sicurezza mediante la teoria degli indici; la qual teoria se tutti i coefficienti dell' equazione sieno reali può abbreviarsi come io feci vedere nel § 68 della memoria citata nel § 1 (tom. III, 1846). Qui adopero il metodo generale quale fu esposto al § 42, e lo applico all' equazione

$$x^4 + 9x^2 - 6x + 5 = 0$$

trattata dallo Spitzer (la quale già potrebbe facilmente risolversi col metodo speciale per le equazioni del 4.° grado). Un confine superiore a tutte le sue radici è, come io lo osservai nel *Saggio sull' algebra degl' immaginarii* (Mem. Istituto, tom. IV, 1852 § 19), la radice positiva dell' equazione

$$\rho^4 - 9\rho^2 - 6\rho - 5 = 0\,,$$

cioè $\rho = 3{,}4$. Nell' equazione proposta muteremo x in $x + \xi\sqrt{}$ ed avremo

$$f(x, \xi) + \sqrt{}\varphi(x, \xi) = 0$$

essendo

$$f(x, \xi) = x^4 - 6x^2\xi^2 + \xi^4 + 9x^2 - 9\xi^2 - 6x + 5$$

$$\varphi(x, \xi) = (4x^3 - 4x\xi^2 + 18x - 6)\xi.$$

I valori della x si considerino come ascisse orizzontali, e quelli della ξ come ordinate verticali, sicchè ogni radice immaginaria $x + \xi\sqrt{}$ rappresenterà un punto del piano della figura, che sarà facile costruire. Se vi segniamo il circuito rettangolo, i cui lati corrispondono rispettivamente a $\xi = -3{,}4$, $x = 3{,}4$, $\xi = 3{,}4$, $x = -3{,}4$, noi siamo certi che vi troveremo comprese le quattro radici, e l'equazione avendo tutti i coefficienti reali sappiamo di più che due radici cadono al di sopra della retta $\xi = 0$ e due al di sotto. Onde determinare dei circuiti più ristretti, nei quali sieno comprese le radici, gioverà considerare successivamente alcune rette orizzontali ed alcune verticali, e segnarvi i punti, nei quali cade un qualche valore dell' indice $I(\varphi, f)$, che noi dicemmo (§ 42) *positivo*, e dell' indice *negativo* $I(f, \varphi)$, nella supposizione che ciascuna delle prime rette sia percorsa nel verso delle x positive, e ciascuna delle seconde nel verso delle ξ positive.

Ponendo $\xi = 0$ si trova facilmente che la

$$f(x, 0) = x^4 + 9x^2 - 6x + 5$$

si conserva sempre positiva (perlochè la proposta equazione non ammette radici reali) e quindi $I(f, \varphi)$ è sulla retta orizzontale $\xi = 0$ sempre nullo. L'altro indice $I(\varphi, f)$ prende il valore $+1$ tra $x = 0{,}3$ ed $x = 0{,}4$ dove la $\frac{1}{\xi}\varphi(x, 0) = 4x^3 + 18x - 6$ si cangia da negativa in positiva, e perciò nelle φ, f si perde una variazione di segno.

Ponendo $x = 0$ le

$$f(0, \xi) = \xi^4 - 9\xi^2 + 5, \qquad \varphi(0, \xi) = -6\xi$$

danno, in tutto il tratto corrispondente a ξ positiva, $I(\varphi, f) = 0$; e l' indice $I(f, \varphi)$ (che noi diciamo *negativo*) ha il valore $+1$ da $\xi = \sqrt{0{,}5}$ a $\xi = \sqrt{0{,}6}$ dove la f si cangia da positiva in negativa, ed il valore -1 da $\xi = \sqrt{8{,}3}$ a $\xi = \sqrt{8{,}4}$, perchè allora nelle f, φ si acquista una variazione la f mutandosi da negativa in positiva.

Ponendo $\xi = \sqrt{0,6}$ avremo

$$f = x^4 + 5,4x^2 - 6x - 0,04, \qquad \frac{1}{\xi}\varphi = 4x^3 + 15,6x - 6;$$

$x = -0,01$ dà $f = 0$ ed $I(f, \varphi) = 1$, perchè al crescere di x sparisce la variazione di segno tra le f, φ; $x = 0,4$ dà $\varphi = 0$ ed $I(\varphi, f) = -1$, perchè allora si acquista una variazione di segno; $x = 0,96$ dà $f = 0$ ed $I(f, \varphi) = 1$ perchè torna a sparire la variazione.

Ponendo $x = -1$ abbiamo

$$f = \xi^4 - 15\xi^2 + 21, \qquad \frac{1}{\xi}\varphi = 4\xi^2 - 28$$

$\xi = \sqrt{1,6}$ dà $f = 0$ ed $I(f, \varphi) = 1$; $\xi = \sqrt{7}$ dà φ ed $I(\varphi, f) = -1$. L' altro valore $\xi = \sqrt{13,4}$ supera il confine, 3,4, e perciò è inutile tenerne conto.

Nel rettangolo limitato da $\xi = 0$, $x = 0$, $\xi = \sqrt{0,6}$ $x = -1$ non cade alcuna radice, perchè l' indice $I(\varphi, f)$ è nullo in tutto il suo circuito. Serve di riprova che l' indice $I(f, \varphi)$ ha in $x = 0$, $\xi = \sqrt{0,59}$ il valore $+1$, ed in $\xi = \sqrt{0,6}$, $x = -0,01$ il valore -1, quando il lato $\xi = \sqrt{0,6}$ si percorre nel senso delle x negative, come dee farsi, perchè l' intero circuito rettangolare si percorre girando nel senso positivo; cioè il lato $\xi = 0$ nel senso delle x positive, il lato $x = 0$ nel senso delle ξ positive, il lato $\xi = \sqrt{0,6}$ nel senso delle x negative, e finalmente il lato $x = -1$ nel senso delle ξ negative.

Ponendo $x = 1$ abbiamo

$$f = \xi^4 - 15\xi^2 + 9, \qquad \frac{1}{\xi}\varphi = -4\xi^2 + 16;$$

$\xi = \sqrt{0,63}$ dà $f = 0$ ed $I(f, \varphi) = -1$, perchè la f da positiva si fa negativa; $\xi = 2$ dà $\varphi = 0$ ed $I(\varphi, f) = 1$.

Viene da ciò che una radice cade dentro del rettangolo limitato da $\xi = 0$, $x = 1$, $\xi = \sqrt{0,6}$, $x = 0$. Infatti l' indice $I(\varphi, f)$ ha il valore $1 + 1 = 2$ corrispondente a $\xi = 0$ e $x = 0,4$, ed a $\xi = \sqrt{0,6}$ e $x = 0,4$ (giacchè quando quel lato $\xi = \sqrt{0,6}$ prendesi nel verso delle x negative l' indice $I(\varphi, f) = -1$ trovato di sopra diventa $+1$). Serve di riprova che

$I(f, \varphi) = -1 - 1 = -2$ dipendente da $\xi = 0,6$ e $x = 0,96$ e da $x = 0$, $\xi = \sqrt{0,595}$ (giacchè quei due lati del circuito deggiono percorrersi in verso opposto a quello delle x positive e delle ξ positive).

69. Potremo dunque considerare come non molto discosta da una radice la $x + \xi\surd = 0,5 + \surd.0,4$. Seguendo il § 43 dopo di aver calcolato la prima tabella colla cifra $a = 0,5$

	1	+0	+900	−6000	+50000
5′	1	+5	+925	−1375	+43125
	1	+10	+975	+3500	
	1	+15	+1050		
	1	+20			

faremo il trasporto dei termini e calcoleremo le seguenti tabelle prima colla cifra $a = 0,4$ poscia coll'altra cifra 0,2 cercando che gli ultimi termini 6621 16680 si avvicinino alla proporzionalità coi penultimi +1340, +11736, che nelle tabelle successive diverranno i loro divisori.

	1	+ 0	−1050	+ 0	+43125	−20	+ 0	+3500	+ 0
$\surd.4'$	1	+ 4	−1034	−4136	+26581	−20	− 80	+3180	+12720
	1	+ 8	−1002	−8144		−20	−160	+2540	
	1	+12	− 954			−20	−240		
	1	+16							
$\surd.2'$	1	+18	− 918	− 9980	+6621	−20	−280	+1980	+16680
	1	+20	− 878	−11736		−20	−320	+1340	
	1	+22	− 834			−20	−360		
	1	+24							

Rifatto il trasporto dei termini, anche nella scelta delle cifre $-1'$, $-4''$ avremo in vista di ridurre gli ultimi termini proporzionali ai penultimi tra loro permutati, e siccome uno di questi è circa decuplo dell' altro, così si deve aver cura di rendere molto piccolo l' ultimo termine che sta vicino al maggiore dei penultimi

	1 + 20 + 854 + 1540 + 6621	24 + 360 + 11736 + 16680
— 1′	1 + 19 + 815 + 525 + 6096	24 + 356 + 11400 + 5280
	1 + 18 + 797 — 272	24 + 312 + 11088
	1 + 17 + 780	24 + 288
	1 + 16	
— 4″	,01 + 1,56 + 775,76 — 5815,0 + 652860	2,4 + 278,4 + 109766,4 + 88954
	,01 + 1,52 + 767,68 — 8885,7	2,4 + 268,8 + 108691,2
	,01 + 1,48 + 761,76	2,4 + 259,2
	,01 + 1,44	

	,01 + 2,4 — 761,76 — 108691,2 + 622860	— 1,44 — 259,2 — 8885,7 + 88954
√6″	,01 + 2,46 — 747,00 — 115175,2 — 46179	— 1,44 — 267,84 — 10492,7 + 25978
	,01 + 2,52 — 731,9 — 117565	— 1,44 — 276,5 — 12152
	,01 + 2,6 — 716	— 1,4 — 285
	+ 3	— 1
— √4‴	,003 — 7,17 — 11727,8 + 732	— ,001 — 2,85 — 1205,8 + 30793
	,003 — 7,18 — 11699,1	— ,001 — 2,85 — 1192,4
	,003 — 7,19	— ,001 — 2,84

	,001 + 7,19 — 1192,4 + 732	,001 + 2,84 + 11699,1 + 30793
— 2‴	,001 + 7,19 — 1206,8 + 3146	,003 + 2,83 + 11693,4 + 7406
	+ 7,2 — 1221	+ 2,8 + 11688
	+ 7	+ 3
— 6ⁱᵛ	,07 — 122,5 + 3881	,03 + 1168,6 + 394
	,07 — 122,9	,03 + 1168,4

	— 0,07 — 1168,4 + 3881	— 0,03 — 122,9 + 394
√. 3ᵛ	— ,07 — 1168,6 + 375	— ,03 — 123,0 + 25
	— 1169	— 123
√. 3ᵛ	— 116,9 + 24	— 12,3 — 12
√. 2ᵛⁱ	— 11,7 + 1	— 1,2 — 14

	— 1,2 + 1	+ 11,7 — 14
1ᵛⁱ	— 1 0	+ 11,7 — 2
2ᵛⁱⁱ		+ 1,2 0

Raccogliendo tutte le trovate cifre (segnando col — sovrapposto le negative) si ha la radice cercata

$$0{,}4\bar{4}\bar{2}\bar{6}012 + \surd.\,0{,}66\bar{4}332 = 0{,}3574012 + \surd.\,0{,}656332$$

che pienamente si accorda con quella determinata dallo Spitzer.

70. Siccome l' equazione ha i coefficienti reali, così si scorge subito che la parte reale dell' altro paio di radici sarà —0,3574012 calcolando con tutta questa quantità la solita tabella, come qui si vede

	1 + 0	+ 9	— 6	+ 5
— 0,357401·2		,107220·4	— 2,738 320·7	+ 2,778 679·1
		17870·0	456 386·8	463 113·2
		2501·8	63 894·1	64 835·8
		143·0	3 651·1	3 704·9
		4	9·1	1·8
			1·8	9·3
	1 — ,357401·2	+ 9,127735·6	— 9,262 263·6	+ 8,310 344·1
			— 2,814 962·0	
		+ ,255471·2	469 160·3	
			65 682·4	
			3 753·3	
			9·4	
			1·9	
	1 — ,714802·4	+ 9,383206·8	12,615832·9	
		383206·8		
	1 — 1,072203·6	+ 9,766413·6		
	1 — 1,429604·8			

la trasformata deve avere la radice $\xi \surd$, e perciò essa si decomporrà in due equazioni del 2.° e del 1.° grado, che infatti hanno la radice comune

$$\xi^2 = -8{,}824700$$

	1	— 9,766413·6	+ 8,310344·1
8	1	— 1,766413·6	— 5,820964·7
	1	+ 6,233586·4	
8′	,01	+ ,703358·64	— ,194095·7
	,01	+ ,783358·6	
2″	100·	+ 78535·86	— 37024·0
	100·	+ 78735·9	
4‴	1·	+ 7877·59	— 5513·6
	1·	+ 7881·6	
7^{v}	·01	+ 788·23	+ 4·0

	1,429604·8	— 12,615832·9
8		— 1,178994·5
8′	142960·48	— 35310·7
2″	14296·05	— 6718·6
4‴	1429·60	— 1000·2
7^{iv}	142·96	+ ·5

71. Nella memoria del Gauss citata nel § 8 ed intitolata *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen.* 1849, si veggono esposti per la risoluzione delle equazioni trinomie quasi identicamente i metodi da me dati fino dal 1845 nella Nota IV della mia memoria; cioè quello per le radici reali col mezzo dei logaritmi additivi, e quello per le radici immaginarie mediante le tavole trigonometriche. Per dare un esempio del primo di questi metodi, che mi sembra dotato di somma comodità, scelgo l' equazione trattata nel § 60

$$10\,x^{\sqrt{2}} + 1 = 10\,x\,;$$

nelle tavole dei logaritmi additivi prendo $A = 1 + \sqrt{2}\ \lg x$, da cui facilmente si deduce il $\lg(10\,x) = 1 + \lg x$, il quale sottratto dal C corrispondente ad A dà l' errore, che si divide per la differenza appartenente a C (la quale si trova nelle tavole) diminuita della differenza che riceve il $\lg(10\,x)$ quando ad A si attribuisce la differenza 0,00100, e così si ottiene l' errore di A, che tolto da A conduce ad una seconda posizione. Qui si vede come partendo una volta da $A = 0$, ed un' altra volta da $A = 1$ si trovino prontamente le radici della proposta equazione

A	C	lg (10 x)	Errore	Errore di A
0,000	0,30103	0,29289	814 : (50 — 70,7) =	— 39,3
0,040	0,32149	0,32118	31 : (52 — 70,7) =	— 1,66
0,04168	0,32237	0,32237 = lg 2,1007		
1,000	1,04139	1,00000	4139 : (91 — 70,7) =	203
0,800	0,86389	0,85858	531 : (86 — 70,7) =	35
0,765	0,83385	0,83383	2 : (85 — 70,7) =	0,14
0,76486	0,83373	0,83373 = lg 6,8192		

72. Esempio 12.° Prendo un ultimo esempio dallo Spitzer

$$x^6 + x + 1 = 0$$

si ponga $x = r\gamma^{\varphi}$ sarà $r^6\gamma^{6\varphi} + r\gamma^{\varphi} + 1 = 0$, che può scriversi sotto le due forme $r^6\gamma^{5\varphi} + r + \gamma^{-\varphi} = 0$, $r^6 + r\gamma^{-5\varphi} + \gamma^{-6\varphi} = 0$, le quali colle loro parti immaginarie danno

$$\varphi^6 \operatorname{sen}(5\varphi) - \operatorname{sen}\varphi = 0\,, \qquad r \operatorname{sen}(5\varphi) + \operatorname{sen}(6\varphi) = 0$$

sicchè eliminando r si ottiene l' equazione ad una sola incognita

$$\operatorname{sen}^6(6\varphi) = \operatorname{sen}\varphi \,.\, \operatorname{sen}^5(5\varphi)$$

e coi logaritmi

$$6 \operatorname{l} \operatorname{sen}(6\varphi) - 5 \operatorname{l} \operatorname{sen}(5\varphi) - \operatorname{l} \operatorname{sen}\varphi = 0$$

Prendendo per φ un angolo piccolo si è condotti ad accrescerlo, così partendo dalla posizione $\varphi = 0{,}231$, a cui si attribuisce la variazione o differenza 0,001 si ha

		differ.
6 l sen 1,386 =	9,4884	— 170
— 5 l sen 1,155 =	— 9,9350	+ 43
— l sen 0,231 =	— 9,5502	— 18
Errore =	32 :	— 145 = — 0,221

togliendo l' errore da $\varphi = 0{,}231$ si avrebbe $\varphi = 0{,}231221$; ma sarà meglio far la correzione nel $6 \operatorname{l} \operatorname{sen}(6\varphi)$, che è il termine più influente, essa sarà

$= 0{,}221 \times 170 = 381$, perciò $6\,\mathrm{l\,sen}\,(6\,\varphi) = 9{,}4846$, e la seconda posizione darà

$$\begin{array}{rrr} 6\,\mathrm{l\,sen}\;1{,}387345{\cdot}2 = & 9{,}484600{\cdot}0 & -171 \\ -\,5\,\mathrm{l\,sen}\;1{,}156121{\cdot}0 = & -\,9{,}934038{\cdot}5 & +\;42 \\ -\;\;\mathrm{l\,sen}\;0{,}231224{\cdot}3 = & -\,9{,}550562{\cdot}2 & -\;18 \\ \hline \text{Errore}\;- & 7: & -147 = 0{,}048 \end{array}$$

$-171 \times 0{,}048 = -8$; quindi il valore esatto è

$$6\,\mathrm{l\,sen}\,(6\,\varphi) = 9{,}484600{\cdot}8\,,$$

che dà $\varphi = 0{,}231224{\cdot}17$, ed una delle cercate radici è

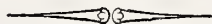
$$0{,}790667 + \surd\, 0{,}300507.$$

(*Letta il 22 giugno 1856*).

DELLA LEANDREIDE

POEMA ANONIMO INEDITO

RAGIONAMENTO

DEL M. E. CAV. EMMANUELE A. CICOGNA

Quantunque a' cultori dell' antica italiana poesia non sia sconosciuto l' anonimo e tuttora inedito poema in terza rima intitolato Leandreide, scritto da autore che fioriva al principio del XV secolo, cioè tra il 1400 e il 1430, nondimeno piacemi di darne maggiore contezza; imperciocchè, oltre a non poche bellezze di lingua e di stile, le quali nè dal Quadrio, che fu il primo a farlo noto, nè da altro posteriore, furono osservate, ci presenta i nomi di alcuni illustri veneziani poeti, sendo veneziano egli stesso l' autore.

Dividerò quindi in quattro capi il mio ragionamento. Nel primo dirò delle parole e della poesia della *Leandreide.* Nel secondo de' poeti che vi sono nominati. Nel terzo de' codici che se ne conoscono. E nell' ultimo esporrò alcune mie conghietture per iscoprirne l' autore.

Nessuno ignora la breve storia degli amori di Ero e di Leandro, narrataci da Museo in un poemetto il quale, sebbene non dettato nei tempi più felici della greca poesia, pure non manca di merito nella tessitura, nella grazia, nella forza delle descrizioni e nell' armonia dello stile. E già le molte edizioni e traduzioni or fedeli, or libere, che se ne fecero in presso che tutte le lingue danno certa prova della grande estimazione in cui salì. Ma il soggetto del poema, come parimenti ognun sa, divenne già un punto di controversia. V' è chi sostenta vero lo avvenimento, adducendone a pruova l' antica tradizione, e il nome dei due amanti dato da tempo immemorabile alle due torri poste sui lidi dell'Ellesponto, e le antiche medaglie, ne' riversi delle quali vedesi ora Leandro preceduto da

Cupido che vola dinanzi a lui con una face in mano per guidarlo nel periglioso tragitto del mare; ora il busto di Leandro immerso nell'acqua fino alle spalle; ora Ero sopra una torre la quale tiene una lampada in mano per rischiarare Leandro che preceduto da due delfini traversa a nuoto l'Ellesponto; ora il busto di Leandro con una mezza luna la quale indica la notte, tempo in cui egli recavasi ad Ero. Ed è per taluni pruova della verità del fatto anche le tenerissime epistole che finge Ovidio scritte l'una da Leandro ad Ero, e l'altra da questa a quello, che sono la XVII e la XVIII fralle sue Eroidi. Ma tali altri negano la verità del fatto, dicendo non esser possibile, che un uomo per quanto forte e robusto sia, tragittar possa a nuoto la corrente dell'Ellesponto (che dicono esser di sette stadii cioè 875 passi) nello spazio di due o tre ore, quante ne poteva avere Leandro se voleva starsene nascosto. A rispondere a costoro basta l'esempio di lord Byron (1). Con tuttociò possiamo negargli la qualità di *poemetto* storico, e considerarlo come un semplice *romanzo di amore*, che fu per avventura dagli antichi ideato per mostrare le temerarie azioni alle quali egli conduce, e gli accidenti funesti che indi ne possono seguire.

Ma qui non è proposito il sostenere più l'una che l'altra opinione. Dirò solamente che l'anonimo siegue nel fatto la narrazione di Museo e di Ovidio, aggiungendo che Ero sacerdotessa di Venere, aveva consacrata la sua virginità a Diana; che una certa *Manto* nutrice di Leandro recava ad Ero le lettere d'amore, mentre la nutrice di Ero cercava distornela sì per la contrarietà dei genitori e de' fratelli, sì per lo timore della vendetta di Diana; che Diana per vendicarsi dell'infida vestale priega Nettuno suo zio a suscitare i venti quando Leandro è nel tragitto, ond'è ch'egli rimane affogato; che non contenta la Dea, vuole la morte eziandio di Ero; quindi discende allo inferno, ordina al Pianto d'impadronirsi della giovane dormiente e inscia ancora della morte di lui. Ero si sveglia furiosa, corre al lito, mira l'estinto, e di tutta veemenza su lui si getta e muore. Venere dolente supplica gli dei ad evocare dall'Averno i due amanti, e convertiti in due stelle li pone in mezzo della fronte alla Lira, ossia ad Astrea. E nel tempo stesso converte le due nutrici in due sassi che immobili stanno a' piedi del loro sepolcro.

D'onde abbia l'anonimo prese coteste ulteriori circostanze, non saprei, ma forse dal suo poetico cervello. Comunque sia, non parmi che disdicano alla natura del componimento. Ma passo al capo I.

CAPO I.

Delle parole e della poesia della Leandreide.

Non puossi revocare in dubbio che l'autore, sebbene veneziano di nascita, si mostri versatissimo nello studio degli antichi toscani poeti, e spezialmente di Dante e del Petrarca, del quale egli stesso dice *che leggeva* e *scriveva sempre* (1 *a*). Aveva infatti convertito in succo ed in sangue quelle letture, e ne fa ogni qual tratto tralucere il frutto sì nelle nude voci usate già da que' sommi e da altri del beato secolo della lingua, sì nella connessione delle parole, e nelle imitazioni, descrizioni, e comparazioni da lui assai opportunamente a luogo collocate. Nè solamente il suo poema infiorò di sceltissime antiche voci, ma molte di nuove adottò, le quali, provenienti per lo più dal latino sermone, avrebbero potuto essere anche da' contemporanei suoi adottate, e forse ne saranno state, ma nel Vocabolario non si veggono avvertite. Altre ebbe l'anonimo adoperate in senso diverso da quello che nel Vocabolario stesso ritrovasi. Altre finalmente usò egli assai prima che quegli autori de' quali va recando esempli il Vocabolario. Perlaqualcosa io conchiuderei che se gli Accademici della Crusca avessero avuto notizia di questo poema, sebbene di scrittore non toscano, non avrebbero isdegnato di trarne qua e là quelle voci che avessero stimate opportune ad aggrandire l'opera loro.

A ciò tutto arroge la vasta erudizione dall'autore mostrata nelle favole antiche e nelle storie, e l'opportuna applicazione loro; e la nobiltà e l'armonia del verso che pressochè dappertutto si sente, e i pensieri delicati e morali che sparge nell'opera sua, i quali il fanno considerare non solo per uno de' veneziani poeti del principio del secolo XV più colti, ma anche de' più morigerati, malgrado siasi posto a cantare gli amori di Ero e di Leandro. Che se talvolta v'è qualche licenza nelle rime, se v'è soprabbondanza di voci latino-italiane, e qualcuna eziandio del veneziano dialetto, ciò è attribuibile piuttosto al suo secolo, e al precedente in cui e Dante, e Petrarca, e Guitton d'Arezzo, e Boccaccio, e Guido Cavalcanti e altri rimatori, non avevan riguardo nello alterare talfiata le parole adattandole al ritmo; e di far grande uso di voci latine e provenzali, e altre non veramente attinte alla fonte dell' Arno. E oltracciò, avran avuta parte negli errori anche gli amanuensi, specialmente se talora il verso non regge alla misura.

Moltissimi esempli avrei potuto levare da questo poema ed esibirli in comprovazione di quanto espongo ; chè quasi ad ogni pagina ne conta : ma mi ristringo a' seguenti, avvertendo che ne fo il confronto col Vocabolario della Crusca dell' ultima edizione data per cura di Giuseppe Mannucci in Firenze nel 1833.

A. Fralle voci usate dagli antichi e dal nostro anonimo, sono *adornezza* (2), *allettare* per dare ricetto (3), *allumare* (4), *assennare* per fare avvertito (5), *attemparsi* (6), *covelle* (7), *dannaggio* (8), *delimare* (9), *dilettanza* (10), *dubbiare* (11), *impaludarsi* (12), *indonnarsi* (13), *inurbarsi* (14), *poetrìa* (15), *sempiternarsi* (16), *vaccio* (17), *strangosciare* (17 *a*), e fra' proverbii c' è *capo ha fatta cosa* (18), che fu già adoprato dall' Allighieri nell' Inferno, e dal Boccaccio nel Filocopo.

B. Voci parimenti usate dagli antichi, ma dall' anonimo in senso diverso che non apparisce inserito nel Vocabolario — Per esempio : *Brocca tuo strale in lei che non ti crede.* Qui è *broccare* per *piantare*, quasi *imbroccare*. Il Vocabolario l' adopra per *ispronare* il *cavallo* (19). *Chi tutto nevicato nella cera*, cioè colla barba bianca ; nel qual senso manca nel Vocabolario. In dialetto diciamo : *ghe scomenza a nevegar in testa* (20). *Io ti dirò senza levar bilancia*, cioè senza bilanciare quale de' poeti sia più degno (21). *Le hanno private delle lor radici.* Tale dizione *radici* l' anonimo la pone nello stesso senso in cui noi veneziani per vezzo diciamo : *care le mie raise ;* e non c' è nel Vocab. questo vezzeggiativo (22). *Ma bramo tanto udir sonare il sistro Dell' eloquenza tua.* — *Sistro* è qui preso figuratamente per *armonia* (23). *Causatore* in senso di causidico (23 *a*). *Afro sermone* invece di *Africano* (23 *b*).

C. Molte poi sono le voci pur inserite nel Vocabolario, ma con esempli tratti da scrittori moderni in confronto della età nella quale l' anonimo scriveva. Per mo' di esempio : *Sermoncello* (24), *Epidemia* (25), *Difesa* per opposizione (26). *Immansueto* (27). *Racimolare* (28). *Orzare,* cioè andare a orza termine marinaresco (29). *Disgannare* (30). *Rivoltura* parlando di cose inanimate (31). *Cincischiare* nel senso di parlar smozzicato (32). *Ceneroso* cosperso di cenere (33). *Spumeo* (34). *Trisulco* (34 *a*).

D. Fralle parole che trovansi in questa opera, e non nel Vocabolario, sono : *Bilinguare.* Il poeta priega Mercurio a far sì che la sua storia *dica il ver dove altri la bilingua* (35). *Ragionanza* per ragionamento (36), *Latrice* per portatrice (37), *Vicinia* per vicinanza. Questa voce non è nel Dizionario, nemmeno

nel senso di radunanza, consiglio comunale. Viene dal latino, e come anche *vernacola,* il Boerio l'ha compresa nel suo Vocabolario (38). *Parigio,* dal latino barbaro *parigium,* ossia spazio di mare (39). *Orditamente* per ordinatamente (40). *A quadro* e *a tondo.* Nel Vocabolario c'è *a tondo a tondo* (41). *Farlengo,* c'è solamente *farlingotto* che equivale a barbaro, ossia quegli che nel parlare mescola varie lingue (42). *Stemére* non temere (43). *Temanza* in luogo di temenza (44). *Equidistare,* c'è *equidistante,* ma non il verbo (45). *Vagolante,* toscana voce, ma che non è nel Vocabolario, bensì è *vagolare* con esempio di moderno, ch'è Annibal Caro, equivale a *leggero* in senso morale (46). *Cattedrato,* cioè seduto in cattedra (47). *M' impulcro,* mi abbellisco. Non c'è *impulcrarsi,* bensì *appulcrare.* Dante disse: *parole non ci appulcro.* E qui l'anonimo vuol dire: *mi fo bello* nel parlare di Antonio, di Guido, ec. (48). *Chiomare* per cingere la chioma di erbe o altro. Nel Vocabolario è *chiomato* e *chiomante* (49). *Caducifero* (50). *Vitto* per vivere (51). *Rispessare* per ripetere di spesso una cosa (52). *Prestinare* dal latino *prestino* (52 a). *Ceto* dal latino *coetus* unione (53 a). *Cerastelle* diminutivo di ceraste (53). *Linfatico* per forsennato (54). *Frenaglia* per frenella (55). *Discorparsi* per ispogliarsi del corpo, uccidersi, morire (56). *Nibulositate* (57). *Tricatenato* tre volte cinto di catene (58). *Intráno* per intrinseco (59). *Decuocere,* ossia cuocere, quindi *decotto, bollito* (60). *Funo* per morto, voce latina, usata già da Virgilio e da Properzio (61). *Fabulatore* per novellatore (61 a).

E. Siccome veneziano, introduce tal fiata qualche parola del nostro dialetto. *Affiubarsi* per affibbiarsi (62). *Stampo* per forma (62 a). *Cavarzerani,* per capi d'argine, sopraintendenti agli argini de' fiumi, o forse anche per gli uomini di *Cavarzere* (63). *Friso* per fregio (64). *Nenna* per balia (65). *Brasa* per brace (66). *Tolpo* per tolpone, albero noto, che però manca nel Dizionario del Boerio (67).

F. Licenze in grazia della rima, ponno segnarsi, *conscía* per conscia (68), *Escugia* per iscusa (69), *Tremolente* per tremolante (70), *Sezzao* per sezzajo (71), *Troglia* per Troia (72). *Desma* per decima, come avea detto centesma, millesma (73). Fa egli, come altri antichi poeti, consonanza di rime con due voci disgiunte: *colpo* con *vol po* cioè *ciò che vuole, può* (74), *corpo* con *or po,* cioè *ora può* (75). Ed usa eziandio riempitivo il *ne* aggiunto al verbo *fare,* come: *Ero mia, ora che fane?* che fai (76). Ma di ciò basti, sendone esempli simiglianti riferiti dagli scrittori della poesia italiana.

G. Imitò il nostro autore gli antichi, ove parlando d' Icaro dice :

1. Pulsa non sol la ripa ove cadeo
   Icaro poi che per la cera calda
   Sentìo spennarsi inobbediente e reo (77).

   Dante: Nè quando Icaro misero le reni
   Sentì spennar per la scaldata cera (78).

2. E l' aer bruno gli animai togliea
   Tutti dalle fatiche loro quando
   Nel talamo Leandro si mettea (79).

   Dante: Lo giorno se n' andava, e l' aer bruno
   Toglieva gli animai che sono in terra
   Dalle fatiche lor (80).

3. Et ella a lei : Nulla maggior tortura
   Che rimembranza del perduto bene
   Che qual non l' ha provato non si cura (81).

   Dante: Nessun maggior dolore
   Che ricordarsi del tempo felice
   Nella miseria (82).

4. Maggior peccato lava men vergogna (83).

   Dante: Maggior difetto men vergogna lava (84).

5. Dimanda e di tal peso or ti disgrava (85).

   Dante: Però d' ogni tristizia ti disgrava (86).

H. Fralle descrizioni, che molte ne ha l' anonimo, parvemi essere notande le seguenti :

1. Notte brillante :

Tutto Ellesponto dalle onde cosperse
Dei raggi della luna irradiava
Come sostanze trasparenti e terse.
Tal che la notte quasi similavā
Diurna luce e voce non s' udìa
Fuor che de l' acqua mossa che 'l passava (87).

2. Stato innocente di Ero :

Quivi negli atti pietosa e benigna
Del corpo immaculata e della mente
Assai spregiava l' amorosa tigna.

Nè ciò che fosse amor si sogna o sente.
Molti l' avean richiesta al padre, ed ella
Il padre suo priegava istantemente:
Lasciami, padre mio, virgo e pulcella
Percioch' io m' ho dedicata a Diana:
E questo il padre avea concesso a quella (88).

3. Contrasto interno di Ero:

Pudicizia mi stringe ch' io difenda
Le membra inviolate. Amor mi sprona
Per far ch' io solo al suo servigio attenda.
E pietate non vuole ch' abbandona
Quel che lontan da me, di me si membra,
Nè altro chiede che me, nè altro ragiona (89).

4. Disperazione di Ero per la morte di Leandro:

Cominciò quivi ad ambe man ferire
Il volto, il petto; e nel volto e nel petto
Color purpureo cominciò apparire.
I fili d' oro onde adornato e tetto
Era il bel corpo squarciava e rompeva
Ferendosi nel viso e ne l' aspetto,
E fonte d' acqua dagli occhi correva (90).

I. Fralle similitudini e comparazioni non mi dispiacciono le seguenti, molte altre essendone, ch : per non attediare il leggitore sorpasso.

1. Leandro è impaziente di rivedere la sua Ero.

Siccome a' nauti cui fortuna guida
Ora in eccelso ed or quasi in profondo
La nave di salute alcuna infida,
Errato il mare ed a quadro ed a tondo,
La notte pare oltra il costume lunga
Sperando il giorno a rivedere il mondo:
Siccome a quei che aspettano che giunga
La sera per aver la sua mercede
Ciascun' ora del dì par che si allunga (91).

2. Ero paventa di palesare il suo amore alla nutrice di Leandro.

Quale diviene timido e smarrito
Quel ch' è trovato chiavare a la porta
Di qual vuol casa per rubare ardito,

Perchè non puote aver iscusa accorta
Tanto che cuopri la sua colpa grave
Che sola gli fa aver la faccia smorta:
E quale erubescenza Venere ave
Quando insieme con Marte ignuda e presa
Gli Dei la vider dalle reti prave
Cotal divenne ecc. (92).

3. Paragona il caldo dell' amore di Leandro col freddo dell' acqua marina:

Si come ferro di fornace opima
Estratto caldo perde in l' acqua fresca
Il fuoco in parte esteriore ed ima,
E nondimeno pria che del tutto esca
Lo intrinseco calor lunga ora passa
Fin che più volte e più non si rinfresca,
Così il caldo d' amore il qual trapassa
Per tutti i membri, a Leandro ghiacciarsi
Dal freddo equoreo non permette o lassa (93).

4. La nutrice di Ero dolente annuncia a que' di Sesto la morte degli sposi.

Non altrimenti vedendo già morta
Gran parte di parenti e di mariti
Nella città novellamente sorta,
Le misere Sabine tra' feriti
Di lagrime e di pianto tutte asperse
Si misero per farli dolci e miti;
Non altrimenti quando si sommerse
La nave di Castorre e di Polluce
I Greci che ciò udiro mesti ferse:
Che costei priva di sua cara luce
Correndo e lacrimando verso a Sesto
Come persona cui sommo duol cruce
Sen venne (94).

5. Battaglia descritta.

Quando del capitan suona la tuba
Ne l' oste, cavalier con cavaliero
Pedite con pedon ciascun s' affiuba,

Colui che si presume alto guerriero
E primo feritor corre nel campo
Degl' inimici cercando il primiero.
Al corso suo lasciando in terra il stampo
Percuote quello, e buttal della sella
Al piano, a cui non val schermo nè scampo.
Poi sul dorso di quello, cento in quella
Corrono e vanno, ed ei fuor di sè stesso
Non ha senso, nè moto, nè favella:
Vulnerato cotal rimasi adesso
Non sapendo s' io m' era o vivo o morto,
E dal dolore e dal timore oppresso (95).

K. Per ultimo ho accennato che l' anonimo sparge di detti e sentenze e riflessioni morali il suo poema, e ne riferisco in pruova alcune.

1. Non è donna sì casta che non prenda
Piacer udendo commendar sua forma
E bei costumi (96).

2. Non è sì duro cuor lo qual pregato
Con dolce voce e con parole blande
Non rivolga a pietà 'l voler spietato (97),

3. Dotta in secreto e semplice in palese (98).

4. Nelle povere case cotal vezzo (cioè di morbidezza)
Non vedrai già, nelle qual santa e pura
Abita Citerea con fama e prezzo:
Ma dove senza regola e misura
Prosperitate abbonda, ivi le menti
Superbe solo a voluttade han cura (99).

5. Di nostra vita torbida e meschina
L' ultimo dì si die sempre aspettare
Pria che beata si chiami o divina (100).

6. Troppa è villana cosa ad usurpare
L' onor altrui, al quale oro nè argento
Non si dee nè si puote equiparare (101).

7. O cieche insidie, o nostra sorte prava,
O specie umana nata alla fatica
Quanto e qual peso l' omero ti grava!

Qual sia sì stolto ch' uom beato dica
Sentendo soggiacer a più perigli
La vita nostra giovane ed antica! (102).

8. Creata fosti umana anima pura,
E tu per te tra molte quistioni
Mischiata t' hai onde sei fatta oscura (103).

9. Mille e mille ne son stati scarniti (cioè da Amore).
Breve è il piacere, lunghissimo è il duolo
Pochi rimedii, martiri infiniti (104).

10. Qualunque a gola intende ed a pecullo,
Chi vive tristamente accidioso
Colui dopo la morte certo è nullo.
Regno, forza, valor malizioso,
Tirannide, superbia et ira manca,
Ma vive sempre l' uomo virtuoso
Come perpetua cosa altera e franca (105).

11. Poi seguitando disse: O morte dolce
A' miseri, rimedio de' martiri,
Cara a chi avversità crudel soffolce;
O morte properata da gran viri,
Meglio è morir che vivere in miseria,
O morte degna cui sola desiri,
Sola esser puoi cagione e materia
Di finir ogni mio dolor mortale
Se tu fai questa a me suprema feria.
Non vive chi non sente altro che male
Morte è non vita, la vita di cui
Non gusta di fortuna altro che il sale (106).

12. (Parla Venere in sogno ad Ero).

Pensi tu che natura che 'n te porse
Tanta beltà, te la donasse in vano,
Di cui l' ordine indarno mai non corse?
Ben sai che' l volto formoso et umano
Atto ad amar convien che si conformi
Alle mie leggi, al mio consiglio sano (106 *a*).

CAPO II.

Cenni intorno gli antichi poeti nominati nella Leandreide.

Finge l' anonimo, con lunga digressione (107), che il suo signore Amore gli comparisca dinanzi accompagnato da grande comitiva di poeti. Un tale non conosciuto ancora dal poeta, gli espone aver tutti costoro cantato d' amore.

Tutti costoro nell' opere sue
Hanno cantato di questo Signore
Chi piano, chi alto, chi meno, chi piue (108).

Poi palesa sè essere Dante Allighieri in questo modo:

Firenze tosca cittade et opima
Mi generò, poi mi si fe noverca
Per invidia che sempre il ben delima.
L' osse mie son sepolte tra la cerca
Della città che casa da Polenta
Governa a molte miglia circumcerca.
L' alme morte, e di qual pena si penta
Chi muoja, e di qual vaccio al cielo sale
Cantai pria che mi fosse vita spenta.
Difesi ancor l' onor imperïale
Incontro a quei che sono a lui ribelli
Con latino sermone e solute ale.
Dante Aldigieri mi chiamaron quelli
Che mi conobber (109).

Va Dante enumerando all' anonimo cotesti poeti, già noti a lui per fama; ma, a dir vero, l' autore non ebbe alcun riguardo alle epoche giuste in cui fiorirono, come in seguito potrassi vedere. Fatta cotesta rassegna, Dante di sua mano incorona l' autore quale poeta, lo anima a continuare la sua storia e promettegli altra corona (110). Per la qual cosa l' autore prega Calliope a rasserenare la sua mente, e far sì che questa sua opera tra' vivi sia nota e famosa,

E non quale narciso e qual viola
In poca d' ora sia bella e deforme,
Ma duri de' scienti nella scuola (111).

In cinque schiere Dante, o meglio l'anonimo, divide i poeti: *Greci* antichi, *Latini* antichi, *Recenti*, che scrissero in lingua volgare e latina, *Recenti* che nella sola lingua volgare scrissero, e *Provenzali*. Notisi, per conoscere maggiormente la molta erudizione dell' anonimo, ch' egli non si concentra soltanto al nudo nome di cotesti poeti, ma il più delle volte li indica traendo una particolare circostanza della loro vita, o del loro carattere, o delle opere d' amore da quelli dettate. De' *Greci* ne annovera circa quarantacinque (112). De' *Latini* antichi circa cinquanta, e primo n' è *Virgilio* (113).

Per ciò che spetta a' *poeti recenti* in lingua volgare e latina ne mette *undici* (114). E siccome trovo da poter fare qualche osservazione a ciò che l' autore dice, così alcuni noto. In cima di costoro è *Gualfredo* di nazione inglese, e questi è certamente *Galfredo de Winesalt*, poeta de' più illustri del secolo XIII.— *Giovanni del Virgilio*, di cui l' anonimo in bocca di Dante dice:

> L' altro è colui che già lungo la foce
> Di Sarpina più volte mi ripresc
> Di mia cetra vulgar con canto atroce
> Joanni Faventino, e perchè intese
> E sanza pare seguitò Marone
> Virgilian fu detto alto e cortese.

Le quali parole si combinano colla già conosciuta epistola di *Giovanni del Virgilio* (che qui l' anonimo chiama *Faventino*, ma comunemente è detto Bolognese) nella quale si duole che Dante scriva il suo poema in volgare, e lo esorta a trattare invece in versi latini i grandi avvenimenti del suo tempo. Egli fioriva nel 1325. — *Lupo* da *Pava* è senza dubbio *Lupo* o *Lupato Patavino*, giudice e poeta latino, morto nel 1309. Nei Cenni sulle famiglie patavine impressi in Padova in questi ultimi anni, si è sbagliato nel chiamarlo *Tito Lovato*, male avendo interpretata la lettera T premessa a LOVATI, la quale significa TVMVLVS non TITI. — Di *Albertino Mussato* morto nel 1330, l'anonimo accenna alla tragedia Ezzelino che scrisse. — *Francesco Petrarca*, di cui l'autore dice: *essere glorioso ancora tra' vivi*, e sperarsi di vedere il poema dell' Africa rimasto dopo di lui, e che aveva ordinato fosse bruciato. Dal testamento del Petrarca non risulta che avesse ordinato di bruciare la sua *Africa*. Egli bensì ne aveva intenzione: e dicendo qui l'anonimo che il Petrarca è ancor *glorioso tra' vivi*, non intese già ch' egli fosse *vivo* quando esso anonimo scriveva la Leandreide, ma sì che la sua

fama era ancora illustre fra' superstiti. E ciò sia a correzione di quanto scrisse il Foscarini nella Letteratura a pag. 319, nella nota 275, e il Morelli (Operette T. I, 181) i quali credettero vivesse ancora il Petrarca quando l'anonimo componeva questo poema. Il Petrarca era già morto fino dal 1374, e l'anonimo, come vedremo, scriveva del 1429.— *Pietro dalla Rettorica*, cioè Pietro da Muglio bolognese. Il Tiraboschi (T. V, 843, 844, 845) non indica di lui alcuna opera, nè sa che ci sia rimasto alcun frammento di sì valente professore. Qui almeno l' anonimo ci dice che avendo saliti *ambi i gioghi di Parnaso*, cioè avendo scritto in ambe le lingue latina e italiana, *cantò i successi di Anna dopo la morte aspra, e di Elisa;* e aggiunse esser morto di morte *festina et improvvisa*. Ciò fu nel 1382.

Segue un veneziano, cioè *Pietro Polani*, di cui l'autore fa dire a Dante:

> Di Pietro fur le voci a laude degne
> Polani tuo coneive che si turba
> Che Roma è senza le due grandi insegne.

Infatti si sa che *Pietro Polani*, figliuolo di Giovanni, fu ambasciadore nel 1370 al cardinale albanese, cioè ad Angelico oppure Egidio Grimoaldi vescovo di Albano fratello di papa Urbano V, in Bologna per condolersi della morte di Urbano in quell' anno avvenuta, per lo che dice il poeta che *Roma era priva delle due grandi insegne*, cioè priva delle chiavi apostoliche attesa la vacanza della sede e priva dell' esser seggio dell' impero rappresentato dall' aquila romana. Il Polani tornò nel 1373 allo stesso cardinale albanese per le controversie insorte col vescovo di Castello Paolo Foscari circa le decime dei morti. Dal libro degli ambasciadori ho queste notizie; ma osservo che per la morte di Urbano, il Caroldo nella sua cronaca tuttora inedita dice essersi inviati oratori Andrea Gradenigo e Nicolò Contarini fu di Marco. Nel 1379, il Polani, abitante allora a san Basso contribuiva imprestiti per sostenere la guerra di Chioggia, siccome s' impara dall' elenco nel Gallicciolli (*Mem. venete*, T. II, pag. 114). Nè dall' Agostini, nè dal Foscarini fu notato tra' poeti o scrittori del secolo XIV *Pietro Polani* a' quali sfuggì questo passo della Leandreide.

La quarta schiera de' poeti recenti che scrissero, giusta l' anonimo, nella sola lingua volgare, ne comprende oltre cinquanta (115). Accenno alcuno. — *Cecco d' Ascoli* condannato al fuoco nel 1327, quale eretico, è introdotto da Dante nella Leandreide, colle parole: *Cecco d' Ascoli via mi carca il groppo*.

allusive certamente a quanto scrisse Cecco a carico dell' Allighieri, e che già notava il Tiraboschi. — *Antonio da Tempo,* cioè:

> Ed Antonio di Tempo vi consiglia
> Paduano a parlar dritto per rima.

Ed infatti è noto pel trattato *De rithmis vulgaribus,* composto da lui verso l'anno 1332. Il Vedova non lo inserì negli Scrittori Patavini. Il Tiraboschi lo dice *giudice padovano.* Si sa già ch'è diverso da *Antonio da Tempo* commentore del Petrarca. — L'autore registra tre poeti della famiglia *Pigafetta* già di origine toscana, da ultimo vicentina, e sono *Guglielmo, Nicolò* e *Matteo Pigafetta,* de' quali non veggo fatta menzione dal Crescimbeni, dal Quadrio, dal Tiraboschi, e nè anche dal Calvi negli Scrittori Vicentini; il quale però (oltre altri più recenti) ricorda un *Matteo Pigafetta* che non può esser quello dell' anonimo, poichè fiorì circa il 1479. — È poi interessante quanto Dante dice all' autore di tre poeti veronesi:

> Se temperi figliuol tua nuova penna
> Iscrivere potrai tre da Verona
> Che del parlar ciascun via più s' impenna.
> Gasparo Schuaro la cui lingua buona
> Già lesse in tua cittade il libro mio,
> Che via più piace quanto più si espona.
> Gaspar di Lancillotto è seco; e s' io
> Non fallo Enrico canonico viene
> Con loro assai e riverente e pio.

La notizia che *Gasparo Scuaro* (o meglio *Squaro* de' *Broaspini*) abbia spiegato pubblicamente Dante in Venezia, non si ebbe prima della Leandreide, e sulla fede dell' anonimo l' han varii ripetuta, taluni errando nel chiamarlo *Gabriello* anzichè *Gasparo,* e altri chiamandolo *Squarone,* come il Batines nella Bibliografia Dantesca (T. I, 578). Inutilmente poi ho chiesto notizie intorno gli altri due veronesi *Gasparo di Lancillotto* ed *Enrico canonico.* — Ultimo di questi poeti è *Marsilio* da *Carrara* del quale l' Allighieri dice all' autore:

> . . . . Se alzi il sopraciglio
> Vedrai tra questo nobile giardino
> Quel da Carrara paduan Marsiglio
> Che per la tirannia del suo fratello
> Ha istesso eletto volontario esiglio.

È notissimo già per le istorie patavine che nel 1373 Marsilio aveva ordita una congiura contra suo fratello Francesco da Carrara; che, scoperta, Marsilio fuggì da Padova, e si pose in salvo a Venezia, e che qui moriva dopo il 1379. Ma non consta, fuor che dalla Leandreide, che *Marsilio* fosse poeta.

Ora veniamo alla serie dei vati Veneziani, per la quale principalmente questo poema è conosciuto e venne citato e dall'Agostini e dal Foscarini e da altri. Dante, parlando sempre coll' anonimo, premette questi versi:

Se de' tuoi civi tutto il ceto bello
Io dovesse narrare, il mio sermone
Appena caperebbe esto libello.
Dironne alquante notabel persone (116).

Ne annovera dieciotto col proprio nome, parte noti, parte ignoti, quali poeti. In fatti, che *Giovanni Foscarini, Giovanni Gradenigo, Marino Dandolo, Bonaventura Baffo, Gabriele di Bernardo, Maffio da Pesaro, Marino, Pietro* e *Marco Grioni, Giovanni* e *Niccolò Boccassi, Andriolo Alemanno, Marino Michiel,* e *Bernardo Foscarini* fossero poeti non lo sappiamo se non se dall'autore della Leandreide. — I conosciuti d' altronde sono: *Giovanni Querini* già amico di Dante, il quale addirizzavagli alcuni sonetti che in un codice della Ambrosiana contengonsi con rime dello stesso Querini. — *Antonio dalle Binde*, che fu tra' congiurati di Marino Faliero nel 1355, del quale Antonio il dottore Giovanni Lami nel catalogo de' mss. della Riccardiana riferisce un sonetto fatto in persona del doge. — *Giacomello Gradenigo*, che morì innanzi al 1420; al quale spetta un documento del 1389, con cui i Perugini concedono, come a loro podestà, di potere portar le insegne del comune di Perugia, e dannogli il titolo di cavaliere; documento per mia cura pubblicato nel 1843 co'tipi del Gaspari. — L' Agostini non conobbe questa circostanza, ma però fece menzione dell' opera del Gradenigo in terza rima scritta nel 1399, intitolata *Storia Evangelica*, che in un bellissimo codice pecorino miniato si serbava fra quelli di Apostolo Zeno, ma oggi non più, perchè del 1797 trasportato in Francia non tornò altro fra noi: ne abbiamo però copia eseguita nel secolo XVIII appo i signori conti Manin. — E l' ultimo storico e poeta notissimo è *Lorenzo de Monaci,* defunto assai vecchio nel 1429, e del quale, come di Giacomello Gradenigo, aveva scritta la vita l' Agostini. L' anonimo colloca il *de Monaci* fra' poeti che scrissero anche in volgare; ma nulla di lui in questa lingua si conosce. Devo peraltro osservare intorno ad alcuno de' suddetti poeti: — 1.° Dante ricordando quel *Gabriele*

di Bernardo, dice che *cacciato fu di nostra città, sai perchè, fuori.* Tale espressione fa credere che *Gabriele* sia stato sfrattato da Firenze, ma il motivo m' è ignoto: forse perchè, sendo frate dell' ordine de' predicatori, declamando a Firenze più a favor di un partito che dell' altro, sarà stato cacciato da quello contro di cui parlava. Nè l' Agostini, nè il Foscarini, nè gli alberi patrizii o cittadineschi dicon verbo di quest' uomo che l' anonimo chiama *buon cantore.* — 2.° Il Mazzuchelli avendo male interpretato quanto disse l'Agostini, affibbia a' detti *Giovanni* e *Nicolò Boccassi* l' esame dello Statuto veneto, che fu solo appoggiato nel 1352 al padre di loro, cioè Albertuccio, ossia *Bertucci Boccassi.* — 3.° Avendo poi tanto l' Agostini quanto il Foscarini letto nel codice Trivigiano il cognome *Zironi* in cambio di *Grioni*, ch' è nel milanese e nel veneziano, non seppero di que' tre fratelli poeti trovare notizie. Io le trovai, e ne feci parola a pag. 508 del volume V delle *Inscrizioni veneziane.* — 4.° Del sopraccennato *Marin Michele*, di cui l' anonimo scrive che *l' infula sereno poi fece*, cioè che divenne vescovo, nessuna parola nell' Agostini e nel Foscarini. — Ora io dirò essere quegli *Marino Michiel*, canonico ravennate che succedette a *Paolo* nel vescovato di Cittanova ossia Emoniense, come dice l' Ughelli, ma il Coleti nelle Giunte osserva sembrare che sia succeduto a *Giovanni Grandi* patavino, e ciò nel 1364 o poco dopo, poichè in un atto del 1366 vi è già ricordato come vescovo. Egli v' era anche nel 1375, sendogli l' anno dopo 1376 stato sostituito *Nicolò di Agrigento.*

Terminasi finalmente la leggenda co' poeti *Provenzali* (117). Anche nella loro enumerazione mostrasi l' anonimo fornito di molte notizie sì dei nomi che delle circostanze di alcuni; e certamente deve averle cavate o dalla lettura de' codici Vaticani, o da copie di essi, i quali sono dal Quadrio e dal Crescimbeni indicati. È già noto che scrissero negli antichi tempi intorno a' *Provenzali* poeti il *Monaco dell' Isole dell' Oro, Ugo di San Cesario,* e il *Monaco di Montemaggiore.* E siccome questo *Ugo* scriveva le sue Vite nel 1435, e moriva nel 1450, avendo però estratto da quelle del Monaco dell' Isole dell' Oro, che lo precedette, essendo vissuto nel 1380, ed essendo morto nel 1408, così io tengo che da Ugo principalmente abbia attinto il nostro anonimo che viveva suo contemporaneo. Più moderno scrittore ne fu il *Nostradamo,* le cui vite de' poeti Provenzali tradusse il Crescimbeni, aggiungendovi di molte erudizioni; e fra' modernissimi sono a collocarsi: il *Raynouard* per la sua *Choix des poesies originales des Troubadours. Paris* 1818, volumi VI in 8.° e per la sua Gram-

matica e Lessico della lingua provenzale; e *Giovanni Galvani*, pel libro intitolato: *Osservazioni sulla poesia de'Trovatori e sulle principali misure e forme di essa confrontate brevemente colle antiche italiane.* (Modena, Soliani 1829, 8.°) e il *Ginguené* nel T. I, capo V, della Storia della Letteratura Italiana (Milano 1823, 8.°) ec.

Ecco, come l'anonimo s'introduce ad occupare in lingua provenzale tutto un canto del suo poema, ch'è l'ottavo del Libro quarto, intorno a quei poeti. Dopo che l'Allighieri gli ebbe mostrati i greci, i latini, e gl'italiani, dice all'autore:

> I' vedo ben che miri e non dimandi
> Quest' altra turba donde surse e quale:
> Ma questo mio fratello uopo è che 'l pandi.
> Però quella sua lingua provenzale
> Non ho ben pronta: Et ei come disposto
> Di compiacerli con atto morale
> Cotal parlare incominciò tantosto.

Qui Dante apparisce non tutto pratico della lingua provenzale; il che non so se menar si possa buono all'anonimo. Dante poi chiama suo fratello *Arnaldo* di Provenza, ossia *Arnaldo* de *Mervoil* o di Meraviglia, poeta grazioso morto del 1220, del quale il Petrarca ha rammentato il nome nel capitolo quarto del Trionfo d'Amore, chiamandolo *il men famoso Arnaldo.* Infatti il più famoso era *Arnaldo Daniello*, vissuto circa il 1189, chiamato dal Petrarca in quel luogo *gran maestro d'Amor,* e nominato molto onorevolmente dall'Allighieri nel canto 26 del Purgatorio, e nel Trattato de *Vulgari eloquio*, dandogli il primato fra tutti i poeti provenzali; e non saprei perchè Dante anzichè scegliere per istruttore dell'anonimo il suo *Arnaldo Daniello*, in bocca di cui nel detto canto 26 pone anco versi in lingua provenzale, abbia invece scelto *Arnaldo di Merviglia* meno famoso. — È soverchio che io qui ripeta i nomi di cotesti poeti, già d'altronde conosciuti, parecchi de' quali sono que' dessi dal Petrarca nel suaccennato capitolo rammentati, ed illustrati dai commentatori di lui. Ma per quanto abbia io rintracciato non trovai nè nel Crescimbeni, nè nel Quadrio, nè nei posteriori Raynouard, e Galvani, il nome che mi esibisce l'anonimo di *Pier Pomarol*, il quale potrebbe essere confuso con tanti altri poeti provenzali che portavano lo stesso nome.

CAPO III.

Codici della Leandreide, da me conosciuti.

I Codici contenenti questo poema, scritti senza dubbio a' tempi dell'autore, cioè ne' primi anni del secolo XV, e che io conosco, sono tre solamente, che per chiarezza indicherò co' tre nomi: *Milanese*, *Trevigiano*, *Veneziano*.

1. Francesco Saverio Quadrio nel Volume IV a p. 429, 430 della Storia e Ragione d' ogni poesia (Milano, 1749, 4.°) fu il primo a darci contezza di questo poema, e del codice che nella *Libreria del Monistero di Sant'Ambrogio in Milano* a' suoi tempi si conservava, e che ora non si sa dove esista. In effetto, fino dall' agosto 1855, avendone richiesto al chiarissimo Bernardo Galli dottore della Biblioteca Ambrosiana, e al chiarissimo *Francesco Rossi* dottore bibliotecario di Brera, ambidue mi hanno fatto assapere che in nessuna di quelle librerie, nè nel capitolo di S. Ambrogio, e nè anche nell' archivio di S. Fedele quel codice, già veduto e descritto dal Quadrio, si trova; nè essere a maravigliare se i libri già spettanti all' insigne monastero di S. Ambrogio, e gli altri delle soppresse corporazioni non sieno passati tutti esattamente alle attuali biblioteche dello Stato, cui vennero destinati. Ciò posto, il Quadrio descrivendo il codice e il poema dice: Essere manoscritto in folio col num. 174. Nel principio leggersi in latino, secondo l' uso di que' tempi ch'era di appiccare all' opere italiane i titoli in lingua latina, *Leandrheris*: e poi: *Incipit hujus Leandrheridos liber primus. Continet locum, modum, causas, de quibus mediantibus Leander primum incidit in Heros amorem. Cantus primus in quo Auctor describit tempus, quando opus illud aggressus est, et prohemizatur ad totam Leandrheridem ystam.* Il principio è:

Era già il tempo, nel qual Phetonte arse
Per mal guidar la quadriga paterna.

Prosiegue il Quadrio a dire, essere diviso il poema in quattro libri. Il primo contenere dieci capitoli; il secondo ventinove, ma cominciare dal secondo e contarne trenta; il terzo undici, ed il quarto venti, che formano settanta capitoli dall' autore nominati canti. In fine del codice leggersi: *Explicit Leandrheris . . . . . Scriptus in Tarvixio, compilatus per excellentem poetam dominum*

Joannem de Bocassis de Certaldo, 1425. Riflette poi il Quadrio, che dove sono i puntini avanti la parola *scriptus* ivi era il nome di chi lo aveva copiato, nome che nel codice è cancellato e corroso. Null' altro posso io soggiungere su questo codice, che avrei ben amato di poter esaminare, spezialmente per conoscere se quell' epoca 1425 attribuir si possa piuttosto alla composizione che alla copia, e per confrontare con quello alcuni passi non intelligibili de' seguenti due codici.

2. Nella biblioteca comunale di Treviso esiste, ed ho veduta più volte una copia della *Leandreide*, che qui descrivo: Codice cartaceo in 4.° piccolo del secolo XV, di carte in tutto 127, con gli argomenti de' capitoli, o canti in carattere rosso, e tutto il rimanente in nero. Comincia: *Leandris incipit — hujus Leandridos liber primus chontinent* (così) *lochum modum causasve, quibus mediantibus Leander primum incipit* (così) *in Hero amorem. — Chantus primus in quo Autor describit tempora quomodo* (così) *opus istud agressus est et proemizatur ad totam Leandridam istam.*

Era za il tempo nel qual Phetone *(così)* arse.
Per mal gidar *(così)* la quadriga paterna.
Finisce: Dato chon priegi alchuno aiutamento.

E dopo le parole EXPLICIT . LIBER . LEADRI (così) et HERO, scritte in rosso, avvi in nero l' epoca 1355 scritta in caratteri romani così MCCCLV. Da varie memorie che seguono di altre e più recenti mani si conosce avere questo codice del 1619 appartenuto ad un Fioravante, ch' era per certo della famiglia Azzoni Avogaro; e del 1627 ad un Nestore Azzoni Avogaro, nella quale Trevigiana illustre famiglia fu sempre conservato fino al 1836, in cui venne comperato dal prete *Alvise Costantini*, che vi appose un' analoga annotazione. Dagli eredi poi del Costantini acquistollo per la biblioteca comunale suddetta il chiarissimo mons. Canonico Guecello Tempesta. — Quanto al contenuto e alla divisione del poema è tal quale ce l' aveva descritto il Quadrio, tranne che il Codice Trivigiano è pieno di errori di trascrizione, di ommissioni, e di trasposizioni di versi, a segno che in moltissimi siti non se ne cava netto il senso, oltre allo storpiamento di molti nomi proprii de' poeti greci, latini, italiani e particolarmente de' provenzali, segno evidente che il copista non intendeva la lingua (118). Qual sia prima o seconda copia di questi due codici Milanese (ossia Ambrosiano) e Trivigiano (ossia Avogaro), non saprei decidere; ma se sto a quanto dice il Tiraboschi (Vol. III, 220 della Biblioteca Modenese) ove di Giovanni da Mo-

dena, la copia più recente sarebbe l'Ambrosiana. — Una moderna trascrizione del Codice Trivigiano conservasi nella Marciana al num. 148, classe IX degli Italiani, e ne fu trascrittore un Lorenzo Bolis nel 1742. — Su questa copia l'Agostini e il Foscarini fecero probabilmente le loro osservazioni, piuttosto che sull' antica posseduta *gelosamente* (dice l' Agostini) da mons. Rambaldo degli Azzoni Avogaro, canonico di quella città.

3. Bello assai è il Codice che scopersi fino dal 1846, e che io chiamo Veneziano, del quale ho fatto cenno a pag. 508 del Volume V delle Iscrizioni. Esso è veramente del secolo XV, non del XIV, come a torto ho detto in quella pagina. È in fol. di nitissimo carattere rotondo nero, con iniziali miniate di rosso, di verde, d' azzurro, e co'titoli di ogni canto in rosso, e comprende carte numerate da ambe le parti 154. Comincia con abbreviature: *Leandeus incipit. Hujus Leandri liber primus continet locum, modumque, causas quibus mediantibus Leander primum incidit in Heros amorem. Et in hoc primo cantu auctor describit tempus quando opus istud aggressus est. Et prohemizatur ad totam Leandridon istoriam.* L' opera ha lo stesso principio, divisione e fine che nei precedenti due codici; ma in questo Veneziano non apparisce alcuna data, nè nome di autore, ma soltanto quello del trascrittore, ch' è posto bizzarramente così: *PE . Deo . tr . grās . us . amen . s̄cit;* cioè *Petrus scripsit . Deo gratias . amen* . Del resto non va privo nemmen questo di scorrezioni, ma, a quanto mi risultò dal ragguaglio con quello di Trevigi, parmi assai meno manomesso dal copiatore. E se avessi a conghietturare direi che questo Veneziano è trascritto da mano toscana, o che lungo tempo dimorò in quelle regioni. Imperciocchè ci trovo più volte la voce *sanza, piatà, piatosamente, allotta, otta*, ecc., mentre per lo più nel Trivigiano leggesi *senza, pietà, pietosamente, allora, ora* ecc. Inoltre nel Trivigiano la *g* è mutata quasi sempre in *z*, come *zià* per *già*, *Zironi* per *Gironi*, ossia *Grioni* cognome di famiglia. — Il Trivigiano dice *ma se di niente*, e il Veneziano *ma se di covelle*, ed è pure in questo frequentissima la voce *vaccio* invece di *tosto*, ed altre toscane. Ma ciò che rende il Veneziano più pregevole del Trivigiano sono le annotazioni marginali, ed interlineari, parte italiane e parte latine, sparse qua e là, talune delle quali tendono alla spiegazione di alcune voci, e il più danno in volgare la biografica storia degli Dei favolosi nominati spezialmente nelli canti 12 e seguenti fino al 20, ch'è l'ultimo del quarto libro. Per esempio: *Questa era opinione delli antichi che dicevano l' anima non haver riposo dumente il corpo stava inse-*

pellito o ver andava vagando per l'agere. — Per questo intende che le visioni che appaiono presso al giorno hanno più di credenza che le visioni apparenti in altra hora, e la rasone è perchè 'l cibo naturalmente è meglio digesto. — Linfa è una goccia ch' è dal cerebro e fa furiare. — Questo confirmando dice el petrarcha che ben può nulla chi non può morire (119).

CAPO IV.

Indagini sull' autore della Leandreide.

Il primo, siccome dissi, a dar notizie di questo romanzesco poema fu il Quadrio, il quale vi ha lette quelle parole che giova qui ripetere: *Scriptus in Tarvixio, compilatus per excellentem poetam dominum Joannem de Bocassis de Certaldo*, 1425. Non si lasciava però il Quadrio abbagliare da un così celebre nome; e rifletteva essere assolutamente falso che il Boccaccio ne fosse autore; e al Quadrio univasi anche il Mazzuchelli (Vol. II, P. III, p. 1369). In fatti nelli canti sesto e settimo del libro quarto, nei quali Dante apparendo in sogno all' autore fa un lungo catalogo di recenti scrittori in poesia italiana e latina già defunti, alquanti ne nomina, che non solamente erano vivi quando il Boccaccio avrebbe scritta quest' opera, ma che fiorirono del tutto dopo il Boccaccio. Aggiungo che fra que' trapassati poeti è nel canto settimo annoverato anche il Boccaccio, e sarebbe assurdo, ch' egli, se scrittore della Leandreide, avesse collocato sè stesso fra' morti. Pareva al Foscarini, che l' epoca 1355 che ha il Codice Avogaro ossia Trivigiano, potesse accordarsi con quella in cui l' anonimo dettava il poema; perchè l' autore parlando nel detto canto settimo di Giovanni Foscarini dice che spregiò più volte la tiara (ossia il corno ducale) *di che s' ornò costui Gian Gradenigo*. Ora il Gradenigo fu doge del 1355 e 1356; quindi sembrerebbe che fosse vivo quando l'anonimo scriveva. Ma primieramente il Codice Milanese, ossia Ambrosiano, legge *costì*, non *costui*, e inoltre da più siti apparisce che l'anonimo scriveva ben molti anni dopo la morte del Gradenigo. — Indagando poi quale esser potesse l' origine dell' errore circa l'anno 1355, e il nome del Boccaccio come autore, dico, che avendo io bene esaminato il detto anno segnato a caratteri romani MCCCLV nel Codice Avogaro, sono tirato a conchiudere esservi stato aggiunto da mano posteriore, e forse da quella di Fioravante, 1619, non combinandosi essa assolutamente coll' epoca del Codice, ch' è senza

dubbio del secolo XV. — E per ciò che spetta al nome del Boccaccio, egli è certo che avevamo nelle famiglie Veneziane del secolo XIV la *Boccasa* o *Boccasso*, ed essere vissuto un *Giovanni*, che abbiamo pur veduto ricordarsi anche dall' anonimo. E non solo in Venezia, ma anche in Trevigi c' era allora la famiglia *Boccasia* o *Bocasio*, d' onde papa Benedetto XI, della quale e del quale parlava a lungo *Antonio Scoti* nelle *Memorie del beato Benedetto XI.* (Trevigi 1737, 4.°). Egli è pertanto facile che il copiatore, forse Toscano, del Codice Milanese, trovato il latino nome *per excellentem poetam dominum Johannem de Bocassis,* abbiavi aggiunto di suo capriccio *de Certaldo.* E quanto poi all'epoca 1425, questa è certamente quella che più si accosta al tempo nel quale l'anonimo componeva la sua storia. Che se tutte coteste riflessioni non bastassero per decidere che l' autore non è il Boccaccio Certaldese, egli stesso in più di un sito si scopre per Veneziano. Nel libro secondo canto decimo scrive:

> I' vidi già, lettor, ne la mia terra
> Esser ridetto altrui che ne l' Adriano
> Lito per forza di marina guerra
> Rotto era suo navigio . . . .

Nel libro quarto canto sesto, Dante gli mostra fra gli estinti poeti *Pietro Polani,* ed aggiunge *tuo concive.* E più chiaramente nell'atto di schierargli dinanzi gli altri dice:

> Se de' tuoi civi tutto il ceto bello,

e in effetto tutti quelli che nomina son Veneziani. Ma tra' Veneziani dev'essere quest' anonimo stato poeta famigerato, perchè non poteva ignorarsi allora uno che scrisse un poema com' è il presente, in quattro libri, di settanta canti, contenenti terzetti in tutti mille settecento quarantuno. — Inoltre abbiamo veduto di sopra che egli stesso dice: Dante avergli incoronato il capo di mirto, quale di primo onore, averlo esortato a continuare nella Leandreide, e avergli promesso d' incoronarlo di nuovo, e avere l' autore bramato che l' opera sua sia nota e famosa almeno tra' suoi concittadini. E similmente verso la fine del poema, fingendo l' autore che le colombe di Citéra, e le rose fossero venute a circondar la sua camera e il letto suo, prega Apollo a somministrargli l'immaginato tema, *che forse*, dic'egli, *sarà l' ultima opera di maggior lode degna che questa non è.* E nello stesso libro quarto canto sesto, ove ricorda Francesco Petrarca, Dante gli dice : *di cui di giorno in giorno leggi e scrivi;* cosicchè sembra che cotesto anonimo spiegasse o commentasse le rime Petrarchesche.

Stabilito adunque che autore non ne è il *Boccaccio;* ma sì un Veneziano; che questo Veneziano deve essere stato a' suoi tempi chiaro poeta; e che questo poeta doveva esser vivo anche del 1429, nel qual anno, come si è detto di sopra, moriva il poeta *Lorenzo de Monaci* mostratogli fra i più, dall' Allighieri, è da esaminarsi quale fra i distinti poeti Veneziani, non nominati dall' autore, fosse vivente nel 1429, cui ascrivere peravventura si potesse la Leandreide; nella quale indagine nessuno entrò di quelli che mi precedettero, contenti solo di citare l' autorità dell' anonimo dove rammenta i moderni poeti latini ed italiani (120).

Ometto di parlare de' cronacisti Veneti che nel principio del secolo XV cantarono in terza rima le geste della repubblica e dei dogi; e li ometto perchè anonimi anch' essi, e incerto se tuttavia vivessero nel 1429 (121).

Conosciuti col proprio nome sarebbero i seguenti: *Pietro de' Natali* vescovo di Jesolo che pose in terza rima la venuta di Papa Alessandro III in Venezia (122). *Marco de Piacentini* e *Marco Recaneto* che hanno carmi in un codice Estense (123). *Leonardo Pisani* che ha una lauda da me pubblicata nel T. VI, p. 146 delle Inscrizioni Veneziane. *Antonio Cocco* autore di un sonetto stampato già dall' Allacci (124). *Filippo Barbarigo* che ne ha un altro impresso nel Crescimbeni (125). *Jacopo Valaresso* che fu laudese come il Pisani (126) e *Leonardo Giustiniano* laudese anch' esso illustre (127). Ma se ho bene esaminato tutti cotesti poeti morirono prima del 1429, tranne due, cioè *Marco Recaneto,* defunto nel 1465, e *Leonardo Giustiniano* nel 1446.

Cader dunque, a mio parere, dovrebbe la scelta sopra l'uno de' due. — *Marco Recaneto,* siccome attestava il Quadrio (Storia della volgar poesia, Vol. VII, p. 101) ha rime in un codice della biblioteca Estense. Sono due sonetti premessi al Canzoniere del Petrarca sino al foglio 82, dove si trova un altro sonetto, e una sestina dello stesso Recaneto, il primo con questa nota: *Marci Rechaneti ad requisitionem A. Venerii, ad gloriam Dive Laurae R. tempore trophaei facti in sala majori etc. 28 Octobris* 1459; e la seconda con questo titolo: *Sextina moralis edita per Marchum Rechanetum, qui diem suum obiit in Peloponeso, provisore domino Andrea Dandulo* 1465. Segue la seconda parte delle Opere del Petrarca, dopo la quale altri due sonetti del Recaneto. — Bramando io di verificare quanto il Quadrio qui ha detto, mi sono rivolto al chiarissimo marchese Giuseppe Campori di Modena, il quale con lettera 10 novembre 1856 dicevami, essere rimasto quel codice nella Estense fino all'anno 1796, epoca in cui venne insieme con altri trasportato in Francia, e collocato nella

Biblioteca nazionale di Parigi; essersi ricuperato nell'anno 1814, e rimesso nella Estense dove presentemente si trova. Esaminollo egli, e fecemi trascrivere e i sonetti e la sestina. Quantunque l' epoche di quelle poesie sieno 1459 e 1465, la data però in cui fu copiato il Canzoniere petrarchesco è 1447 indicata così: *KL sexto decembris MCCCCXLVII in Urbe,* cioè in Roma, e pare infatti che colà fosse l' origine del Codice, dicendosi: *Compro in Roma l' anno* 1651 *dal signor Alfonso di Giuliano Gioia affezionato delle rime di M.r Francesco Petrarca,* ec. L' illustre *Luciano Scarabelli* scoperse poco fa un' altra lunga poesia del Recaneto, in terza rima, in laude di Bartolommeo Colleoni, scritta allorquando nel 1455 gli fu dato da' Veneziani il comando generale dell' armi; la quale poesia fu però stampata soltanto alla fine del secolo XV, e probabilmente nel 1496, o 1497 per celebrare la scoperta della statua equestre di bronzo eretta in onore di lui nella piazza de'SS. Giovanni e Paolo; e tale poesia, di cui tengo copia, è segnata dall' autore così: MARCVS RECHANETVS SCRIPSIT. — Ora il vedere amalgamate le poesie del Petrarca con quelle del Recaneto; il sapere quanto fosse studioso di quello il nostro anonimo; lo scorgere qualche somiglianza di frasi e di stile nelle poesie del Recaneto con lo stile dall' anonimo manifestato nella Leandreide, mi aveva fatto dapprincipio decidere per lui nella scelta; ma poscia riflettuto all' epoca del suo fiorire, che parmi un po' troppo recente al paragone di quella dell' anonimo, mutai parere.

Preferisco pertanto *Leonardo Giustiniano,* anche per una circostanza che non riuscimmi di trovare applicabile al Recaneto. — In fatti questa mia scelta viene in qualche modo soffolta dalle parole dell' anonimo stesso nel libro quarto, canto settimo, in cui Dante gli fa vedere *Marin Michele* Veneziano, il quale, siccome ho detto di sopra, fu vescovo Emoniense. Ecco i versi.

> Marin Michel che l' infula sereno
>   Poi fece sì come anco il tuo germano
>   Di somma gravità maturo e pieno.
> Cui se lodare altrui non fosse vano
>   In cospetto de' suoi, so come e quanto
>   Lodar potrebb' io suo parlar soprano (128).

Cioè: *Questo che ti mostro è Marino Michiel ch' ebbe l' onore della tiara, come ebbelo anche tuo fratello, uomo ripieno di senno e di gravità la cui eloquenza io loderei in tua presenza, se non fosse inutile, poichè già lo conosci.* Ora Dante non intende di mostrare all'anonimo una persona defunta, com'erano

il Michiel e tutti gli altri, ma bensì una persona ancor viva, introducendola per incidenza e a modo d' esempio, e questa persona viva era il fratello dell' anonimo, cioè, a mio parere, *Lorenzo Giustiniano* vescovo poi patriarca.

In fatti, *Leonardo Giustiniano figliuolo di Bernardo,* nato circa il 1388, e morto nel 1446, dilettossi oltremodo della poesia specialmente italiana. Il padre degli Agostini ne scrisse la vita, ed io pure, dietro le traccie di lui, nelle Inscrizioni di S. Andrea della Certosa (II, 71, 72). Le canzoni di Leonardo erano avidamente ascoltate da ciascun genere di persone, nè si celebravano nozze civili, nè banchetti solenni che frammezzo non si udissero le poesie del Giustiniano. E siccome erasi dato a *cantare in versi di vario metro le fole ridicole de' poveri amanti* (parole dell' Agostini), così in più matura età, abbandonato lo studio delle rime profane, si è applicato a comporne di sacre, intitolandole *Laudi spirituali,* che furono già stampate con altre del Belcari citate dagli Accademici della Crusca. Nè solamente in canzoni sacre o profane occupossi Leonardo, ma eziandio in altro genere di metro, e l' Agostini riporta due suoi sonetti in risposta ad altri di Ciriaco de' Pizzecolli Anconitano; i quali sono:

I.

Quelle ample lode mie che in brieve carte
Conchiude in stile altiero e pellegrino
In te sol si converte ivi e il divino
Inzegno tuo traluce in mille parte.
E già gran tempo le tue laude sparte
Quanto si calcha il bel terren latino
Con tutto il cuor mi fero a te vicino
Ed un caldo disìo vago ad amarte.
Se cerchi in me virtù troppo lontano
Dal ver ti allonghi, chel celeste nume
Non come scrivi a me larga la mano,
Ma se amor cerchi un abbondante fiume
Vi trovarai dil tuo valor soprano:
Virtù honorando a se virtù risume.

II.

Qual sparir suole matutin pianeta
Al pander de le come aurate e bionde
Del sol che a men nocturna faza asconde
Con l' alma lampa sua diurna e lieta,

Tal dal suave suo stil vinta si aquieta
La sparsa fama tua. Nè già risponde
A l' alte rime unde si stilla e fonde
Accenti di ogni digno e gran poeta.
Sì suave harmonia tua voce rende
Che quasi Orfeo, Apollo, et Amphione
Le labra a più bel canto mai non sciolse.
Quanto dunque mia prima oppinione
Dal vero è vinta tanto più si accende
L' amor che già gran tempo ad te mi colse (129).

Ora chi non sa che Leonardo era fratello di *Lorenzo* nato del 1381, priore generale in S. Giorgio d' Alga nel 1413, vescovo di Venezia nel 1433, primo patriarca nostro nel 1451, e defunto nel 1456, uomo di santità, dottrina, ed eloquenza ripieno, come dalle multiplici sacre opere sue si può riconoscere? (130)

Io dunque ravviserò in esso quel fratello *mitrato*, di cui parla l' anonimo, e nell' anonimo ravviserò *Leonardo*, quindi l' autore del poema *Leandreide*. Le epoche vi corrispondono, cioè il 1425 nel codice Milanese, il 1429 della morte di Lorenzo de Monacis, e gli anni in cui fiorirono *Leonardo* poeta, e *Lorenzo* vescovo e patriarca *Giustiniani* fratelli. E a ciò puossi aggiungere le parole e lo stile de' riportati due sonetti di Leonardo accostantisi a quello del poema.

Che se mi fosse richiesto, perchè mai ne' tre codici di esso finora noti si trovi questo poema coperto dell' anonimo, io direi che *Leonardo* fatto più maturo di età, abbandonate le poesie amorose a persuasione anche del santo vescovo fratel suo, ommise a bella posta il proprio nome nel suo originale, o lo cancellò dopo messo, quindi le copie ne andarono senza.

E qui pongo fine a questa troppo lunga dicerìa, la quale ebbe per iscopo principale di richiamare alla memoria un autor Veneziano degnissimo di encomio non solo per aver fatto conoscere poeti nostri dapprima ignoti, ma eziandio per essersi dimostrato nella sua narrazione studioso imitatore de' due classici italiani Dante e Petrarca.

AVVISO

Le seguenti ANNOTAZIONI tendono principalmente ad illustrare i nomi de' personaggi antichi e recenti, i quali trovansi ricordati dall' autore nel libro quarto, alli canti 4, 5, 6, 7, 8; a correggere li non pochi abbagli presi dall' amanuense nello trascriverli; a notare alcune varianti tra il Codice Veneziano e il Trivigiano; e ad esaminare se quanto dice l' anonimo circa alcune circostanze di codesti personaggi combini con ciò che ne dicono le biografie loro.

(1) In fatti sappiamo che *Lord Byron* nel 1810, trovandosi a'Dardanelli, si ricordò di Leandro, e mentre il naviglio se ne stava ancorato presso al Capo Gianizzero aspettando il vento, li venne in pensiero di appurare la possibilità di ciò che si racconta di quel giovane e prode amatore. Si mise dunque a nuoto nell' Ellesponto, partendo dal piccolo Capo al disopra di Sesto, e approdò poco sotto ad Abido, non senza sforzo e pericolo, per la corrente che tende a stornare il nuotatore dalla riva asiatica e a portarlo nell'arcipelago, e per destreggiare la quale è necessario di allungare il tragitto, che non è se non di un miglio, fino a tre ed anche quattro. Questo passaggio durò un' ora e cinque minuti (Giuseppe Nicolini, vita di Giorgio Lord Byron; Milano 1855, pag. 48).

(1 *a*) Libro 4, canto 6.

(2) Libro 3, canto 7.

(3) Libro 3, canto 6.

(4) Libro 2, canto 28; libro 4, canto 20.

(5) Libro 2, canto 9; libro 4, canto 16.

(6) Libro 1, canto 1.

(7) Libro 2, canto 16.

(8) Libro 2, canto 10.

(9) Libro 3, canto 4; libro 4, canto 3.

(10) Libro 2, canto 26.

(11) Libro 2, canto 10.

(12) Libro 4, canto 15.

(13) Libro 4, canto 13.

(14) Libro 4, canto 6.

(15) Libro 4, canti 4 e 6.

(16) Libro 4, canto 18.

(17) Libro 1, canto 2, e altrove.

(17 *a*) Libro 2, canto 10.

(18) Libro 2, canto 24.

(19) Libro 2, canto 3.

(20) Libro 4, canto 2.

(21) Libro 4, canto 5.

(22) Libro 4, canto 19.

(23) Libro 4, canto 3.

(23 *a*) Libro 4, canto 4.

(23 *b*) Libro 4, canto 4.

(24) Libro 1, canto 8. L' esempio è tratto dal Bembo.

(25) Libro 2, canto 30. L'esempio è dal Pulci.

(26) Libro 2, canto 30. L' esempio è dall' Ariosto.

(27) Libro 3, canto 5. L'esempio è dallo stesso Ariosto.

(28) Libro 4, canto 7. L' esempio è dal Davanzati.

(29) Libro 4, canto 11. Gli esempli sono del Bonarroti e del Bartoli.

(30) Libro 4, canto 15. L'esempio è del Caro.

(31) Lib. 4, can. 18. Esempio del Firenzuola.

(32) Libro 4, canto 20. Esempio dello stesso Firenzuola.

(33) Libro 4, canto 12. Esempli del Casa e del Firenzuola.

(34) Libro 2, canto 10. L' esempio è del Salvini.

(34 *a*) Libro 4, canto 5. L' esempio dal Segneri.

(35) Libro 2, canto 2.
(36) Libro 2, canto 5.
(37) Libro 2, canto 23.
(38) Libro 2, canto 27.
(39) Libro 2, canto 30.
(40) Libro 2, canto 30; libro 3, canto 6.
(41) Libro 3, canto 1.
(42) Libro 3, canto 5.
(43) Libro 3, canto 5.
(44) Libro 3, canto 9.
(45) Libro 3, canto 11.
(46) Libro 4, canto 2.
(47) Libro 4, canto 5.
(48) Libro 4, canto 7.
(49) Libro 4, canto 9.
(50) Libro 1, canto 2.
(51) Libro 4, canto 11.
(52) Libro 3, canto 5.
(52 *a*) Libro 4, canto 5.
(53) Libro 4, canto 13.
(53 *a*) Libro 4, canto 7.
(54) Libro 4, canto 14.
(55) Libro 4, canto 15.
(56) Libro 4, canto 17.
(57) Libro 4, canto 18.
(58) Libro 4, canto 19.
(59) Libro 4, canto 14.
(60) Libro 1, canto 2.
(61) Libro 2, canto 15.
(61 *a*) Libro 4, canto 5.
(62) Libro 4, canto 2.
(62 *a*) Libro 4, canto 2.
(63) Libro 4, canto 11.
(64) Libro 4, canto 6.
(65) Libro 4, canto 16.
(66) Libro 4, canto 19.
(67) Libro 1, canto 4.
(68) Libro 2, canto 28.
(69) Libro 2, canto 30.
(70) Libro 3, canto 2.
(71) Libro, 3, canto 4.
(72) Libro 3, canto 4.
(73) Libro 4, canto 15.
(74) Libro 1, canto 4.
(75) Libro 4, canto 17.
(76) Libro 4, canto 13.
(77) Libro 1, canto 2.
(78) Dante, Inferno, canto 17.
(79) Libro 1, canto 7.
(80) Dante, Inferno, canto 2.
(81) Libro 4, canto 15.
(82) Dante, Inferno, canto 5.
(83) Libro 4, canto 3.
(84) Dante, Inferno, canto 30.
(85) Libro 4, canto 3.
(86) Dante. Inferno, canto 30.
(87) Libro 3, canto 2.
(88) Libro 1, canto 4.
(89) Libro 2, canto 16.
(90) Libro 4, canto 14.
(91) Libro 3, canto 1.
(92) Libro 2, canto 17
(93) Libro 3, canto 2.
(94) Libro 4, canto 17.
(95) Libro 4, canto 2.
(96) Libro 1, canto 7.
(97) Libro 1, canto 10.
(98) Libro 2, canto 2.
(99) Libro 2, canto 18.
(100) Libro 3, canto 11.
(101) Libro 4, canto 3.
(102) Libro 4, canto 9.
(103) Libro 4, canto 9.
(104) Libro 4, canto 1.
(105) Libro 4, canto 11.
(106) Libro 4, canto 16.
(106 *a*) Libro 2, canto 9.

(107) Libro 4, canto 2, il cui titolo è: *Cantus secundus in quo Amor cum cetu poetarum et dictatorum venit ad auctorem et introducit quidam ad loquendum cum eo ex Amoris precepto.*

(108) Libro 4, canto 3.

(109) Libro 4, canto 3, il cui titolo è: *Cantus tercius in quo reddit causam illius loquentis adventus Cupidinis et se dicit Dantem Aldigeri fore.*

(110) Libro 4, canto 9.
(111) Libro 4, canto 9.

(112) Libro 4, canto 4, il cui titolo è: *Cantus quartus in quo Dantes auctori nominatim*

ostendit omnes poetas grecos quorum fama viget. I Greci, che il nostro anonimo ricorda, sono tutti *greci* di nascita, quantunque alcuni non abbiano scritto che in latino. Tali altri, ch' egli nota, sono latini, e in latino lasciarono le loro opere. Siccome poi alcuni nomi sono alterati, e di alcuni rammenta qualche circostanza, così piacemi di darne le pruove, coll'allegazioni di alcuni fra gli scrittori che ne parlano. Eccoli tutti.

1. *Omero :*

Vedi colui con quella spada in mano
Che vien dinanzi agli altri come sire?
Quello è Omero poeta sovrano.

2. *Orfeo.*

3. *Pindaro,* del quale dice :

Alla sinistra è Pindaro che forte
Gli animi maschi accese alla battaglia.

4. *Lino.*

5. *Museo.*

6. *Archiloco.*

Mira colui che par che si travaglia
Della promessa sposa a lui negata
Perchè de *ambi* (giambi) ancora la bersaglia,

alludendo alla storia che ne ripete Lorenzo Crasso a pag. 58 dei Poeti greci. (Napoli 1678.)

7. *Simonide.* Quattro poeti col nome di *Simonide* ne registra il Crasso (p. 462 e seg.) Forse è *Simonide Ceo* più rinomato degli altri tre.

8. *Esopo.*

9. *Sophlicle.* Così è scritto ; ma lo credo *Sofocle* notissimo tragico. E in fatti il Codice Trivigiano dice *Sofocle.*

10. *Saffo.* Dice l' anonimo:

L' altra che sembra femmina nel viso
Fu maschia donna de l' Asia Minore,
Saffo ebbe nome non usata a riso.

11. *Aristofane.* Accenna l' autore ad una delle sue tragedie intitolata *Babiloni (Babilon scrisse tragedia maggiore)* la quale è fra le perdute. Vedi Crasso p. 70.

12. *Mallote.* Crates Mallotes vel *Mellotes* è ricordato dal Vossio *(De veterum poetarum temporibus.* Amstel. 1654) a p. 57 e 67, ove dice *non tam poeta fuit quam poetarum censor.* E veggasi il Crasso, p. 128.

13. *Eupolo.* Dicesi pure *Eupoli,* poeta comico Ateniese. Crasso p. 216.

14. *Aristarco.* Due sono notati dal Crasso p. 65-65, cioè *Aristarco Samotracio,* e *Aristarco Tegeate,* ambi poeti. Ma dicendo l' anonimo, che *non perse il tempo in matematica studendo,* e che *sopra Samo s'erse,* credo che alluda al Samotracio, scrittore di molti commentarii e che contese con *Cratete Grammatico.*

15. *Bacchilide.* Il testo dice per errore *Bachalide.*

16. *Callimaco, de Jove vien canendo.* Allude all' Inno a Giove. Ma se nel Codice fosse per errore scritto *Jove* anzichè *Jone,* allora alluderebbe alle parole di Suida che dice : *Ex ejus libris sunt et isti :* Jonis *adventus ec.,* cioè dell' arrivo del poeta *Jone* od *Jo* in Egitto. Vedi Crasso p. 97, e la Biogr. Univ., vol. IX, p. 129. Il Codice Trivigiano dice *Jove.*

17. *Terenzio.* L' anonimo lo pone tra' poeti greci come di nascita cartaginese. Del resto, si mette generalmente fra' poeti latini.

18. *Lucrezio :*

Poi che per amor s' uccise;

cosa già nota. Ma sendo di nascita latina, e avendo scritto in latino, non veggo come sia collocato fra' greci.

19. *Turpilio.* Similmente questo comico latino scrisse in latino: ma qui lo colloca forse perchè nella sua favola intitolata *Trasyleonte* imitò il greco Menandro.

20. *Esiodo ateniese.*

21. *Alpino.* Scrive l' anonimo :

Dopo la morte di Menon suo figlio
Canta che a Troja il sangue ne dimise ;

e in effetto vogliono alcuni che Alpino scrivesse la storia di *Memnone* ucciso da Achille. Vedi Vossio p. 31, 32 ; ma lo si colloca tra' poeti latini ; e chiamavasi *Cornelio Alpino.*

22. *Antimaco :*

. . . . non è così vermiglio
Da sua natura anzi il sangue Tebano
La man gli ha tinto la faccia col ciglio.

Egli è *Antimaco Colofonio,* da altri detto *Clario,* del cui poema intitolato *Tebaida,* vedi il Crasso p. 44, 45.

23. *Euripide.*

24. *Alcestide* o *Alcistide,* poeta tragico. Vedi Crasso, p. 19.

25. *Oppiano.*

26. *Empedocle.*

27. *Tersicoro.* Nol veggo tra'poeti greci. Forse è *Tersagora*, di cui il Crasso a p. 511.

28. *Alceo.* Probabilmente l' Ateniese poeta comico e tragico.

29. *Asclepiade.* La copia per isbaglio dice *Aschepiade*, noto scrittor di tragedie.

30. *Cresconio Africano.* Non può essere se non se quel *Cresconio* vescovo d' Africa, poeta, di cui il Konigio a p. 222 della Biblioteca. (Altdorfii 1678), e la Biografia Universale sotto l' articolo *Corippo* (Flavio Cresconio). T. XIII, p. 112. Ma anche questi è poeta latino.

31. *Teodoto.* Del quale il Crasso p. 504, e il Konigio p. 801. Era anche poeta tragico.

32. *Riano*, che il copista dice *Ranne*; altro poeta noto: *Rhianus Benaeus* e *Creta*. Vossio, p. 67.

33. *Menandro*,

34. *Ascreo.* Non lo trovo nell' indice de' poeti greci.

35. *Filolonte* (così) *Rodio.* Nemmen questo m' è riuscito rinvenire; quando non fosse *Filillio* poeta comico, di cui il Crasso, p. 233.

36. *Anacreonte:* L' autore per adattare la rima scrive *Anacreone.*

37. *Teotecto.* Così la copia; ma forse intese *Teodette* tragico scolare di Platone ed Aristotile, di cui Konigio p. 799, Crasso p. 500.

38. *Aristodonio.* Nè anche questo nome mi risulta dagli elenchi. Forse è *Aristodemo* ateniese poeta tragico, di cui Crasso p. 68.

39. *Timoteo.* Fra i varii *Timotei* sembra che sia l' Ateniese scrittore di commedie. Vedi Crasso p. 519 e Vossio p. 46, 47.

40. *Marcian Capella:*

> . . . . che in afro sermone
> Non scrisse benchè fusse di Cartagine
> Sì come l' altro di sua nazione.

Deve collocarsi fra gli scrittori latini. È noto il superbo Codice membranaceo del Capella scritto nel secolo XV, con miniature di *Attavante Fiorentino*, che ne conserva la Biblioteca Marciana, proveniente dalla Libreria, che fu, del Convento de' SS. Gio. e Paolo di Venezia. Veggasi il *Berardelli* nel Catalogo di questa Libreria p. 102. Opp. Calog. T. XXXVIII; e il Morelli. (Bibl. latina D. Marci, p. 325 e seg.) e Notizia d'opere di disegno, p. 171. Il copista scrisse *astro* invece di *afro* cioè *africano.*

41. *Epimenide* (Cretense).

42. *Sotade.* Ci fu *Sotade Ateniese* comico, e *Sotade* da Creta scrittore di giambi e sermoni in lingua jonica. L' autore ricorda quest' ultimo dicendo:

> Epimenide e Sotade da Creta fonno
> Ma non furon però d' una propagine.

43. *Eraclide.* Dice l' anonimo:

> L' altro che in ponto scrisse di qual forno
> Natura i dei fu Eraclide nomato
> Le muse cui Falaride cantorno.

Due furono, giusta il Crasso p. 187, 188, *Eraclidi* e tutti due *Pontici* e poeti; ma il Vossio (p. 57) ne mette uno solo *pontico*, che scrisse tragedie ed altro. Non veggo poi da quegli autori indicato che avesse cantato di *Falaride.*

44. *Mosè.* Segue l' autore:

> Quelli altri quattro tra tutti costoro
> Più risplendenti assai l' uno cornuto
> Con la vergella in mano sì decoro,
> Egli è quel duca di cui con lo adjuto
> Passò Isdrael el mar secco et aperto
> Lassando Egitto a piaghe combattuto
> Là dove in stile eroico e diserto
> Cantò al Signore gloriosamente
> Che era magnificato e cotanto erto.

Accenna al famoso cantico di Mosè: *Cantemus Domino*, ecc.

45. *Davide:*

> L' altro tutto adornato regalmente
> Fu lo cantor de lo Spirito Santo
> Che cantò il miserere amaramente.

46. *Salomone:*

> L' altro è suo figlio che fu re da tanto
> Che a veder tanto non surse il secondo
> Il cui cantare fu di tanto incanto.

47. *Tito:*

> Il quarto è quello tra gl' Imperatori
> Che in greca lingua si fece tragédo
> Tito in latino bon causatori.

(Per errore *Tuto* leggesi nel Codice); ed è usata la *i*, invece della *e*, nella voce *causatori*, in grazia della rima. Il Codice Trivigiano dice giustamente *Tito.*

(113) Libro 4, canto 5; il cui titolo è *Cantus quintus in quo Dantes denominat poetas italicos et latinos.* Terrò anche qui lo stesso metodo, come nella annotazione precedente. Più esatto fu in questo canto l'autore e il copista nel registrare i nomi degli antichi poeti latini.

1. *Virgilio.* Egli comincia il canto:

Colui che tutti gli altri in lume eccede
Con quella vesta a fronde, ad arme, a bovi
Tutto dipinto e cattedrato siede
Onore e gloria di antichi e di novi
Poeti è il facondissimo Marone
Virgilio, Apollo, in cui distilli e piovi.
Partenope felice hor mansione
De l'ossa sue, e tu Mantua beata
Che generasti cotanto sermone.

2. *Orazio.* Venusino.
3. *Lucano.* Cordubense cantor fino.
4. *Stazio.* Tolosano.
5. *Giulio Cesare.* Dice l'anonimo:

Il primo che tu vedi sì vestito
Trionfalmente fu il primo monarca
Che Pompeo Magno mise a mal partito.
La Musa di costui mai non fu parca
Nè per battaglia, nè per altro affanno
Che del suo canto non ponesse in arca.

6. *Cicerone.*

L'altro le cui ghirlande fior non hanno
È Cicerone che il scritto poema
A Cesare tagliò, di quanto danno.

7. *Cornificio.*

Il terzo è Cornificio la cui tema
Degli Dei trattò della natura
E de inni risonanti non fu scema.

Di Cornificio fa menzione Eusebio nel Cronico, citato dal Tiraboschi (T. I, parte II, p. 264) ma non veggo ricordato che abbia scritto della Natura degli Dei. Il Codice dice *non serema,* in cambio di *non fu scema,* cioè non *iscarsa.*

8. *Accio.*

Il quarto è quel che mai di sua sessura
Non si levò perchè Cesare intrasse
Nel ceto de' poeti, non che altura
Imperial di lui punto ispregiasse,
Ma però che a montar suso in parnaso
Non credeva che a lui si agguagliasse.

Quanto qui narra l'anonimo è consono a ciò che ne disse Valerio Massimo riportato dal Mazzuchelli (Vol. I, Parte I, p. 56, in nota 10). *Sessura* sta per *sedia, sedere.* Il Codice Trivigiano malamente dice *Mazio* invece di *Accio;* giacchè a *Mazio* o *Maccio* non si adatta la detta circostanza.

9. *Tucca.*
10. *Varo.*

. . . . . . Il quinto è quel che a caso
Fu dato a Varo collega da Augusto
Per emendar Enea tronco rimaso.

È noto già che *Varius et Tucca, Virgilii et Horatii contubernales, Aeneadum libros emendarunt sub ea lege, ut nihil adderent* (Konig. Bibl. p. 831, che cita il Cronico di S. Girolamo). *Tucca et Varus* (non *Varius*) è chiamato a p. 245, vol. I. Fabricio, Bibl. latina, edit. 1728.

11. *Laberio.* Scrive l'autore:

. . . . Julio Augusto
Equestre fece che prima era mimo
Laberio detto dal popol venusto.

In effetto era egli cavaliere romano e avea un particolare talento per le composizioni mimiche. *Laberius mimorum scriptor decimo mense post Caii Julii Caesaris interitum Puteolis moritur.* (Vossio p. 22). Vedi Tiraboschi T. I, Parte I, p. 297.

12. *Catullo* veronese opimo di varii metri.
13. *Cornelio Gallo.*

Che nei suoi libri nel summo e nell'imo
Citeride di quello sanza fallo
Più d'ogn'altra diletta et amor canta
Per cui più volte fu pallido e giallo.

Cornelio avea composto quattro libri di elegie, nelle quali celebrava sotto il nome di Licori una certa *Citeride* liberta di Volunnio, ma non sono pervenuti a noi. (Biogr. Univ. T. XXIII, p. 113).

14. *Atacino.*

Il decimo Atacino che la franta
Vita da tedio finir volse in bagno
E lasciò erede Augusto, cosa tanta.

Di lui il Tiraboschi T. I, Parte II, pag. 263, e nella Biog. Univ. T. LX, p. 115. Nomavasi *P. Terenzio Atacino Varrone.* Ma quivi nulla si dice della qualità della sua morte.

15. *Tibullo.*
16. *Properzio.*

17. *Teocrito.*

. . . . . . sicilian che bene
Seppe cantare in bucolico stile.

18. *Calpurnio.*

. . . . . . pastoral con lui si tiene.

19. *Cornuto.*

20. *Persio.*

. . . . . . che mordacemente
Riprende dei Romani il vitto vile;

Il Codice Trivigiano dice il *vicio vile.*

21. *Giuvenale.*

. . . . . segue lui non meno ardente
Rimproverando la vita e' il costume
Della Quirina viziosa gente.

22. *Eschilo.* Scrive l'autore:

Colui che 'l sangue gl'impedisce il lume
È lo Sicilian tragédo Eschillo
Feruto da l'uccello sanza piume
Che da qual Aquila cade.

Leggesi nel Crasso (p. 200) che mentre un giorno *Eschilo* in una campagna riposava, un'*aquila* lasciò cadergli sul capo suo calvo una *testuggine*, e finì i suoi giorni.

23. *Plauto.*

. . . . E quel pusillo
Col capo chino tutto farinoso
Che prestinando suo volume aprillo
Plauto è comédo.

Allude alla storia di lui, che dice che essendosi ingerito in traffichi, vi perdè il suo, e messosi ai servigi di un mugnaio si vide obbligato a girare la mola; e taluni aggiungono che continuò nel suo mulino a comporre commedie. La voce *prestinando* qui è nel senso latino *praestinare*, cioè *mercatare*. Per *prestinaio* poi oggidì intendesi unicamente il venditore di burro, di latte, ecc., non già il mercatante in genere, come a' tempi di Plauto.

24. *Ennio*

. . . . . è quell'altro che porta l'insegna
Di Scipion nelle lor tombe ascoso.

In effetto è noto essere stato Ennio sepolto nel monumento di Scipione (Vossio, p. 4).

25. *Nevio:*

Un ci era con la faccia tenebrosa
Nevio che fu da' nobili bandito
In Utica il cui corpo or si riposa.

San Girolamo appo Konigio, p. 565. *Roma pulsum Uticae tandem mortuum esse memorat.* Fu bandito per la sua maldicenza.

26. *Celio.*

. . . . . se fosse da te alquanto udito
Cantar di Roma e de Annibale ancora
Parrebbeti che fusti al ciel salito.

Forse è *Celio Antipatro*, che scrisse l'istoria della guerra punica, di cui vedi Konigio a p. 149. Ma non appare che fosse poeta.

27. *Licinio.*

. . . . . . con voce canora.

Probabilmente è *Licinio Imbrex* antico scrittore di commedie. Vedi Vossio p. 5. Il Codice Trivigiano malamente dice *Lucinio.*

28. *Attalo.* Ne è più d'uno, ma non lo veggo tra' poeti. Forse intese *Attilio*, di cui il Vossio p. 7, fra' comici.

29. *Nigidio.* Forse quegli ricordato dal Fabricio nell'Indice degli scrittori citati da Servio ne' commentarii sopra Virgilio (I. I, p. 241).

30. *Fontanio.* Così l'autore per combinare la rima. Ma forse è *Fontano*, che descrisse le Najadi amate da' Satiri, di cui Vossio p. 35.

31. *Filippide.* Questi ateniese comico scrisse veramente in greco. Vedi Vossio p. 54, e Crasso p. 232.

32. *Pomponio*, bolognese, comico; oppure *Pomponio Secondo* tragico, de' quali e il Vossio p. 13, 14, 43, e il Konigio p. 654, e il Tiraboschi T. II, p. 137, 138.

33. *Afranio* (che l'anonimo dice *Affrango).*

Che le sue commedie chiamò Togate
Incendio, Emancipato, Cinerario,

(che l'anonimo scrive *Cinerango* e il Codice Trivigiano *Zineranio).* Tutto ciò combina con quanto ha il Vossio p. 12, 13. *Afranius qui in Togatis et Atellanis excelluit;* e il Fabricio (II, p. 194), il quale ricorda i nomi delle favole di Afranio, fra i quali nomi è appunto *Incendio, Emancipato, Cinerario.*

34. *Cecilio.*

. . . . . . segue con le mani ornate
Di otto libelli conscritti di quelle
Degne da saggi di essere onorate.

L'Argelati (Script. Mediol. T. I, p. 1441) riporta i titoli di quarantanove commedie scritte

dal milanese Cecilio Stazio. E qui l'anonimo dice *otto libri*, forse perchè unite in otto volumi. Vedi anche Tiraboschi I, p. 181.

35. *Claudiano.*

Vedi quell'altro di verde e novelle
Ghirlande ornato cui Febo e le Muse
Hanno nutrito con le sue mammelle,
Claudiano che ancor par se escuse
Proserpina se invita fu rapita
E tedioso e figli a battaglia use.

Confesso di non intendere quest' ultimo verso. Che forse il copista abbia letto *tedioso* invece di *Teodosio*, le cui laudi cantò Claudiano? Del resto non occorre parlare. Il Codice Trivigiano

Che ancor par s'ischrise *in cambio* di s'escuse.

36. *Seneca.*

37. *Pilade.* Questi fu mimo e scrisse *de Saltatione Italica.* Vedi Crasso p. 413, e Biogr. Univ. T. XLIV, p. 173.

38. *Avian fabulatore* (Flavio Aviano).

39. *Cinna.*

. . . . . . cui l'opra fu diece anni trita.

C. Elvio Cinna scrisse un poema intitolato *Smirna.* Vedi Konigio p. 193, il quale dice: *In hoc carmine elaborando novem annos consumsisse fertur.*

40. *Sammonico.*

. . . . Sereno aggregatore
Di settanta do millia libri i quali
Dimise a Gordiano imperatore.

Vossio analogamente scrive a p. 52: *Congesserat ingentem Bibliothecam: ut in qua forent ad LXII* (non settantadue) *millia librorum . . . Is praeceptor fuit junioris Gordiani cui et moriens omnem reliquit Bibliothecam.* Vedi anche il Tiraboschi T. II, p. 396, 398, e la Biogr. Univ. T. L, p. 418. Il Codice per errore di copia dice *Samomete* in cambio di *Sammonico.* Il Codice Trivigiano *Samoniete.*

41. *Plocio.* (*Plotius Crispinus*), di cui il Vossio a p. 26, stoico e poeta. Il Konigio parimenti a p. 649 lo nomina, e vi aggiunge un altro *Plocio* (*Lucius Plocius*) che dal Glandorpio è creduto *mimicae scenae conditorem.* Di quale abbia inteso il nostro anonimo non saprei.

42. *Calvo.* (*Licinius Calvus*, il Vossio a p. 19), e vedine il Tiraboschi T. I, Parte II, p. 318.

43. *Pacuvio* (Il Codice dice *Pichuiuo*, e il Trivigiano *Pachunio*), di cui il Vossio: *Pacuvius tragicus*, p. 6, e il Tiraboschi, T. I, p. 181.

44. *Lucilio.* Dice l'autore:

Et il Calavrese Lucilio che iscrisse
Gli fatti di Scipion con Anniballe.

Il Vossio scrive a p. 9, *Bello Numantino sub Scipione Africano militavit.* Il Codice Trivigiano *Aniplale.* Vedi Tiraboschi T. I, Parte I, p. 223.

45. *C. Floro:* L'anonimo di lui scrive:

Se Gaio Florio sì come descrisse
Medea, Jasone, il Monton d'oro e Colco
Tu miri, vederai che ciò ben disse.

Il Konigio in conferma di ciò dice: *Florus poeta Jasonis et comitum profectionem in Colchos et Velleris aurei et Medeae raptum carmine heroico cecinit.* Il Codice Trivigiano *Floro: ciò che ben dise.*

46. *Menippo.*

. . . . . . prima peggio che bubulco
Perchè fu servo e l'uno a Roma pria
Confabulò del fulmine trisulco.

Satirico, di cui il Konigio p. 532, onde vennero le satire dette *Menippee.* Il Codice Trivigiano *pregio* in vece di *pegio.* Il Crasso lo pone fra i Greci p. 340. Vedi anche la Biogr. Universale, vol. XXXVII, p. 221.

47. *Pollione.*

. . . . . . illustre in la tragéda via.

Fabricio II, p. 672. *Pollio utriusque linguae tragoediarum scriptor.* È *Asinio Pollione* di cui anche il Tiraboschi T. I, Parte II, p. 504.

48. *Archiade.* Era poeta greco estemporaneo. Fabricio T. I, p. 547. *Licinius Archias*; e Konigio p. 53, e Crasso p. 58, che il dice *Archia Antiocheno.*

49. *Alano.*

. . . . . . che si pianse
Con la natura in dolce melodia.

Vossio p. 75, 76, e Fabricio T. II, p. 261, ove: *Alani de Insulis: Ejus carmina ex libro De planctu naturae integra ex tribus mss.* Il Codice Trivigiano *alamo.*

50. *Boezio*, notissimo, del quale l'anonimo scrive:

Boezio et altri per cui Cristo spanse
Il sangue in croce.

(114) Libro 4, canto 6, il cui titolo è: *Cantus sextus in quo Dantes denominat auctori quosdam recentes modernosque vates.* Tengo il metodo precedente nello enumerarli, omettendo osservazioni su quelli che sono notissimi.

1. *Gualfredo.* Scrive l'autore:

Il primo è quel che a Papa e Cardinali
 Iscrisse la novella poetria
 Con forme male a mitra et a sandali
Poscia cantò di loro l'ironia
 Là dove è virtute della corte
 Descrive con mortale leggiadria.
Ultimo, il magnanimo e forte
 Ad alta voce Alessandro Macedo
 Cantò con Muse certo in parnaso orte
Il quale nominato fu Gualfredo
 Inghilese famoso, e la sua voce
 Il mostra più oltre ancor s'io non procedo.

Questi è *Galfrido* (o Goffredo) *de Winesalf*, uno dei poeti più chiari del XIII secolo, nato in Inghilterra, che dedicò ad Innocenzo IV la sua *poetica* opera notabilissima pel tempo in cui fu composta. Scrisse anco *De statu Curiae Romanae*, e tale elegia fu pubblicata da Matteo Francowitz *come una satira* della Corte di Roma, e da altri fu pubblicata *come una apologia* della chiesa romana. L'anonimo qui dicendo l'*ironia* pare che la consideri come una satira. Egli poi attribuisce a questo *Galfredo* il poema *De gestis Alexandri Magni*, che è di un altro *Gualtero* (de Castellione) *Insulanus.* Ma per più notizie su ciò, vedi Fabricio, Bibl. Med. et inf. latin. T. III, p. 12-13 e 112-113, non che la Biogr. Univ. T. XXIII, p. 47-48, che appoggiasi anche all'autorità del Tiraboschi. Il Codice Trivigiano dice *enucia* invece di *mitra* e *la in roma* invece di *la ironia.*

2. *Giovanni Del Virgilio:*

L'altro è colui che già lungo la foce
 Di Sarpina più volte mi riprese
 Di mia cetra vulgar con canto atroce
Joanni Faventino e perchè intese
 Et sanza pare seguitò Marone
 Virgilian fu detto alto e cortese.

Giovanni del Virgilio, che l'anonimo dice di Faenza, ma che comunemente è detto Bolognese, fioriva nel 1325. Veggasi, fra gli altri che ne parlano, il libro: *I versi latini di Giovanni, di Virgilio e di Dante Allighieri tradotti dal* cav. Filippo Scolari. Venezia 1845, in 8.° a p. 12, 41, ecc.

3. *Lupo da Pava.*

 . . . . il cui sermone
 Eloquente il dimostra.

Di Lupo, o Lupato da Padova, vedi il Tiraboschi (Vol. V, p. 788 e seguenti). Un errore di stampa corso nella epigrafe sua riferita dal Salomonio, e dal Papadopoli (Vol. II, p. 12), fece credere che Lupo morisse nel 1399, ma l'anno è veramente 1309, come hassi dai *Cenni* sulle famiglie Patavine.

4. *Albertino Mussato.* Dice l'anonimo:

Al preconio del quarto non ti spiego
 Che Azzolin di cui scrisse da Romano
 La tragedia il dichiara a l'uom non ciego
Mussato Alberto, e lui fu paduano.

È gia conosciuta la tragedia *Ezzelino* scritta dal Mussato intorno al 1314. I due Codici per isbaglio dicono *prethonio* anzichè *preconio.*

5. *Arrighetto Fiorentino.* È Arrighetto da Settimello, il quale circa il 1190 compose in versi latini un trattato contro l'avversità della Fortuna, che qui indica pure l'anonimo colle parole:

L'altro è Arrighetto firentin che disse
 Notabilmente il miser stato umano
 Nel libro nello qual tanto se afflisse.

Il Mazzuchelli, che parla di questo Fiorentino a p. 1122, 1123, Vol. I, Parte II, reca i versi della Leandreide.

6. *Castellano da Bassano.* Di questo illustre poeta scrisse già Giambattista Verci a p. 14 e seg. del Vol. I delle *Notizie intorno alla vita e alle opere degli Scrittori della Città di Bassano*, anno 1775, citando anch'egli l'autorità della Leandreide che dice:

L'altro è quel da Bassan che gli tuoi civi
A Barbarossa Castellano iscrisse.

Compose Castellano, fra le altre cose, il poema qui dall'anonimo indicato, il cui titolo è: *Venetianae pacis inter ecclesiam et imperium*, il qual poema è tuttora inedito, ma si era cominciato a stampare in 4.° negli anni decorsi dall'amico mio Giambattista Baseggio di Bassano;

ne fu però interrotta la edizione, la quale non giunge che alla pag. 24. Ma ne abbiamo il manoscritto di pugno del nostro Marino Sanuto, e che mi fu fatto esaminare dall' illustre Rawdon Brown inglese qui domiciliato. Vedi quanto ne dissi a p. 579, 580 in nota al Vol. IV delle Iscrizioni Veneziane. Pare che Castellano vivesse ancora nel 1392.

7. *Francesco Petrarca.* Ecco quanto ne scrive l' anonimo:

Quel altro glorioso ancor tra i vivi
Francesco Firentin detto Petrarca
Di cui di giorno in giorno leggi e scrivi
Tanto carcò di fama la sua barca
Che successore a se non ha relitto
In tutta Italia or di scienza parca.
Sassi quanto altamente ha descritto
In stil bucolico e in epistolare
Cui dare in vita non ebbe in despitto.
Ma sperasi mirabile il cantare
De l' africano dopo lui rimaso
Che lasciato ha si debbia concremare.

Ho già osservato che quella espressione *tra i vivi* non è per far credere che il Petrarca fosse vivente quando scriveva l' anonimo questo passo della Leandreide; ma vuol dire che la fama del Petrarca, già defunto fino dal 1374, era ancor *viva*. Le opere sue qui indicate son note; e quanto al poema dell'*Africa*, ripeto, non sapersi ch' egli abbia ordinato di bruciarlo. Sembra poi che il nostro anonimo non abbia veduto tale poema subito che dice *sperasi (spierassi* così la copia). E in effetto da quanto il Tiraboschi scrive (V, p. 803) si può rilevare che pochissime fossero le copie date fuori. Il Codice Veneziano dice *atalamente* e il Trivigiano *altamente.*

8. *Pietro dalla Rettorica.* Scrive l' autore:

L' altro con ambi i giochi di parnaso
Di Anna dopo la morte aspra et Elisa
Cantò i successi qual di Apollo Naso.
E se morte festina et improvisa
Pietro da la rettorica non spegne
Leve è che la sua fama più se infrisa.

Di Pietro *da Muglio*, chiamato Pietro *dalla Rettorica* bolognese, il Tiraboschi, come ho di sopra osservato, non nota alcuna opera. Qui l' anonimo indica una poesia (sembra) su ciò che succedette dopo la morte di *Anna* e di *Elisa*; ma confesso il vero di non intendere a qual fatto alludano queste parole. Il Fantuzzi che ne parla negli Scrittori bolognesi, non mi dà alcun aiuto. Il Codice Trivigiano ha: *Di ana da polamorte aspra di chlixa. Giochi* invece di gioghi.

9. *Pietro Polani.*

Di Pietro fur le voci a laude degne
Pollani tuo concive che si turba
Che Roma è senza le due grandi insegne.

Pare che il poeta avrebbe dovuto collocare questo *Pollani* là dove parla de' poeti Veneziani. Di lui ho già detto di sopra. Il Codice Trivigiano ommette *grandi.*

10. *Giovanni Boccaccio.*

Nella mia patria, anzi non mia si inurba
Con le ossa, dico, Jovanni Bocacci
Famoso di poetria tra l' altra turba.
Non so se 'l tuo maestro quivi ittacci
La bucolica cui che mane ascosta
Perchè di gloria già non si procacci.

Il Codice Trivigiano.

Quivi taci . . . . che mane ascholta.
Par che di gloria.

È già noto essere morto questo padre della italiana eloquenza nel 1375, ed essere stato sepolto (non in Firenze), ma a Cestaldo nella chiesa de' SS. Filippo e Giacomo. Pare da' suddetti versi che accenni alle *bucoliche* scritte dal Petrarca (*tuo maestro*, cioè maestro dell' anonimo) e dal *Boccaccio* che furono già stampate per la prima volta col titolo *Joannis Boccacii Bucolicon*, ec., al registro *i* quarto nel rarissimo libro: *Eclogae Virgilii. Calphurni. Nemesiani. Francisci Petrarchae. Joannis Boccaccii. Joan. Bapt. Mantuani. Pomponii Gaurici. Florentiae. Giunta*, 1504, in 8.°

11. *Jacopo degli Allegretti.* Scrive l' autore di lui:

Jacobo da Forlin delli Allegretti
In se che canta e parla alla sua posta.
E se ancor poco tempo Italia aspetti
Il suon della sua tuba fia sì grande
Che non sapran veder vostri intelletti
Della facondia il fondo che 'l vi spande.

Quest' ultimo verso manca nel Codice Trivigiano. Jacopo degli Allegretti da Forlì fioriva

nel 1380, e morì prima del 1406, del quale veggasi il Mazzuchelli (Vol. I, Parte I, p. 503) e il Tiraboschi (Vol. V, p. 817 e seg.). Dalle parole dell' anonimo sembra potersi dedurre che qualche componimento poetico di Jacopo, e forse il *bucolico* dal Mazzuchelli citato, non fosse ancora reso pubblico quando l' anonimo scriveva la Leandreide.

(115) Libro, 4 canto 7. Il cui titolo è: *Cantus septimus in quo Dantes nominat auctores rithmos vulgaresque doctores.* Premette l'autore:

. . . . . Cotesta è una altra scuola
Da una sola ghirlanda ciascun fido
Perchè cantaro in lingua vulgar sola.

Noterò brevemente tutti i poeti ch' egli nomina, soggiungendo qualche analoga osservazione.

1. *Guido Guinicelli.* Bolognese, ricordato da Dante nel Purgatorio e nel Convito. Morì nel 1276, come dimostra il Fantuzzi.

2. *Guido Cavalcanti.* Anche di questo fiorentino fa menzione lo stesso Dante. Morì o nel 1300, o nel principio del susseguente. Il passo della Leandreide che riguarda questi due *Guidi* è il seguente:

Quivi si vede l' uno e l' altro Guido
E Guinicelli e Cavalcanti cui
Con gloria del parlar cacciai dal nido.

(dice Dante). Queste parole alludono certamente alla grande estimazione che Dante dell' uno e dell' altro faceva; e come, non essendo forse al tempo suo molto conosciuti, egli li fece conoscere maggiormente nelle sue opere, come nel Paradiso, nella Volgare Eloquenza, ecc. Vedi il Tiraboschi che di ambedue parla nel Vol. IV, p. 524 e 537, e il Fantuzzi negli Scrittori bolognesi a p. 345 del Vol. IV. Il Codice Trivigiano dice *mondo* invece di *nido.*

3. *Gerardo Brunello.* Il Codice Veneziano erra certamente nel dire *Guido Brunello Delle Mosi*, ed erra anche il Trivigiano che pur dice *Guido* e *ne le mosse.* Esso è *Girardo Bornello* ossia *Giraud de Bournel o Borneil* Limosino, poeta in lingua provenzale de' più distinti, morto nel 1278. E *Girardo* non *Guido* lo nomina lo stesso Dante nel libro della Volgare Eloquenza. Vedi il Quadrio Vol. II, p. 129; III, p. 75, 154, e Crescimbeni Vol. II, p. 98 e 226. Non so poi come il poeta inserisca in questo luogo il *Bornello* che scrisse in lingua provenzale, mentre lo torna a ricordare fra' poeti provenzali. Vedi al num. 33 di essi, e ciò mi farebbe sospettare che fosse veramente un *Guido Brunello* ignoto finora.

4. *Guittone d' Arezzo*, moriva nel 1294, ricordato da Dante nel Purgatorio. Tiraboschi Vol. IV, p. 534.

5. *Jacopo da Lentino.* L' anonimo non palesa il nome, solo il cognome *De Lentino.* Di questo parla lungamente il Mongitore nella Biblioteca Siciliana T. I, p. 299, e Dante pure lo ricorda nel Purgatorio. Ma Dante lo fa Pugliese, mentre *Lentino* è luogo nella Sicilia. Il Tiraboschi (Vol. IV, p. 547) non decide la questione, ma osserva che il Negri sbaglia sicuramente nel registrarlo fra gli Scrittori fiorentini.

6. *Cino da Pistoja*, di cui Dante fa onorevole e frequente menzione. Sopravvisse a Dante, sendo morto del 1336 (Vedi Tiraboschi Vol. V, p. 87, 402, 409, 677, 742, ecc.).

7. *Bindo Bonichi*, Senese, di cui il Mazzuchelli Vol. II, Parte III, p. 1638, e il Tiraboschi Vol. V, p. 677. Morì nel 1337.

8. *Bonagiunta Urbiciani.* Il poeta lo chiama *Bonagiunta Orbican da Lucca*, ed è nominato da Dante nel libro della Volgare Eloquenza e nel Purgatorio. Visse circa la fine del secolo XIII. Il poeta dice di lui che *troppo maternalmente cantò dolce e chiaro.* Vedi Tiraboschi Vol. IV, p. 530, 531.

9. *Cecco d' Ascoli*, della Marca d' Ancona, morto del 1327, dannato al fuoco quale eretico, di cui, e delle cui poesie il Tiraboschi Vol. V, p. 269, 280, e specialmente a p. 271, 272.

10. *Fazio degli Uberti*, scrittore del Dittamondo. Era Bonifacio degli Uberti fiorentino. Egli ci ha dato un saggio anche della poesia francese e provenzale, di cui qui pure il nostro anonimo nel canto ottavo. Morì Fazio poco dopo il 1367; e di lui anche il Tiraboschi Vol. V, p. 679, 680.

11. *Matteo Corriggiari* o *Correggiajo*, qui dal poeta è nominato *Mattio Covegiaro* da Bologna. Il Crescimbeni (Vol. V, p. 18) citando un Codice ov' entrano rime del Corrigiari lo fa Veronese, ma forse il Codice lo dirà Bolognese,

come osserva il Quadrio, Vol. II, p. 175. Fiorì circa il 1350.

12. *Berti da Lucca.* Non ho trovate notizie di lui, quando non fosse quell' *Uberto da Lucca*, poeta antico nominato dall' Allacci a p. 66 della Raccolta de' Poeti Antichi, e dal Crescimbeni Vol. V, p. 9.

13. *Jacopo da Imola.* Non ho notizie di lui. Ci fu un Lodovico da Imola, di casa Alidosi, ricordato dal Quadrio Vol. II, p. 194, e dal Crescimbeni, il quale Lodovico era poeta circa il 1398. Forse potrebbe l' anonimo avere scambiato il nome.

14. *Bruzzi Visconte.* Ricordalo come poeta il Quadrio (Vol. II, p. 188), ed era figliuolo non legittimo di Luchino Visconti signore di Milano; e fu cacciato dallo Stato Bolognese nell'agosto 1356. Così parimente ne dice e un sonetto ne pubblicò il Crescimbeni. *Bruzzi* e *Brizzi* sono accorciativi di *Fabrizio*, ond' è fatto *Fabruzzo* e *Bruzzo*.

15. *Giovanni dall' Orto.* Questi era Aretino. È citato dall' Ubaldini e dal Quadrio (Vol. II, p. 170). Il Redi annovera due altri coetanei *Giovanni*, cioè Giovanni *Marotolo* e *Giovanni d' Arezzo*; ma il Quadrio tiene che *Giovanni dall' Orto d' Arezzo*, e *Giovanni d' Arezzo* sieno un solo. Veggasi anche il Crescimbeni (Vol. V, p. 4 e 16.

16. *Tommaso da Faenza.* Questi è Tommaso Bozzuola o Bucciola Faentino, oppure Tommaso da Faenza comunemente detto senza cognome. Un saggio delle sue rime è nel Crescimbeni, ed è pure rammentato dai soliti Quadrio e Tiraboschi.

17. *Mino Vocato.* Così scrive l' anonimo; ma è *Mino Mocato* da Siena, detto anche Bartolommeo Maconi, del quale il Crescimbeni (Vol. II, p. 54, 55), reca una Canzone. Fiorì nel 1250; e Dante ne fa menzione nel Trattato della Volgare Eloquenza. Il Tiraboschi (p. 531, T. IV) lo ricorda. Le parole dell'anonimo sono :

> Mino Vocato la cui dolce musa
> Ancor sevan (*così*) senese a maraviglia
> Descrisse Amore e sua virtù confusa.

18. *Antonio da Tempo*, che scrisse il Trattato *de Rithmis vulgaribus*, è già ricordato dal Tiraboschi (Vol. V, p. 783, 784) circa l'anno 1332. L' anonimo dice :

> Et Antonio di Tempo vi consiglia
> Paduano a parlar dritto per rima,
> Di sua donna salvaggia ama le ciglia.

19. *Senuccio di Benuccio.* Il più intrinseco amico del Petrarca, dopo il Boccaccio, fu questo *Sennuccio* del *Bene* detto anche *Sennuccio Benucci* figliuolo di *Benuccio*. Moriva probabilmente nel 1349. Il Mazzuchelli ne parla a lungo (vol. II, Parte II, p. 808), il quale fra gli scrittori che lo rammentano pone anche *La Leandreide canto VII, che sta ms. nella Libreria de' Monaci Cisterciensi di S. Ambrogio di Milano e altrove.*

20. *Cino Girarduccio.* Non so chi sia. Forse quel *Cino da Borgo San Sepolcro* vissuto alla fine del secolo XIV e al principio del XV, di cui ha un sonetto il Crescimbeni (Vol. III, p. 233.)

21, 22. *Jacopo* e *Pietro Allighieri.* L' autore dice :

> Jacobo e Petro entrambi dui miei figli
> Del bel parlar gonfiaro lor cappuccio.

Che Pietro e Jacopo figliuoli di Dante sieno stati i primi a commentare la Divina Commedia, è certo ; ma che il Commento che trovasi manoscritto in alcune Biblioteche sotto nome di *Pietro Alighieri* sia veramente opera di questo, è dubbio. Veggasi il Dionisi nel Vol. II degli Aneddoti, e il Tiraboschi (Vol. V, p. 660, 669). *Pietro* moriva in Treviso nel 1361. *Jacopo* era ancor vivo nel 1342. Leggi anche il Mazzuchelli T. I, Parte I, p. 493, 494.

23. *Nicolò de Rossi.* Dice il poeta :

> Vedi tra questo risplendente coro
> Il Trivisan de Rossi Nicolao
> Cui diede sopranome il sconcio toro.

Non so a qual fatto alluda questa espressione. Del resto il de Rossi è nominato dall'Allacci nell' Indice, e dall' Ubaldini nella Tavola de' *Documenti d' Amore* del Barberino, che si serve di un testo a penna delle sue canzoni esistente nella Barberina. Vedi Crescimbeni (Vol. II, p. 11) e Quadrio (Vol. II, p. 168).

24. *Alberto da Firenze.* Io lo credo *Alberto della Piacentina*, di cui a stampa è il *Boezio* volgarizzato. Firenze Manni 1735; la quale tra-

duzione egli intraprese in Venezia nel 1332, ed essendo pur in Venezia prigione, vi finì i suoi giorni. Vedi Tiraboschi (Vol. V, p. 835, 836).

25, 26, 27. *Guglielmo, Nicolò, e Matteo Pigafetta* Vicentini, non sono ricordati nè dal Crescimbeni, nè dal Quadrio, nè dal Tiraboschi, nè dal padre Calvi negli Scrittori Vicentini; il quale, oltre altri più recenti, nota un *Matteo Pigafetta* che fioriva nel 1479 (Vol. IV, p. XIII).

28. *Mugnone da Lucca.* Mucchio o Mugnone da Lucca, della famiglia *Fatinelli*, fu buon rimatore circa il 1340, conservandosi alcune sue poesie nella Chisiana di Roma, e nella Strozziana di Firenze ove è appellato *Magnone Fantinelli da Lucca. Mucchio* è accorciato da Scaramucchio o Scaramuccia, e *Mugnone* è l'accresecitivo di *Mucchio*; di che vedi il Quadrio (Vol. II, p. 179).

29. *Mio Guerrieri*, cioè Bartolomeo Guerrieri. Non veggo fatta di lui menzione negli Scrittori. Havvi bensì un posteriore *Bartolommeo Guerrieri* poeta del secolo XVI-XVII, di cui nel Quadrio Vol. II, p. 517, 679.

30. *Bernardo di Canaccio.* Il Codice scrive *de Canozo.* Questi ha rime nel Codice Boccoliniano citato dal Quadrio (Vol. II, p. 188). Egli vivea circa la metà del secolo XIV. Vedi anche Crescimbeni (Vol. V, p. 217).

31. *Mattio de Mozo vilam.* A dir vero non so se io m' abbia da leggere *Mozzo* o *Mezzo*, o *Vilam*, o *Villani.* Il Codice Trivigiano legge *Moro Vilani.* Ma, comunque sia, non trovo negli Scrittori cotesti nomi. Potrebbe essere *Matteo Villani* storico notissimo fiorentino morto nel 1363, ma non mi consta che fosse anche poeta, oltre che storico.

32. *Jacopo della Lana*, commentatore di Dante, era bolognese, e fiorì verso la fine del secolo XIV; e come poeta volgare è nominato anche dal Muratori. (*Perfetta poesia italiana.* T. I, p. 11).

33, 34. *Antonio* e *Nicolò Beccari. Antonio Da Ferrara* era della illustre famiglia de' *Beccari.* Fu filosofo, medico, matematico, oratore celebre, ed esercitossi anche nella poesia toscana. Fiorì circa li 1370. Vedi Crescimbeni (Vol. III, p. 179), e la Biblioteca di S. Michele di Murano manoscritta p. 62, ov' è citata una canzone di esso *Antonio. Nicolò da Ferrara* fiorì parimenti nel secolo XIV, ed ha rime nel Codice Boccoliniano, dal quale apparisce che fu fratello di *Antonio* e per conseguenza della stessa casa *de' Beccari*, ciò che afferma il nostro anonimo dicendo:

. . . . Antonio e Nicolao di Bechari
Germani furon; ciò vo' che tu credi.

Alcuni lo chiamano *Antonio dal Beccajo o Beccaria* e anche dal *Berthajo.* Vedi il Quadrio (T. II, p. 174), il Tiraboschi (T. V, p. 758, 795, 760), e la succitata Biblioteca di S. Michele a p. 115 ove di *Nicolò.*

35. *Lancilotto Angoscioli.* Il Codice dice *Lanciarotto.* Questi fu da Piacenza. Il Petrarca gli scrive più lettere dandogli il titolo di Cavaliere. Vedi Crescimbeni (T. III, p. 179, 180) e Tiraboschi (T. V, p. 770, 771), il quale prova esser morto *Lancilotto* nel 1364; il perchè è d' uopo correggere il Crescimbeni che nel luogo citato assegna il fiorire di *Lancilotto* al 1370. Dal cognome *Angoscioli* il Tiraboschi trae il cognome *Angnissola.*

36. *Menghin o Menchino da Ravenna* ha rime nelli Codici Bargiacchi e Boccoliniano, dal quale si cava che fu di casa *Mezzano* e fiorì al tempo del suddetto Antonio da Ferrara, cioè circa il 1370. Vedi Crescimbeni, che replicò in due luoghi lo stesso nome e cognome (T. V, p. 24 e 219) e il Quadrio (T. II, p. 189). Il Tiraboschi fra i commentatori di Dante accenna anche *Micchino* (così) da *Mezzano* canonico di Ravenna (T. V, p. 660). Il nome *Menghino, Menchino, Michino, Mechino* è un' abbreviazione di Domenico o Domenichino.

37. *Giovanni da Modena.* L' anonimo dice: *Gian Mutinese cum gli occhi non chiari*, la quale espressione forse allude a qualche imperfezione ch' egli avesse negli occhi. Del rimanente *Giovanni* fiorì a' tempi di Bernabò Visconti signor di Milano (1378-1385), ed ha rime nel Codice Isoldiano. Vedi Quadrio (T. II, p. 202) e Crescimbeni (T. V, p. 38). Il Tiraboschi nella Biblioteca Modenese (T. III, p. 220) ricordando *Giovanni*, cita eziandio la *Leandreide* sulla copia posseduta dal canonico Rambaldo degli Azzoni Avogaro, e l' altra *più recente* (egli dice)

nel Monastero di S. Ambrogio di Milano. Il passo dal Muratori riferito ha qualche diversità da quello del Codice nostro, cosicchè pare ch' egli abbialo tratto non dal Codice Avogaro, ma dall' Ambrosiano.

38. *Gasparo Scuaro* veronese, che già lesse in Venezia il libro di Dante, cioè la Divina Commedia, come, prima d'altri, ne ammaestra l'anonimo, era *Gasparo Squaro de' Broaspini*. La notizia dataci fu riprodotta dall' Agostini a p. XXVII, XXVIII della Prefazione al T. I degli Scrittori, dicendo che i *Veneziani hanno conceduto la facoltà a Gaspero Veronese di qui spiegare pubblicamente la commedia di Dante, come s' impara da quel poema intitolato Leandris, altronde già riferito*, e riporta il passo, traendolo dal Codice Avogaro, quindi con diversità dal nostro. Il Tiraboschi (T. V, p. 668) ripete sulla fede della Leandreide la stessa cosa, ma errò nel chiamarlo *Gabriello Squaro* anzichè *Gaspare* che hanno i Codici. Il Morelli (p. 181, Vol. I delle Operette) dice: *Se è vero ch' egli* (cioè l' autore della Leandreide) *in due terzine addotte dall' Agostini dia indizio che Gasparo Squaro de' Broaspini Veronese in Venezia spiegasse pubblicamente Dante* ec. Or si assicuri l' ombra Morelliana esser verissimo che l' anonimo lo dice; ed è a scusare il dubbio del Morelli che confessa di non aver veduto *que' due versi nell' opera intera*. Ma è a leggersi intorno al *Broaspini* la suenunciata Biblioteca ms. di S. Michele di Murano a p. 115, 116 e 197, ove si ricopia il passo della Leandreide.

39. *Gasparo di Lancilotto* Veronese. Non ne ho notizie, come nè dell' altro Veronese

40. *Enrico* canonico, avendone indarno richieste a qualche illustre letterato di quella città.

41, 42. *Franco e Giannotto Sacchetti*, noti ambedue. *Franco* nato circa il 1330 e 1335 fu non solo novellatore distinto, ma ancora poeta. Morì poco dopo il 1400. (Quadrio, T. II, p. 192 ec. ec.) *Giannozzo* (che il poeta dice *Giannotto*) era fratello di Franco, e fu buono imitatore di esso nel rimare, ma non nel vivere, perchè come ribelle della patria fu decapitato in Firenze nel 1379 a' 15 di ottobre (Quadrio, loco cit.). E se così è, come mai il Crescimbeni (T. III, p. 235) pone il fiorire di Giannozzo intorno al 1410, mentre nella nota 34 reca anch' egli l' autorità dell' Ammirato circa la decapitazione di Giannozzo avvenuta nel 1379?

43. *Giovanni di Bindo*. Vanni di Bindo da San Geminiano è mentovato quale poeta di questi tempi da Giovan Vincenzo Coppi negli Uomini illustri di S. Geminiano annessi agli Annali dello stesso luogo a p. 200, num. 27. La notizia la ebbe da Francesco Redi che la trasse da' suoi antichi Testi a penna. Il Quadrio su questa autorità lo ricorda a p. 168 del Vol II.

44. *Petruccio di Macci* (o Maggi, o Mazzi) *da Borgo San Sepolcro*. Non lo veggo ricordato da' suddetti Scrittori. L' anonimo dice:

Segue col canto di tuoi moderni anni
E di Macci dal borgo sansepolcro
Petruccio che cantando s' orna i panni.

cosicchè rilevasi che intorno al 1400 fioriva questo Petruccio.

45. *Drudo da Ravenna*. Anche costui m' è ignoto. Il poeta dice: *E Drudo da Ravenna col dir pulcro*. Inutilmente ho rintracciato di lui nel Ginanni, *Scrittori Ravennati*.

46, 47, 48. Scrive l' anonimo:

Antonio, Fabio fa strillo (forse stuolo) cum Guido
De Ronchofreddo de quai dir mi impulcro.

Nemmeno di questi tre so dar notizie.

49. *Nanni Salvini in facundia complido*, dice il nostro poeta; ma io non ne trovo menzione in altri autori.

50. *Zanobi da Pistoja* può essere quel *Zenone Zenoni* pistoiese il quale trovavasi in Padova quando vi morì il Petrarca, cioè nel 1374, con cui era in quegli ultimi vissuto. Compose un poema diviso in tredici canti in terza rima intitolato *Pietosa fonte*, il quale è stato dato alla luce con erudite note dal dottor Lami, al quale poema si era accinto per ordine di Francesco da Carrara. (Tiraboschi T. V, p. 771 e Bartolommeo Gamba *Serie* ec. p. 356, num. 1176.)

51. *Sinibaldo Perugino*. Questo rimatore che fioriva nel 1371, e che fu inoltre ambasciatore e onorato di ambascerie nella sua patria, negli anni 1378, 80, 81, 82, 83, è rammentato dal Vermiglioli (Scrittori Perugini T. II, p. 219)

e le sue rime stanno nei Codici Laurenziani e Marruceliani. Il poeta dice:

. . . . e il perugino
Sinibaldo di lingua ben fornido.

52. *Bonifacio da Carpo dotto e fino oblocutore*, scrive l' anonimo; ma io nulla ho trovato su lui nè anche negli Scrittori Modonesi del Tiraboschi. Era forse *Da Carpi*. Il Cod. Triv. dice *di Charpi*.

53. *Marsilio da Carrara*. Ripeto non risultarmi che Marsilio sia stato poeta, sendo d' altronde la sua storia già notissima anche per quanto in questi ultimi anni ne scriveva il chiarissimo Giovanni Cittadella (Vol. II, p. 331 e note 46, 47, e p. 472, 473).

(116) Siegue la schiera de' poeti Veneziani, i quali, giusta l' assunto dell' anonimo, devono avere scritto soltanto in *lingua volgare*, come li cinquantatre precedenti. Il *Monacis* ha scritto anche in lingua latina, ma non però di Amore. — Oltre, dunque, il veneziano *Pietro Polani* di sopra dall' anonimo ricordato, sonvi li seguenti:

54. *Giovanni Querini*, al quale Dante indirizzò alcuni Sonetti, come notava il Muratori nel T. I della Perfetta Poesia, lib. I, cap. III, c. 24. E in un Codice della Biblioteca Ambrosiana, secondo lo stesso, stanno rime anche del nostro Querini. — Il Foscarini (*Letteratura Ven.* Libro III, p. 318, nota 275) ripete la stessa cosa. Non posso stabilire figliuolo di chi fosse perchè nel secolo XIII-XIV più *Giovanni Querini* vivevano.

55. *Giovanni Foscarini*. Era figliuolo di Marino procuratore di San Marco, dice l' Agostini (Scrittori Veneziani T. I, p. 292). Ebbe diversi impieghi. Fu uno degli elettori del doge Marino Faliero (1354) e di Giovanni Gradenigo (1355). Fu pure, come il padre, procuratore di San Marco nel 1364. L' anonimo dice:

Jan foscareno, e nota quel ch' io dico
Che spregiato ha più volte la tiara
Da che s' ornò chuostui Jan gradonico.

Per *tiara* s' intende il *corno ducale*, nella concorrenza probabilmente di Giovanni Gradenigo. Che fosse poeta quel *Foscarini* non si rileva che dall' anonimo, e dietro lui lo asserirono gli altri. Marco Foscarini (l. c.) ripete la cosa stessa, aggiungendo non dubitare che sia quello stesso Foscarini del quale fece ricordanza Pietro Giustiniani, come uno de' primi senatori aggiunti al Consiglio de' Dieci nel 1354 (p. 67) e che del 1367 fu de' cinque mandati in Candia ad assettare le cose di quel regno messo in rivolta (p. 78). Il Caresini, continuatore della Cronaca del Dandolo, lo pone fra li quarantuno elettori del doge Andrea Contarini (1368). Morì nel 1390 vissuto essendo in Procuratia anni 26, come scrive il Coronelli.

56. *Giovanni Gradenigo*. Dopo parecchie legazioni e preture venne innalzato al seggio ducale nel 1355, e morì nel seguente 1356, come scrive l' Agostini (l. c.). Il Sanuto nelle Vite de' Dogi (R. I. S. T. XXII, col. 635) aggiunge ch' era dotto sì nelle divine che nelle umane lettere; ma qui nella Leandreide non sembra indicato come uomo dotto, o come poeta, ma semplicemente come doge. È però osservabile una variante. La lezione del Codice Ambrosiano citata dal Quadrio (T. IV, p. 430) dice, che *Giovanni Foscarini spregiò più volte la tiara di cui s' ornò costì Giovanni Gradenigo*. Ma il Codice Avogaro e il Codice Veneziano non dicono *costì* ma *costui*. Dicendo *costui* pare che vivo fosse ancora il Gradenigo quando scriveva l' anonimo. Se non che, sapendosi essere morto il Gradenigo nell' 8 agosto 1356, e sapendosi che l' anonimo scriveva verso la fine del secolo XIV e al principio del XV, non si può adottare la voce *costui* data al Gradenigo come vivente, ma bensì l' altra *costì*, cioè in *Venezia dove sei tu*. Potrebbe per altro l' anonimo avere, colla voce *costui*, cioè *questi ch' è qui*, voluto comprendere fra' poeti mostratigli dall' Allighieri anche il Gradenigo, uomo dotto, come attestava il Sanuto. L' ambrosiano *Di che*, ma gli altri *Da che*.

57. *Marino Dandolo*. Fiorirono diversi, dice l' Agostini (l. c.) col nome di Marino nel secolo XIV nella famiglia Dandolo; e il più illustre fu Marino f. di Pietro cavaliere q. Francesco doge. Un *Marino Dandolo* del 1379 da San Luca contribuiva imprestiti per la guerra di Chioggia. Potrebbe esser questo di cui l' anonimo; ma non ci restano poesie sue.

58. *Bonaventura Baffo.* A Bonaventura Baffo, *certamente claustrale,* risponde con una sua epistola il Petrarca, ch' è la IX fra le Senili del III libro. Negli Alberi patrizii non si rinviene un individuo col nome di Bonaventura; non dico perciò che non ci sia vissuto; anzi può essere che entrato alla Religione abbia cambiato nome, ed essere questo il motivo per cui non lo si trova. Di quale religione fosse, il dice l'anonimo con questi versi:

E tra noi son doi fra predicatori
De chi el bel dir le cappe lor rischiara
Bonaventura Baffo e il bon cantori
Gabriel de Bernardo che cacciato
Fu di nostra città, sai perchè, fuori.

59. *Gabriel di Bernardo.* Per quale motivo sia stato sfrattato da Firenze questo Gabriele ripeto di non saperlo; forse perchè avrà predicato a favore di un partito anzichè di un altro. Le parole *sai perchè* furono omesse dall' Agostini nel copiare i versi del Codice Avogaro (l. c.); ma esse sono e nell' Ambrosiano e nel nostro, e anche nel Foscarini (l. c.). Per altro nè di Bonaventura, nè di Gabriele si conoscono poesie volgari.

60. *Maffio da Pesaro.* Questi era figliuolo di Giovanni, della parrocchia di San Moisè, come dice l'Agostini (l. c.) e come si prova dagli Alberi patrizii i quali gli assegnano l'anno 1373. L'autore della Leandreide ce lo fa credere poeta e *innamorato*; ma non ci sono rimaste rime col suo nome.

61. *Antonio Dalle Binde.* Tra i puniti per la congiura di Marino Faliero (1355) ci fu, come ho detto, Antonio Dalle Binde, del quale il dottore Giovanni Lami nel Catalogo de' mss. della Biblioteca Riccardiana (T. I, p. 33) riferisce un sonetto fatto in persona del doge. Egli lo fa *Padovano,* e così pure il Savina nella sua cronaca mss. a p. 227 del mio Codice num. 1446; altre copie e anche il Sanuto però (colonna 634) ommettendo la patria, lo ritengono *Veneziano,* e io pure nostro lo credo, anche sull' autorità dell' anonimo che in questo luogo non annovera se non se veneziani. Egli non era di casa patrizia, ma popolare. Giuseppe Vedova negli Scrittori Patavini cita il nome di Antonio all' articolo BINDE, e manda a vedere sotto PADOVA (da) ANTONIO; ma si dimenticò di porvelo.

62, 63, 64. *Marino, Pietro* e *Marco Grioni.* Qui tre della famiglia veneta patrizia de'*Grioni* sono ricordati. *Marino* era figliuolo di Omobon q. Benetto; *Pietro* e *Marco* fratelli erano figliuoli di Pietro q. Francesco. Marino fu iscritto pel Maggior Consiglio nel 1315, e Pietro e Marco fiorivano nel 1348-1349. Così si rileva dalle Genealogie di Marco Barbaro; e l'anonimo ponendoli nel novero de' poeti ci fa vedere che eran gente cultivata nelle lettere; ma non si conoscono oggidì rime di loro. — Ripeto poi, che avendo tanto l'Agostini (l. c.) quanto il Foscarini (l. c.) letto malamente nel Codice Avogaro *Zironi* in cambio di *Grioni* che ha l'Ambrosiano (Quadrio T. IV, p. 431) e il nostro, così non seppero trovarne notizia, com'io ebbila trovata; e ne feci nota a p. 508 del Vol. V delle Inscrizioni, allegando il Codice presente. — Aggiungo che quel *Pietro Grioni* fu condannato per monachino nel 26 ottobre 1349, come dal Registro che ne tengo (Codice n. 2674) ove si legge: 1349 *die* 26 *octobris — Petrus Grioni monachinus in monasterio sancti Adriani cond. in l.* 100 *p̄p baño et ms.* 2 *in carcere.*

65, 66. *Giovanni* e *Nicolò Boccassi.* Trovansi nelle Genealogie i nomi di Giovanni e di Nicolò Boccassi. Eran due fratelli figliuoli di *Bertucci* ossia Albertuccio. Dicendo Dante:

Giovanni e Nicholò Bochassio buoni
Fur *dicitori*

li fa conoscere anch'essi per poeti di vaglia, sebbene non ci siano rimaste le loro poesie.

67. *Andreolo Alemanno.* Continua l' anonimo a dire:

. . . . . . il tuo caro Andriolo
Alemano fu pien di dolci suoni.

Io tengo che questi sia quell' *Andrea Alemani* di cui rimane memoria in un Indice di sepolture già esistenti nel chiostro de' SS. Giovanni e Paolo (Codice mio n. 379): *Sepultura D. Andreae de Alemanis phisici in terra posita est in claustro parte ecclesiae . . . et habet unum doctorem sculptum super coopertorium et insigne habentem unum pedem volucris . . . epitaphium*

vero est vetustate obliteratum (era del secolo XIV verso il fine, come da altre vicine lapidi si riconosce). Dobbiamo all' anonimo il sapere che Andrea, o Andriolo era versificatore, ma non ne abbiamo pruova scritta. Del resto la casa *Alemanni* non patrizia, era bensì cittadinesca Veneta, e un *Nicolò*, come dice l'Agostini (l. c.), soscrisse quale notaio ducale all'istrumento con cui la città di Trevigi si assoggettò al dominio de' Veneziani, anno 1344 10 febbraio. E il Verci a p. 35 e seg. del Vol. 12 della sua *Storia della Marca Trivigiana e Veronese* (Venezia 1789) ne reca l' istrumento testualmente, leggendosi *Rafaino de Caresinis, Nicolao de Alemanis scribis et notariis ducalis Curie Venetiarum.*

68. Jacomel Gradonico, in questo stuolo
È noto. . . .

dice l' anonimo. Egli era figliuolo di Marco della parrocchia di S. Paolo. Ebbe varii magistrati urbani e ambascerie, e fu podestà dei Perugini, come ho indicato, nel 1389. — Francesco Novello avealo scelto nel 1392 a Pretore in Padova, e per essersi immischiato in cose politiche col Carrarese fu arrestato egli e Pietro Pisani. — Il *Pisani* ebbe condanna nel 22 gennaio 1405 (cioè 1406) a cinque anni di carcere e alla perdita degli onori e impieghi, colla confisca de' suoi beni; e il *Gradenigo* meno colpevole ebbe tre anni di esclusione da ogni officio. Così, rettificando la cosa, diceva il chiarissimo nostro Samuele Romanin a p. 37 del Vol. IV della *Storia Veneta documentata*, mentre l'Agostini, che avea dettata la vita del Gradenigo (T. I, p. 278, 293) disse essere stato il Gradenigo *privato da qualsivoglia Consiglio segreto della Repubblica*, lasciando quindi dubbio se ne fosse in perpetuo, o temporariamente. L' Agostini crede esser morto il Gradenigo innanzi l' anno 1420. L' opera del Gradenigo citata ha questo principio: *Incomincia gli quattro evangeli concordati in uno, et prima quello che era la summa bontate avanti il principio del mondo*, ec. . . Finisce colle parole: *expletum Padue de* MCCCLXXXXVIIII (1399) *die primo mensis octubris per me Zacobum Gradonico militem venetum.*

69. *Bernardo Foscarini* era figliuolo di Giovanni procuratore di S. Marco ricordato di sopra, e fioriva nel 1372, abitante a S. Paolo, e del 1392 abitante a S. Pantaleone. L' anonimo ce lo mostra come poeta, ma ignote sono ora le sue poesie.

70. *Lorenzo de Monaci.* Di questo scrisse, come dissi, la vita l'Agostini (T. II, p. 363-371). Fu del 1389-90 Gran Cancelliere nel regno di Candia, e moriva assai vecchio nel 1429. Abbiamo di lui un *Chronicon de rebus Venetis ab urbe condita usque ad annum* 1354, il quale fu impresso nel 1758 in Venezia, con prefazione erudita di Flaminio Cornaro. Scrisse anche un poema latino circa il 1386 intorno Carlo V, cognominato il piccolo Re d' Ungheria, il cui fatal caso succeduto era nel detto anno 1386.

71. *Marin Michiel*, di cui l' anonimo scrive:

. . . . . che l' infula sereno
Poi fece . . .

L' Agostini per errore lesse *insula* in luogo di *infula* cioè tiara vescovile. Il Foscarini a questo passo dice (p. 319): *Quanto poi a Marin Michele nominato l' ultimo nelle terzine ci è affatto ignota la persona.* Ma certamente egli è il Vescovo di Cittanova ossia Emonia ricordato dall' Ughelli (T. V, p. 240) e dal Cappelletti a p. 755 del Vol. VIII delle Chiese d' Italia. L' anonimo cel fa conoscere come poeta; ma non si sa dove sieno nascoste le sue rime.

72. *Il tuo germano.* L' Allighieri dopo aver mostrati all'autore gli antedetti poeti, parlando del *Michiel* dice:

Marin Michel che l' infula sereno
Poi fece sì come anche il tuo germano
Di summa gravità maturo e pieno.

Ora non sapendosi chi sia l' autore della Leandreide, non puossi sapere chi sia questo suo *germano* ossia fratello. Egli per altro dal paragone, che ne fa Dante, sembra dovere essere *mitrato*, ossia *vescovo*. Vedi nel Capo IV le indagini che fo sopra l' anonimo.

73, 74. *Altri due.* L' Allighieri siegue a dire:

Degli altri duoi il chiaro e dolce canto
Non promo, a cui cotesta opra tu mandi
Perchè non paj' lusingarli in tanto.

Dalle quali parole è facile dedurre che l'anonimo indirizzava la sua Leandreide a due suoi amici

e personaggi distinti, che rimangono tuttora ignoti.

(117) Libro 4, canto 8, il cui titolo è: *Cantus octavus in quo introducitur Ernaldus de Provenza ad nominandum suos doctores et auctores provenzales.* Il Tiraboschi (T. V, p. 629) faceva menzione di questo canto ottavo dicendo: *Un saggio di poesia provenzale abbiamo ancora nel poema della Leandreide, il cui canto VIII del libro IV è scritto in quella lingua.* Non avendo io fatto alcuno studio di quella lingua, ed occupandosene in questi dì Emilio Teza giovane dotto e studiosissimo di linguistica, il quale, esaminando anche i Codici provenzali che abbiamo nella Marciana, trovò poesie e nomi non da altri riportati, ebbi a lui ricorso per la spiegazione di alcuni vocaboli i quali mi facilitassero la intelligenza del testo. Colla scorta poi del Nostradamo volgarizzato dal Crescimbeni, e da lui accresciuto, del Quadrio, del Raynouard, del Galvani ed altri autori che scrissero intorno alle Vite de' poeti provenzali, e della loro lingua e che ne recano molte delle loro poesie in originale, tratte, come dissi, dai Codici Vaticani, Fiorentini ed altri, mi pongo a soggiungere l' elenco ragionato, come feci per li precedenti, dei poeti che qui enumera l' anonimo.

1. *Arnaut de Mervoil.* Arnaldo di *Maraviglia* gentiluomo provenzale, era poeta grazioso e di bella presenza. Morì del 1220, e il Petrarca lo ha nominato nel Capitolo quarto del Trionfo d' Amore. Il Vellutello sponendo il capitolo lo dice *Arnault de Marvoil,* altri *Arnaldo di Morville,* e *Arnaldo di Miroill* e *Narnald de Miroill,* e nel Codice Vaticano n. 3206 è detto *Arnauz de Miroil,* ec, ma è sempre la stessa persona. Osservava poi il Crescimbeni che diversi *Arnaldi* poeti vi furono tra' provenzali. Vedi il detto Crescimbeni (T. II, p. 45, 47, 48), il Quadrio (T. II, p. 118, 146); il Raynouard nel Lessico (T. I, p. 347) e nella Scelta (T. III, p. 199, T. V, p. 45), e il Galvani (p. 99, 459, 470, 490, 509, 512), il quale chiamalo *Arnaldo di Merviglia* o *Marviglia.* Il Codice per errore dell' amanuense dice *Mernoil.*

2. *Folqet de Marseila.* Folchetto da Marsiglia figlio di Alfonso, era ricco mercatante genovese, e componeva dottamente in lingua provenzale. Si fece poi monaco e morì del 1213. È ricordato dal Petrarca: *Folchetto che a Marsiglia il nome ha dato,* ec. Vedi il Crescimbeni (T. II, p. 33, 36, 240), il Quadrio (T. II, p. 115), il Raynouard (Lessico T. I, p. 341, e Scelta T. III, p. 149, e T. V, p. 150), e il Galvani p. 24, 62, 96, 202, 291, 450, 456, 470. E nel Codice Naniano, ora Marciano, descritto dal Morelli a p. 148 dell' Indice, trovansi poesie anche di lui.

3. *Lus Guindisel.* Guido d' Uzez, che moriva nel 1230. Il Nostradamo lo chiama *Guy d' Uzez,* e i Codici ora lo dicono *Guidonsel, Guiduselh, Guidusell, Guiduisel,* ora *Guiduxel, Guidufels,* ecc., ecc. Il Raynouard (Scelta Tom. III, pag. 376; Tom. IV, pag. 30, e Tom. V, pag. 175) e il Galvani pag. 47, ne recano poesie.

4. *Ganzbert de Pomipot* (così il Codice). Questi è Gualberto o Alberto di Poggibot variamente detto *Gasbert de Poycybot,* ec., ottimo poeta provenzale. Morì nel 1263. Vedi il Crescimbeni (p. 80, 81, T. II), il Quadrio (T. II, p. 125, 126), il Raynouard (Scelta T. III, p. 365 e T. V, p. 51, che il chiama *Aubert Moine de Puicibot),* e il Galvani p. 315, il quale osserva uno sbaglio nel Crescimbeni nello avere tradotta la voce *banzias* per *allegrezze,* mentre vuol dire *inganni,* a proposito di un *Trattato di Alberto di Poggibotto.* Sue poesie sono nel detto Codice Naniano, di cui il Morelli a p. 148 dell' Indice.

5. *Yaufré Rudel.* Giuffredo Rudello gentiluomo signore di Bleus o di Blaja in Provenza fu buono poeta e facile nel romanzare. Morì nel 1162. Si nomina anche *Gaufres Rudell, Jaufred Rudel, Gianfré, Giofré,* ec. (Crescimbeni, T. II, p. 11), (Rayn., T. III, p. 94 e T. V, p. 165 Scelta). Il Galvani non lo ricorda, se bene ho osservato.

6. *Guillermen Azemar.* Guglielmo Adimaro gentiluomo provenzale compose il catalogo delle donne illustri in rima provenzale e lo dedicò all' imperatrice moglie di Federico. Morì del 1190. Alcuni lo chiamano *Guilhem Adhemar,* e *Guillems Ademars.* Vi è parimenti un *Gugliel-*

mo Gasmar che sembra essere lo stesso. (Crescimbeni, T. II, p. 28, 29); (Quadrio T. II, p. 113 ec.), (Raynouard lo dice *Adhemar*. Lessico T. I, p. 345, e Scelta T. III, p. 192, e T. V, p. 178), Galvani p. 164, 165, 166.

7. *Guilerm de Biarz*. Guglielmo del Bauzio principe d'Oranges, è ricordato anche da Mario Equicola nel libro quinto cap. ultimo *Della Natura d'Amore*, e lo dice Guglielmo *del Baus*. Crescimbeni T. II, p. 191) Quadrio T. II, p. 120) (Rayn. Scelta, T. V, p. 184). Il Galvani non lo nomina.

8. *Arnaut Dauiel*. Arnaldo Daniello fu poeta distinto vissuto circa 1189. Alcuni lo dissero *Beruaut Daniel* e *Dauiels*, altri *Narnald*, altri *Arnald*. Dante si valeva dell'autorità di lui, e lo riponeva fra' poeti provenzali più eccellenti. (Crescimbeni, T. II, p. 21, 27, 237); Quadrio, T. II, p. 112, 146, ec.); Rayn. (Scelta T. II, più volte e T. V, p. 30); (Galvani, p. 24, 99, 100, 101, 491, 505, 509). Poesie di lui stanno anche nel Codice Naniano suaccennato.

9. *Fousalada*. È Elia *Foussalada* o Fontesalata, di cui a p. 184, T. II, il Crescimbeni dice che fu meglio novellatore che trovatore. L'anonimo scrive: *Fonsalda que qant roy Aragon*; (Raynouard lo ricorda nella Scelta T. V, p. 142, 143, e cita altri autori). Il Galvani non ne parla.

10. *Giraudou lo ros*. Di *Giraudon lou Roulx* o Giraldone, o Girardo il Rosso, e forse anche Giraldino, fece menzione il Tassoni nelle *Considerazioni* sopra il *Petrarca* c. 17. Di lui sono rime nei Codici provenzali di S. Lorenzo di Firenze, ov'è chiamato *Girardou lo Ros*. (Crescimbeni, T. II, p. 132, 133); (Quadrio, T. II, p. 137); (Rayn., Lessico T. I, p. 323, Scelta T. III, p. 5, ove lo dice *Girardo*, e T. V, p. 172). Il Galvani (p. 38, 39, 40) lo chiama *Giraldo* o *Giraldetto il Rosso trovatore gentilissimo*. Egli stesso poi nelle sue poesie si dice *En Giraudet lo Ros*.

11. *Elias Cairel*. Elia Carello, o Quadrello, detto anche Carel, e Cairels, e Carell era orefice ed argentiere, ed ha rime nel Codice 3204 della Vaticana. (Crescimbeni, T. II, p. 183, 184); (Quadrio, T. II, p. 117); Rayn. T. I, p. 435. Lessico, e Scelta T. III, p. 430, T. IV, p. 295, T. V, p. 140). Il Galvani, p. 467, *Elia Cairello* o *Quadrello*.

12. *Perdigou*. Questi era poeta comico, musico, e sonatore d'ogni sorta stromenti da corda e da fiato. (Crescimbeni, T. II, p. 85, 86); (Quadrio T. II, p. 126). (Rayn., Lessico T. I, p. 419; Scelta T. III, p. 344, T. IV, p. 16, T. V, p. 278), (Galvani, p. 48, 68, 203).

13. *Raenbaut Daurenga*. Rambaldo d'Oranges datosi a coltivare l'amore delle dame, innamorossi della Contessa d'*Orgueiglie*, dice il Crescimbeni. Ma il Monaeo dell'Isole d'Oro dice che questa non era la Contessa d'*Orgueiglie*, ma bensì quella di *Monteruggiero*. E io sto col Monaco, giacchè anche l'anonimo scrive *la Cotessa Mon Rosier*. Alcuni poi lo chiamano *Raimbaldo D'Auvergna* altri *Rambaud d'Orengé*, e ciò perchè fu signore di quel luogo. Lo ricorda anche il Petrarca. Morì del 1229. Vedi Crescimbeni, T. II, p. 64, 65, 66; Quadrio, T. II, p. 121; Rayn., Lessico T. I, p. 324; Scelta T. III, p. 15, T. IV, p. 5, T. V, p. 401. Stanno poesie di lui anche nel Codice Naniano.

14. *Gulierm de Sayut Desdier*. Guglielmo di S. Desiderio, o di Sant'Isidoro, o di S. Didiero, o, come alcuni Codici, *de Saint Leidier*, o *Leisdier*, o *Disdier*, amante della Marchesa di Polignac, produsse varie canzoni nelle quali nominava la Marchesa col finto nome di *mon Bertram* per non dar sospetto del suo amore al marito di essa. Morì circa il 1185. (Crescimbeni, T. II, p. 20, 21); (Quadrio, T. II, p. 112, T. V, p. 106); (Rayn., Scelta T. III, p. 298, T. IV, p. 135, T. V, p. 207). Il Galvani p. 51, 224, 312, 491, riferendone una *Rima* dice *la cui bellezza è oltra ogni credere dolce e gentile*. L'anonimo poi qui rammenta la figlia del conte Raimondo prode. *(Alla file dels conte Raymou pros)*. Ora sapendosi che Guglielmo morì al servigio de'Conti di Provenza nel 1185, io credo che quel Raimondo sia, o *Raimondo Bereugario II conte di Provenza* (an. 1144-1166) ch'ebbe una unica figlia nominata *Dolce*; oppure *Raimondo Berengario III coute di Proveuza*, che nel dicembre 1168, ebbe quella contea da suo fratello Alfonso I, e che morì ucciso nel 1181. L'anonimo

non ricorda quel *Raimondo* come poeta. Il poeta era l'altro *Raimondo Berengario IV*, marito di Beatrice figlia del conte Tommaso di Savoja (an. 1220-1245), che ricordo qui al n. 17. Vedi T. X, *Conti di Provenza* nell'Arte di verificare le date, ediz. veneta 1835, in 8.°

16. *Cadenet* (il copista per errore dice *Candenot*). Questi è Cadenetto, umanista e poeta, morto nel 1280. Il Redi nel Ditirambo il chiama *Elia Cadanetto*, ma nei Codici sempre *Cadenet*. (Crescimbeni, T. II, p. 108); (Quadrio, T. II, p. 130); (Rayn., Lessico T. I, p. 360; Scelta T. III, p. 245, T. IV, p. 282, T. V, p. 110). Il Galvani non lo nomina.

17. *Nuc de Saint Sir*. Ugo di S. Siro, detto altrimenti Nug de S. Syr, Saincir, Sansil, Sam Sire, Saint Cire, era poeta provenzale buono. Fece rime in laude di Claramonda di *Quinqueram* dedicate alla principessa Beatrice di Savoja, *contessa di Provenza* e moglie di Raimondo Berlinghieri (ossia Berengario), siccome l'anonimo dice:

Nuc de Saint Sir fapt son canzon entendre
Alla valen contessa de proenza.

Ugo moriva nel 1225. (Crescimbeni, T. II, p. 54); (Quadrio, T. II, p. 119); (Rayn., Lessico T. I, p. 417; Scelta T. III, p. 330, T. IV, p. 288, T. V, p. 222). Galvani, p. 97, 98, 472. 473, 492. — Era poetessa eziandio la *Contessa di Provenza*, siccome accennano il Quadrio, T. II, p. 123, il Rayn., T. V, p. 123, che ne reca un *couplet* tratto dal Millot, e il Galvani p. 27. — Anche il conte Raimondo Berengario fu buon poeta, amante delle persone dotte, ed è ricordato da Dante nel canto VI del Paradiso; egli morì del 1245. Veggasi il Crescimbeni, T. II, p. 72, 73, 74.

Il Petrarca nel citato luogo ricorda parimenti un *Ugo* poeta provenzale; ma nell'anonimo se ne notano due, cioè il presente *Ugo di S. Siro*, e l'altro *Ugo de Brunet*, che vedremo al n. 31. I commentatori però credono avere il Petrarca inteso di un terzo *Ugo di Penna*; che non è nominato dall'anonimo; ma il Crescimbeni sostenta doversi intendere del presente *Ugo di S. Siro*.

18. *Aymerich de Bellenuey*. Almerigo di Belvedere fu professore di belle lettere e poeta comico. Morì del 1264. Il Tassoni lo chiama ora *Belenuei*, ora *Belenoi*. Dante, nel Trattato della volgare eloquenza, lo dice *Amerigo di Belmi*. Il Vellutello: *Amerigo de Belinghi*; ma nei Codici *Bellinoi*, *Belenoi*, e *Benanui* ec. (Crescimbeni, T. II, p. 83); (Quadrio, T. II, p. 126); (Rayn. dice *Bellinoi*. Scelta T. IV, p. 60, T. V, p. 4, 5, 6); (Galvani, p. 63, che pur dice *Bellinoi*).

Il Petrarca annovera un *Amerigo*. L'anonimo ne mette due, cioè questo *Almerigo di Belvedere*, e l'altro che vedremo al n. 23 *Amerigo di Pegulan*, o *Pingulano*, amendue i quali sono rammentati dall'Allighieri nel suo Trattato *de Vulgari Eloquio* (Libro 2, capo 6 e 12). Resta quindi dubbio a quale dei due abbia avuto mira il Petrarca; nè gli espositori Vellutello e Gesualdo lo risolsero.

19. *Bernart de Ventadorn*. Bernardo di Vantadore era ingegnoso e di gran destrezza, e sapeva poetare e cantar assai bene. Varie cose scrisse, e morì del 1223. In diverse maniere anch'esso si trova nei Codici, *Ventadour*, *Ventedorn*, *Ventadorn*, *Ventador*, *Ventadom*, ec. Veggasi il Crescimbeni (T. II, p. 50); il Quadrio (T. II, p. 118); il Raynouard (Lessico T. I, p. 329; Scelta T. III, p. 42, ove dice *Ventadour*, e T. IV, p. 7 e T. V, p. 69), e il Galvani, p. 32, 33, 43, 76, 313, 472, 473, 489, 505, 507, 509, e lo chiama *gentilissimo fra i gentili, ed amoroso trovatore*. Veggonsi sue poesie anche nel Codice Naniano.

20. *Gaucelm Faidit*. Gaucelmo Faidit buon poeta provenzale morì del 1220. Lo ricorda il Petrarca nel citato Trionfo d'Amore, e fu ai servigi di *Riccardo* re d'Inghilterra, cosa ricordata dall'anonimo. Variamente viene chiamato, *Ganselm Faiditz*, *Gauselm*, *Gauselin*, *Gauselins*, ec. Alcuno lo ha detto *Anselmo di Federigo*. Vedi Crescimbeni (T. II, p. 43, 44, 232); Quadrio (T. II, p. 117, 146); Rayn. (Lessico T. I, p. 368; Scelta T. III, p. 282, T. IV, p. 13, T. V, p. 158); Galvani, p. 51, 62, 68, 137, 181, 188, 312, 487, 508, dicendolo *Gaucelmo Faidito*. Sue poesie stanno nel citato Codice Naniano ora Marciano.

21. *Richart Reys delz Engles*. Questi è inserito dall'autore ove del detto Gaucelmo Fai-

dito. — Riccardo re d'Inghilterra era soprannominato *Cuor di Leone*, rimava, e poetava alla foggia de' provenzali. Crescimbeni (T. II, p. 95-96); Quadrio (T. II, p. 132); Rayn. (Scelta T. IV, p. 184, T. V, p. 430); Galvani p. 63, 98, 508, che lo dice *più gran guerriero che gran Re.* Moriva nel 1199.

22. *Raenbaut de Vacheras.* Rambaldo di Vachera figliuolo di un cavaliere di Provenza signor di Vachera, fu buon poeta e comico provenzale. Morì nel 1226, ricordato anche dal Petrarca nell' accennato Capitolo del Trionfo d'Amore. Il Nostradamo lo appella *Rambaud de Vachieras*, altri *Rambaut, Ranbautz, Raembaut*, ec. Vedi i soliti Crescimbeni, T. II, p. 56, 57, 58; Quadrio, T. II, p. 120; Ray., Lessico T. I, p. 364, Scelta T. III, p. 256; T. IV, p. 11, T. V, p. 416. Galvani trova gustosa una sua tenzone, p. 80, 96, 109, 110, 181, 471.

23. *Aymeric de Pegulan.* Amerigo di Pingulano, di cui il Crescimbeni (T. II, p. 78), e il Quadrio (T. II, p. 125), gentiluomo di Tolosa, fu buon professore di poesia provenzale, e morì circa il 1260. Alcuni il dissero *Naymeric*, e altri *Piguillan, Pergoilhan, Pinguillan, Pigonan, Putham, Peculian, Pegullar*, ec. Vedi anche il Rayn. che lo dice *Aimeri de Pegulain.* Lessico T. I, p. 429, Scelta T. III, p. 425, T. IV, p. 23, T. V, p. 8, 9; e Galvani p. 55, 64, 229, 230, 314, chiamandolo *celeberrimo gentiluomo Tolosano.*

24. *Guillem de Berguedan.* Guglielmo di Bergedamo, o Berghedano, ricco barone di Catalogna, e Visconte di Bergedamo, ossia di Berga, fu valoroso guerriero e poeta. Morì poco dopo il 1260. (Crescimbeni, T. II, p. 191, 192); (Quadrio, T. II, p. 125), (Rayn., T. V; Scelta p. 186); Galvani, p. 31, 498). Il Petrarca nel suaccennato Capitolo quarto ricorda fra' provenzali un *Guglielmo che per cantar ha 'l fior de' suoi dì scemo.* Ora più *Guglielmi* provenzali poeti rammenta qui l' anonimo : ma fra questi non vi corrisponderebbe altri, a mio parere, se non se questo *Guglielmo di Bergedamo*, del quale aggiunge il Crescimbeni (l. c.) essere rimasto ucciso da un pedone certamente sul fior degli anni. Gli espositori peraltro dicono avere il Petrarca in quel sito inteso di *Guglielmo di Cabestano*, di cui leggesi nella Novella nona della Giornata quarta del Decamerone essere stato ucciso da *Guglielmo Rossiglione.* E se è così, di *Guglielmo di Cabestano* non credette di far menzione l' anonimo.

25. *Miraval.* Io credo che questi sia *Raimondo di Miravalle*, povero cavaliere di Carcassona, il quale possedeva una parte del Castello di Miravalle, e che per la bellezza della sua poesia e del suo canto ogni dama ed ogni damigella amava di averlo in conversazione. Morì del 1218 carico d' anni. Vedi Crescimbeni (T. II, p. 40, 41, 42) ; Quadrio (T. II, p. 116) ; Raynouard (Lessico T. I, p. 423; Scelta T. III, p. 357. Il Galvani a p. 489, 506. chiamalo *Miravalso* e anche *Miravalle.*

26. *Guillem de Montagnegol.* Nulla più del nome nel Codice, dicendo, con altri che seguono, *Ciaschun trop val.* Guglielmo Montanago, citato dal Tassoni nelle anzidette Considerazioni a c. 291, 297, è lo stesso che *Guglielmo Montagnagotto* o *Montaguacollo*, o *Montagnagol.* Vedi Crescimbeni (T. II, p. 195, 200, 201). Il Quadrio (T. II, p. 115) lo crede forse quel *Guglielmo di Montagolo* o *Mondagoto* che fu vescovo di Avignone nel 1310, e poi nel 1312 vescovo cardinale Prenestino. (Rayn. lo chiama *Montagnagout.* Scelta T. IV, p. 214, T. V, p. 202). Il Galvani non lo nomina.

27. *Per Vidal.* Il nome solo nel Codice. Pietro Vidal figliuolo di un pelliciaro di Tolosa *(che cantò meglio di qualunque altro)* cantò anch'egli possedendo in ottimo grado la musica. Morì circa il 1229, e il Petrarca ne ha parlato nel suo Trionfo d' Amore. È chiamato *Peyre Vidal*, o *Peire Vidals* (Crescimbeni, T. II p. 67, 68, 69) ; Quadrio (T. II, p. 122). Un brano delle poesie del Vidal sta a p. 135 del Reggimento delle donne del Barberino. Milano Silvestri 1842 in 8.° Il Vidale rammentasi e se ne recan poesie dal Raynouard nel Lessico T. I, p. 401, 417 ; Scelta T. III, p. 318, T. IV, p. 24, e 334, T. V, p. 334; e dal Galvani p. 392, 492.

28. *Mouge de Moutandon.* Il solo nome nell' anonimo. Il Monaco di Montaudon fu gentiluomo d' Alvernia *(Auvergne)* e si fece Monaco

della Badia di Orlac. Nelle sue composizioni fu molto satirico, e sue rime stanno nei soliti Codici Vaticani e Laurenziani. Vedi Crescimbeni (T. II, p. 200); Quadrio (T. II, p. 133); Raynouard (Scelta T. III, p. 449, T. IV, p. 42, T. V, p. 263). Il Galvani non ne parla.

29. *Pons de Capducol.* Nulla più del nome nella Leandreide. — *Ponzio di Capodoglio*, o più propriamente di *Capitolio* o *Campidoglio* detto *Pons de Capduoill*, valoroso fu non meno nell' armi che nelle lettere e particolarmente nel poetare in lingua provenzale. Fu detto anche *Capdoill*, *Capduch*, *Capduill*, *Capdueill* e *Cabduoill.* Morì oltre mare. (Crescimbeni, T. II, p. 206, 207); (Quadrio, T. II, p. 120); (Raynouard, Scelta T. II, p. 170, T. IV, p. 90, T. V, p. 352). Galvani, p. 473, 506, 508, lo dice anche *da Campidoglio*, e *dal Campidoglio.*

30. *Richaut de Berbecil.* Il nudo nome nel Codice. Riccardo signore di Berbisino, uomo di bella presenza, e molto esercitato nelle sacre lettere, e nella poesia provenzale, ed eziandio nelle matematiche, fu anch' egli trasportato da amore. Morì circa il 1383. Il suo nome è assai variato nei Codici, per esempio *Berbesin*, *Berbezilh*, *Berbesill*, *Berbesieu*, *Berseil*, ecc. Si vegga il Crescimbeni, T. II, p. 155, 156, 157; il Quadrio, T. II, p. 144; il Rayn., Scelta T. III, p. 452, T. V, p. 433, che lo dice *Richard de Berbesille*; il Galvani, p. 317, 501 che lo chiama *Riccardo di Berbezille.*

31. *Nuc els Brunet.* Solo nome. Ugo Brunetto gentiluomo di Rodes, professore di belle lettere e buon poeta in lingua provenzale, è ricordato dal Crescimbeni, T. II, p. 48, 49; e dal Quadrio, T. II, p. 118. Ne' Codici con varietà è chiamato *Nuc Brunes*, o *Brunees*, o *Brunent*, e *Brunets*, ecc. Morì nel 1223. Il Raynouard lo dice *Hugues Brunes.* Lessico, T. I, p. 400; Scelta T. III, p. 315, T. V, p. 218. Il Galvani pur ne parla a p. 313, e a p. 512, ove forse per errore di stampa è detto *Brunello* anzichè *Brunetto.*

32. *Peroul.* Solo nome. Pieruolo, detto Peirols, e Peirol, era d' Alvernia, d' un castello detto *Peirol*, e povero cavaliere, ma buon trovatore. Alcuni lo hanno confuso (dice il Crescimbeni, T. II, p. 203) con *Pietro d' Alvernia* soprannominato il Vecchio, figliuolo di un cittadino di Chiaramonte, del quale fa menzione il Petrarca nel citato Trionfo d' Amore, e lo stesso Crescimbeni (T. II, p. 111, 112, 113). *Peyrols* lo appella il Rayn., Scelta T. III, p. 268, T. IV, p. 102, T. V, p. 281; e il Galvani, *Peirolo* a p. 21. — *Di Pietro d' Alvernia* veggasi lo stesso Rayn., Scelta T. III, p. 327, T. IV, p. 7 e T. V, p. 291; e il Galvani, alle p. 31, 47, 76, 435, 436, 508. Anche nel Codice Naniano sonvi rime tanto di *Pieruolo*, quanto di *Pietro d' Alvernia.*

33. *Giraud Borneil.* Solo nome. Girardo di Bornello gentiluomo di Limoges, è quello di cui si è veduto il nome al num. 3 fra i poeti recenti (Libro 4, canto 7). E quindi non so come Dante aver possa mostrato all' anonimo due volte un personaggio stesso. È chiamato ora Borneill, Bornail, Bornello, Brunello, ed ora Gerardo, Girardo, Giraldo. Egli era nato da poveri genitori; fu uomo saggio e prudente e il miglior poeta in lingua provenzale de' precedenti e de' posteriori, dice il Crescimbeni. Morì nel 1278. Il Petrarca nominollo nel citato Trionfo, dicendo: *E il vecchio Pier d' Alvernia con Giraldo.* Vedi il Crescimbeni (T. II, p. 98, 99, 100, 101); il Raynouard, Lessico, T. I, p. 375, 399; Scelta T. III, p. 304, T. V, p. 166; il Galvani, p. 31, 32, 139, 140, 509, 521. Vedonsi sue poesie nel più ripetuto Codice Naniano.

34. *Maria Deventadorn.* Il solo nome. Maria di Vantadore o Ventedorn, fu donna nel Limosino la più pregiata del secolo XIII, e poetessa. Sue rime stanno nei soliti Codici Vaticani. Vedi Crescimbeni, T. II, p. 199; Quadrio, T. II, p. 122; Rayn., Scelta T. IV, p. 30, T. V, p. 257. Il Galvani, p. 27, chiamala *Maria di Ventadorno*, ove nota le donne che si distinsero nella poesia provenzale.

35. *Raymon Yordan.* Il nome solo. Raimondo Giordano, detto anche *Remon Jourdan*, fu buon poeta in tutte le lingue volgari. Morì intorno il 1206. Il Tassoni nelle Considerazioni al Petrarca c. 19 lo dice *Jorda*, forse perchè nel testo da lui veduto mancava l' ultima lettera *n* o la lineetta sopra l' *a* (Crescimbeni, T. II, p. 31, 32, 33;

Quadrio, T. II, p. 114; Rayn., Scelta T. IV e V, p. 376; Galvani, p. 312, 454 riferendo una novella che lo riguarda.

36. *Nalbertet paubertin de Bonareil.* Il nome solo. Trovo nel Crescimbeni (T. II, p. 114, 115) un *Alberto* detto anche *Albertet de Sisteron*, poeta comico assai stimato, di cui rime stanno nel Codice Vaticano num. 3204, e di cui parla pure il Quadrio (T. II, p. 133, T. IV, p. 53) come poeta drammatico. Il Raynouard nel Lessico T. I, p. 496, lo dice *Albertet de Gap ou Albert de Sisteron.* Ne parla pure nella Scelta T. IV, p. 40, e nel T. V, p. 15, dicendolo: *Albertet de Bonareil ou Albert de Sisteron.* Un brano di poesia di *Albertetto* tratto dal manoscritto estense riferisce il Galvani a p. 469; e a p. 316 e 491 lo chiama *Alberto da Sisterone.* Il chiarissimo signor Teza, che ho dianzi ricordato, suppone che in vece di *paubertin*, che leggono i Codici, s'intenda *Lamberti de Buvarel* o *Bonarel*, di cui il Raynouard ci dà pochi frammenti (Scelta T. V, p. 243). Quindi sarebbero due nomi, l'uno *Albertet*, l'altro *Lamberti de Bonarel*.

37. *Guilliern Dandusa.* Il solo nome. Nè nel Crescimbeni, nè nel Quadrio, nè nel Galvani trovo questo poeta. Il *Millot* però lo ricorda nel Vol. IV, p. 408 della sua Storia de' Trovatori; e il Raynouard, nella Scelta T. V, p. 178, reca un frammento delle sue poesie. La famiglia D' Andusa era nobile d'Alvernia, della quale una *Elisa* figliuola di Bernardo D' Andusa è ricordata a p. 59 del Vol. II del Crescimbeni, e a p. 120 del Vol. II del Quadrio, circa l' anno 1220. Il suddetto Raynouard nel Vol. III della Scelta, p. 335, reca poesie di una *Chiara d'Andusa*, e a p. XXXI del Vol. I, è la traduzione d' uno squarcio delle poesie di essa. È probabile che *Guglielmo* fosse della stessa famiglia. *Bernardo* è anche ricordato dal Crescimbeni a p. 190 del detto Volume.

38. *Folqet da Roman.* Il solo nome. Folchetto di Romano, detto anche *Folquet de Romans* o *de Rotmans*, fu buono giullare, e poeta vagante per le Corti de' principi a dar loro solazzo. Sue rime stanno de' sopraccitati Codici Vaticani e Laurenziani. Vedi Crescimbeni T. II, p. 186; Quadrio, T. II, p. 114; Rayn., Lessico T. I, p. 486; Scelta T. V, p. 152. Il Galvani non lo rammenta.

39. *Pere de Bonifaci.* Nome solo. Pietro di Bonifazii, gentiluomo di Provenza, si diede in sua gioventù allo studio delle belle lettere, e dipoi alla poesia, e al rimar provenzale. In seguito studiò anche l' alchimia. Morì nel 1383. È chiamato *Pierre de Bonifaziis* dal Nostradamo. Vedi il Crescimbeni, T. II, p. 157, 158; il Quadrio, T. II, p. 145; e il Galvani, p. 317. Il Raynouard nel Vol. V della Scelta a p. VI, dice che non trovò nei mss. alcuno de' frammenti di questo Pietro citati dal Nostradamo.

40. *Pier Rogier.* Solo nome. Pietro Ruggero era canonico, ma rinunciato il canonicato, prese a girare per le Corti de' principi, recitando e facendo il comico. Finì la sua vita ucciso circa l' anno 1330. Il Petrarca nel ripetuto canto quarto ricorda due *Pietri*, dicendo:

> Eranvi quei che Amor sì leve afferra
> L' un Pietro e l' altro.

L' uno era Pietro Vidal, di cui al num. 27, l' altro è il presente Pietro Ruggeri che il Gesualdo nella sposizione chiama *Pietro Negrieri d'Alvernia.* Vedi Crescimbeni, T. II, p. 133, 134, 135; Quadrio, T. II, p. 138; Raynouard, Lessico T. I, p. 327; Scelta T. III, p. 27, T. IV, p. 3, T. V, p. 330; e Galvani, p. 462, 510, 511.

41. *Peire Raymon gentils Tolosan*, e null' altro ha il Codice. Pietro Raimondo il prode o il valoroso è rammentato dal Crescimbeni (T. II, p. 52, 53), e dal Quadrio (T. II, p. 119). Nativo di Tolosa si trovò alla guerra di Soria contro gl'infedeli, e morì nella guerra tra i Conti di Provenza e di Tolosa circa il 1225. Il Nostradamo lo appella *Peyre Remond le proux*; ma nei Codici Fiorentini e Vaticani si legge sempre *Peire Raimon de Tolosa* senza l'aggiunto *lo proux.* Il Tassoni, nelle Considerazioni al Petrarca, si valse dell'autorità di questo poeta, che (a p. 356) chiama *Pietro Ramondo poderoto.* Il Raynouard, Lessico T. I, p. 334; Scelta T. III, p. 120, T. V, p. 332, lo dice soltanto Pietro Raimondo Tolosano. — Il Galvani, *Pier Raimondo di Tolosa*, a p. 491.

42. *Raymon Vidal.* Il solo nome. Questo Raimondo Vitale non lo veggo nè nel Crescimbeni,

nè nel Quadrio. Ne reca però poesie il Raynouard nella Scelta T. III, p. 398, e ne parla nel Vol. V della stessa, p. 397. Così il Galvani ne ristampa una poesia a p. 394. Il Raynouard lo dice Raimondo Vidal *de Besaudun*, e il Galvani *di Bezoduno* o *Besalduno*.

43. *Nazimar lo Negrier.* C' è il solo nome nel Codice. — Naimaro, oppure Don Adimaro il Negro, detto *Naimars lo Negres*, fu cortese e gentil trovatore, molto amato dalla gente, e in particolare da re Pietro d'Aragona, e dal Conte Raimondo di Provenza. Ma, dicono gl' intelligenti, che non fu molto eccellente nel poetare. (Crescimbeni, T. II, p. 204; Quadrio, T. II, p. 117; Rayn., Scelta T. V, p. 56-57 dicendolo *Azimar lo noir)*. Il Galvani non lo ricorda.

44. *Guilliern Magret.* Solo nome. Guglielmo Magretto detto *Guillems Magret*, fu di Vianes ed esercitò l' arte giullaresca. Compose buone canzoni, e serventesi, e cobole, ec. Morì in uno spedale di Spagna. (Crescimbeni, T. II, p. 193); (Quadrio, T. II, p. 142); (Raynouard, Lessico T. I, p. 510, e Scelta T. III, p. 419, T. V, p. 201.) Non lo ha il Galvani.

45. *Peyre da Pomarol.* Il solo nome. Nol veggo citato da' soliti scrittori Crescimbeni, Quadrio, Raynouard, Galvani. E perciò convien dire o che sia qualche sbaglio nell' indicazione del nome e cognome, oppure che sia confuso con altri trovatori del nome stesso.

46. *Daude da Prodas.* Il solo nome. Deudo dei Prati, detto provenzalmente *Deudo di Pradas*, nativo di un borgo denominato *Pradas* presso la città di Rodes, fu uomo letterato e buon trovatore. Viveva circa il 1223. Vedi il Crescimbeni (T. II, p. 183); il Quadrio, (T. II, p. 118); il Raynouard, (che lo dice *Deudes de Prades*. Lessico T. I, p. 427, 563; Scelta T. III, p. 414, T. V, p. 126); e il Galvani che lo chiama *Dodo di Prada*, p. 355, 468.

47. *Giraut de Calmonyer.* Solo nome. Lo credo quel Giraldo di Calanzone, detto *Giraut de Calanzon*, giullare di Guascogna, bravo letterato, sottil trovatore, di cui varie poesie sono nel Codice Vaticano num. 3204, e di cui il Crescimbeni (T. II, p. 189; il Quadrio (T. II, p. 123); il Raynouard (Scelta T. III, p. 388; che dice *de Calanzon*, e T. V, p. 168), e il Galvani, p. 186, 313, 464; che il chiama ora *Giraldo*, ora *Girardo da Calansone*. Il sopraccitato signor Teza conghietturando crede sia *Giraldo Cabrier*; ma non *nega gli allori all' altro se mai visse poeta*.

Finisce la leggenda il nostro anonimo con sette versi pur provenzali.

E poichè il valentissimo sig. Teza suaccennato, si compiacque, a mia petizione, di ricopiare il presente canto VIII tal quale è nel Cod. Veneziano colle varianti del Trivigiano, e di soggiungere la lezione ch' egli crede di proporre, la sua traduzione, non che parecchie note, così in fine alle presenti aggiungo questo suo lavoro.

(118) Noto alcune varianti del Codice Ambrosiano (secondo il Quadrio) e de' Codici Trivigiano e Veneziano, le quali stanno nel libro primo, canto primo, e nel libro quarto canto settimo.

AMBROSIANO	TRIVIGIANO	VENEZIANO
Phetonte	Phetone	Phetone
surta	fatta	fatta
più mora	dimora	dimora
libello	libello	libro
dironne	di rove	dirone
notabil	nobele	notabil
di che	da che	da che
costì	costui	chostui
Grioni	Zironi	Grioni
Infula	insula	infula

Nella fine del Codice Trivigiano, relativamente a quanto dissi, si leggono di altra mano alcuni versi amorosi di varia misura, che cominciano

Dira che ben chognose el tuo duro chore . . .

e sono compresi in undici pagine, i quali versi finiscono:

Hogni tuo mal manoia ogni ben mi piace
O secho ti dia chon cordia pace.

FINIS AMEN, e l' epoca M.CCC.LV.

Segue la già indicata nota di mano più recente: 1619 20 *zugnio. Hic liber est mei qui Floravantius nomine vocor.* A piedi poi del libro terzo, canto ottavo, terzetto primo, si legge

pur di mano del secolo XVI. *Nestor Azzonius Advocarius* 1627 *maii*, il quale Nestore è probabilmente quello che del 1598 è ricordato dal Burchellati ne'Commentarii a p. 324. — In un'altra nota moderna, posta sui risguardi si legge: *Libro raro comperato da me sottoscritto l' anno* 1836, *apparteneva alla libreria della nobile famiglia degli Azzoni Avogaro in parrocchia S. Andrea scritto nel* 1200 incirca (ignoranza dello scrittore) *riputato del valore di zecchini veneti dodici, dai migliori intendenti di manoscritti antichi. D. Alvise Costantini.* — Scrivevami poi nell' ottobre 1856 il chiariss.° canonico D. Guecello Tempesta di Trevigi, di averlo comperato dagli eredi del Costantini per la Biblioteca Comunale; e che la sola mancanza di tempo gl' impedì di illustrare e di ridurre a miglior lezione questo Codice, bramando di pubblicare colle stampe qualche capitolo.

(119) Noto similmente alcune varianti oltre quelle che vedemmo precedentemente tra i due Codici *Trivigiano* e *Veneziano* e che vedremo nel seguente Canto VIII.

TRIVIGIANO		VENEZIANO
(Lib. 2, canto 30) *contradicion stare*		*contradictori starse.*

E dovrebbe in ambi i Codici dire *esse*, non già *starse* atteso che così portava la corrispondenza della rima *necesse.*

TRIVIGIANO		VENEZIANO
(Lib. 3, canto 1) *nel corpo senziero*	(malamente)	*nel corpo sezzajo.*
(Lib. 3, canto 6) *blando*	(mal.)	*bando.*
(Lib. 3, canto 6) *citherea*	(mal.)	*et cetera.*
(Lib. 4, canto 2) *in terra il stampo*	(bene)	*scampo.*
(Lib. 4, canto 2) *E avo di lor*	(mal.)	*et a l' uno di lor.*
(Lib. 4, canto 3) *ite e dischrito*	(mal.)	*i' te ho descritto.*
(Lib. 4, canto 4) *Soteride*	(mal.)	*Sotade.*
(Lib. 4, canto 6) *Carigeto*	(mal.)	*Arrighetto.*
(Lib. 4, canto 6) *fur le voce abinde degne*	(mal.)	*a laude degne.*
chontine	(mal.)	*concive.*
(Lib. 4, canto 7) *Egingelin*	(mal.)	*Guinicelli.*
» » *a meser Chomo*	(mal.)	*a messer Cino.*
» » *per spirance e bene*	(mal.)	*perspicace e bene.*
» » *per la ritimia*	(mal.)	*per la tirannia.*
» » *che esteso voluntario et exilio*	(mal.)	*Ha istesso eletto voluntario exilio.*
» » *Amo Vocato*	(mal.)	*Mino Vocato.*
» » *Simicio*	(mal.)	*Senuccio.*
» » *Gindino*	(mal.)	*Guielmo.*
» » *Edunaci*	(mal.)	*E di Macci.*
» » *Fabulo*	(mal.)	*Fabio.*
(Lib. 4, canto 9. *De pi uerde*	(mal.)	*di peneide.*

Oltre a queste e moltissime altre scorrezioni varie terzine sono poste fuori di luogo nel Codice Trivigiano, cosicchè a primo aspetto pare mancante, spezialmente nel libro quarto, canti terzo, quarto, ottavo. Il Codice Veneziano è meno scorretto, quindi più facile ad intendersi. Esso però manca de' due ultimi versi della prima pagina, ossia de' due ultimi versi della undecima terzina del libro primo, perchè fu tagliato il lembo della prima carta, che forse avrà avuta una miniatura, e forse anche il nome e lo stemma dell' autore o del possessore. Inoltre manca

del terzo verso della terza terzina del libro primo, canto secondo; a' quali difetti ho supplito colla scorta del Codice Trivigiano. — Tanto questi due Codici, quanto l' Ambrosiano veduto dal Quadrio, non hanno trascritto il canto primo del secondo libro, poichè, come ho detto, il secondo libro comincia col secondo canto *in quo scriptam epistolam Leander nutrici tradit: Poy ch' ebbe iscritta cotesta Leandro*, alludendo appunto alla lettera che ad Ero col mezzo di Manto inviava. Convien dunque dire che, o l' anonimo non iscrivesse mai questa lettera, o se scritta, non l' abbia inserita nel suo poema, ove dovea stare tra il canto decimo del libro primo, e il principio del libro secondo: quindi fu ommessa in tutti e tre i Codici.

(120) Questi furono il Quadrio nel luogo citato; Marco Foscarini (Letteratura Veneziana, 1752, p. 318, n. 275); Giovanni degli Agostini (Scrittori Veneziani, 1752, Vol. I, p. xv, xxviii e 291); Jacopo Morelli (Operette T. I, p. 180); ed eziandio il Tiraboschi (Letter. Ital. Vol. V, p. 629, 777, 778, edizione veneta, 1824); Giambattista Verci (Scrittori Bassanesi, Vol. I, p. 21, 22); e il Mazzuchelli (Vol. II, Parte III, ove nomina *Boccasso Giovanni*), ec. ec.

(121) Fra gli anonomi contiamo almeno tre cronacisti in terza rima. L' uno è contenuto nel Codice Marciano XXVIII della classe IX. L' altro in uno della Magliabechiana, un brano del quale reca Giambatista Tondini a p. XLIX, documento XXXIX delle Memorie concernenti la Vita del cardinale Tommaso da Frignano (Macerata 1782, in 4.°), e il terzo intitolato *Zechin pe Veniexia* impresso per esteso dal conte Nicolò Taccoli in Parma nel 1748 fol., del quale poema ho detto anch' io a p. 90, 91 del Vol. VI delle Inscrizioni Veneziane.

(122) Di *Pietro de' Natali* vescovo di Jesolo e poeta, veggasi Apostolo Zeno nelle Dissertazioni Vossiane (T. II, p. 31, 43), e le Inscrizioni Veneziane, Vol. I, p. 94 e 357.

(123) Del *Piacentini* e del *Recaneto*, parlavano anche il Crescimbeni, il Muratori, l' Agostini, il Morelli, già da me ricordati, ove di questi due poeti a p. 265. Vol. III delle Inscrizioni.

(124) Anche di *Antonio Cocco* poeta ho detto a p. 269, 270 del Vol. V delle Inscrizioni, citando e l' Allacci, e il Crescimbeni, il quale ne reca un sonetto diretto a *Franco Sacchetti* e che comincia:

A me è gran gratia Franco aver udito

(p. 207, T. II).

(125) Il Crescimbeni, a p. 226 del Vol. III dei Commentarii della Volgar Poesia, reca un sonetto di *Filippo Barbarigo* nobile veneziano, che fioriva nell'entrare del secolo XV, e che comincia:

Se mai in purpurea veste il nobil Tosco

(126) L' Agostini a p. xvi della Prefazione al primo Volume degli Scrittori Veneziani cita un Codice cartaceo, ch' era appo i Minori Osservanti di S. Francesco della Vigna, contenente *laudi spirituali*, fralle quali una era di *Jacopo Valaresso* composta nella nascita del Salvatore. Di questo *Jacopo* non parlava nè il Crescimbeni nè il Quadrio. Fioriva alla fine del secolo XIV. Io ho riportato il principio di quella lauda così:

Veniti tutta zente
Aldir cosa novella
Ognhomo dolcemente
Guardi la verzenella
Che ha parturito
Il nostro Salvator.

(Vol. II, p. 147).

(127) Di *Leonardo*, o *Lionardo Giustiniani* scrisse la Vita il padre degli Agostini (T. I, p. 135 e seg.), e ne ho detto anch'io a p. 71, 72, T. II nelle Inscrizioni di S. Andrea della Certosa, e a p. 516 del Vol. V, nelle giunte a quelle Inscrizioni.

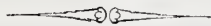
(128) Libro 4, canto settimo, terzetto trentesimosettimo.

(129) L' Agostini (T. I, p. 155) raccolse questi due sonetti da un Codice posseduto allora dal dottore *Gianfrancesco Burchellati* cittadino trivigiano.

(130) Quante sieno le Vite e gli elogi dettati in onore del protopatriarca *S. Lorenzo Giustiniani*, veggasi a p. 50, 51 del mio *Saggio di Bibliografia Veneziana* (Venezia, 1847, in 8.°). A queste aggiungersi ponno quelle uscite in quest' anno 1856 nella occasione del quarto centenario della morte di lui; fralle quali: *Vita di S. Lorenzo Giustiniani primo patriarca di Vene-*

zia, aggiuntavi una notizia delle sue opere. — Venezia, Perini, in 8.° 1855 (anonima, ma che si sa essere dettata dal padre Ferdinando Bettini dell'Oratorio), e le *Notizie di S. Lorenzo Giustiniani raccolte dall' Arciprete canonico Angelo Regazzi.* Venezia, Grimaldo, in 8.° 1856.

AL SIGNOR

CAV. EMMANUELE ANTONIO CICOGNA

Chiar. Sig. Cavaliere

Invitato gentilmente da lei a rivedere in parte i pochi versi provenzali della Leandreide, *volentieri io mi riposi a questi studi già abbandonati da anni: che se non seppi pienamente rispondere al desiderio suo e mio, mi permetta di renderle ragione delle lacune rimaste nel testo ricostituito.*

I due manoscritti sono scorrettissimi; ed ella lo vedrà chiaro dalle varianti del codice Trevisano *(delle quali devo esser grato ad un uomo distinto ed amico carissimo, il dott.* Paolo Marzolo*) che esattamente corrispondono alla copia che se ne conserva nella Marciana. A questi molti errori di penna si aggiungono quelli dell' autore: il quale, usando lingua a lui straniera e non condotta mai ad unità letteraria, ma vagante per mille forme di pronuncie e di scritture diverse, non poteva certo non farsene reo. Così, per citarle pure un esempio, adopera il* con *non usato mai da' provenzali (che lo traducono con* ab*) e che restò solo allo spagnuolo, al portoghese* (com) *ed all' italiano. Che altri errori derivino dal poeta, ci prova spesso la rima; ma non possiamo accusarlo trovando nei suoi versi qualche parola che non è nell' uso degli scrittori provenzali: perchè nei pochi monumenti letterari che ce ne restarono non abbiamo certo tutto il tesoro di quella lingua soavissima.*

Del resto sotto quei rimasugli incomposti di lettere, che non danno parole di alcuna lingua, io avrei potuto cercare qualche idea: ed altri anzi crederà che non vi volessero ali troppo forti al volo: ma io cercai sempre di propormi questo canone di critica interpretatrice, che possiamo bensì correggere le forme, ma non il concetto: nè indo-

vinarlo quando non apparisca chiaro a chi si pone pazientemente ad indagarlo. Perchè le idee degli altri, per quanto povere, sono fatti che dobbiamo rispettare: e se qua e là non appaja che cosa giudicasse di qualche poeta provenzale l' autore della Leandreide, *a nessuno importerà mai sapere che cosa egli possa ispirare a me stesso.*

Ella sa bene, sig. Cavaliere, che questi versi, monumento di una lingua già declinante quando furono scritti, cantati da uno straniero e poi corrotti dai copisti ignoranti non saranno mai di grande importanza per le istorie della lingua o della letteratura di Provenza*: e che sotto quelle lettere misteriose non riposano certo dei gioielli.*

Mi continui il suo affetto e mi creda

Venezia, 22 aprile 1857.

tutto suo
EMILIO TEZA.

CODICE VENEZIANO

1. Arnaut de Mernoil ieu suy clamantz
Quen totes mas chanzon ses jauzinen
Ri chan e plor e sper desesperantz
2. Dir mon voles non aus ne mon calen
Vas Amors e mamie ne pel timors
Non las ges queu non die mon passamen
3. En yoy en gaug en ris tray ma dolors
Der en avan diray de ma compania
Che say qel chier e vol tarme e con chors.
4. Qest er celuy qi se reclam de spaina
De Marseila Folqet qe se ranchura
E pel affan d'amors se plora e laina
5. Qests dos ciaschun dela son forfaitura
Pentut qen contra Amors fos mal parlanz
Reqier perdons humilz e cum drechura
6. Lus guindisel lautres qe merceranz
Promet amor leyals e blau lauzar
Gauzbert de Pomipot honoranz
7. Lomtan amors fes pos qel autre amar
Che fu clamatz per tout Yaufre Rudel
Mas lautre er nom Guillermen Azemar.
8. Seg vien Guilerm de Biarz Arnaut Daniel
Fonsalada che qant roy aragon
Giraudon lo ros e lias cairel
9. Li malz damors totz lauza perdigon
Qel ben li fays meis dous e meys grazir
Cant son servatge doña gazardon.
10. Se podez hom Raenbaut daurenga auzir
Qant qante la cotessa mon rosier
Trobaria mont donzor ben aug er dir.
11. Al siens Bertram Gulierm de saynt desdier
Alla file dels conte Raymon pros
Ditz aman joncas car mercie les qier.
12. Candenot vas Amor tug cossiros
Prova qesent ne Bran non puot defendre
Hom contrefforz damor trop valoros.
13. Nuc de saint sir fapt son canzon entendre
Alla valen contessa de Proenza
Da part sanne chui non sausa deffendre.
14. Aymerich de Bellenuey temanza
A de petit amar qant ama fort
E pauc le sembla sa gran capitanza.
15. Bernart da Ventardorn eus de con nort
Fis amadorz qel dist qe povre e riche
Amors fayt dun paratge senes tort.

CODICE TRIVIGIANO

1. . . . *Merueil* . . . . . sui clamatz
Quem totems . . . . . chancon *Sesiau imem*
. . . . de se sperantz
2. . . . . *voles* . . . . *talem*
Vas amoros emanne . . . .
. . . . quem non . . . .
3. Enion en gang . . . . trai
. . . . dirai . . . . . compagnia
Qe sal qel chier o *vol trame e chon chors*
4. . . . *zelui* . . . . . . rechlam dispania
De Marsilia . . . .
E pel afan da mors sepulura echlania
5. Quests dos easehun nela son frosutura
Pentuet cheu chontra . . . . . . parlamz
. . . . e cho drechura
6. Lus qui desel . . . . che *merceanz*
. . . . . . lials e blan laucar
Gauzbet de pomipot honoranz
7. *Louitam* . . . fez . . . qe lautre
clamantz per totz ianfre chrudel
. . . . er non giuler men acemar
8. . . . guielrin de ba biarz . . . . . .
. . . . chant roi . . . .
. . . . elias chairel
9. . . . . lanca . . . .
. . . fais . . . . gracier
Chant sont servatgie dona gazardonz
10. Se potes . . . . . . rechubant da urenga aucir
. . . . chontesa mon ronsier
. . . . donclor . . . . . .
11. . . . .
Alla file . . . . . . chon raimond
Duz aman ionchas char mergie lesquier.
12. Quande not vas amar tug chosiros
Proa qe sent . . . .
. . . on constres forz . . . .
13. . . . . . *fait* sont chancon intendre
Ala . . . . . chontesa de prouence
. . . .
14. A imerih de belen vei temanca
. . . . *quand* . . . . . .
E pave . . . . chapitanca
15. Bernar da ventador eus da chon hort
. . . amadors . . . . . . pavre
fait duz . . . . sens tort.

LEZIONE PROPOSTA

1. Arnautz de Maruelh ieu sui clamatz
Qu' en totas mas chanzos ses jauzimen
Ri chan e plor e sper desesperatz.

2. Dir mon dol us non aus ne mon talen
Vas Amor e m' amia: ne pel temor
Non lais ges qu' eu non die mon pessamen.

3. En joi en gauz en ris trai ma dolor;
D' or en avan dirai de ma companha
Que sai que 'l quer . . . .

4. Cest es celui qui se reclam de Spanha
De Marsella Fosquetz qui se rancura
E per l' afan d' amor se plora e lanha

5. Cests dos, cascus de la soa forfaitura
Pentutz qu' encontra Amor fos mal parlanz
Requier perdon humils et ab drechura.

6. L'us Gui d' Uissel, l' autre que merceianz
Promet amor leial e blan lauzar
Gauzbertz de Pugcibot es honoranz

7. Loindans Amors fes aquel autre amar
Que fo clamatz per tout Jaufres Rudels
Mas l' autre se nom Guillems en Azemar.

8. Seguen Guillems de Briars, Arnautz Daniels
Fonsalada, qui cant rei d' Aragon,
E Giraudos lo ros, Elias Cairels.

9. Li mals d' amor totz lauza Perdigon
Qu' el ben li fai mais dons e mais grazir
Quant son servatge domna Gazardon

10. Se podes hom Raimbaut d' Aurenga auzir
Quant cante la contesa Mon-Rosier
Trobaria mout doussor ben aug er dir.

11. . . . .
. . . .
. . . .

12. Cadenetz vas amor totz cossiros
Prova qu'escutz ne brans no pot deffendre
Contra forzas d'amor trop valoros.

13. N Ucs de saint Cyr fai sa chanzon entendre
A la valen contessa de Proensa,
Da par sa amia, que non sausa deffendre.

14. Aïmerics de Belenoi temensa
A de petit amar quant ama fort
E pauc li sembla sa gran captenensa.

15. Bernartz de Ventador e us de conort,
Fis amadors, qu el dist que povre e riche
Amors fai d'un paratge senes tort.

TRADUZIONE

1. Arnaldo di Maruelh io sono chiamato che in tutte le mie canzoni senza allegria rido, canto e piango, e disperato spero.

2. Dirvi il mio duolo non oso nè la mia voglia verso amore e l' amica mia: nè lascio, per timore, dal dire il mio pensiero.

3. In gioja in gaudio in riso traggo il mio dolore: d'ora innanzi dirò della mia compagnia chè so che lo cerca . . . .

4. Questi è colui che accusa Spagna, Folchetto Marsigliese che si lamenta e per l' affanno di amore si piange e si lagna.

5. Questi due, ciascuno del suo delitto pentito che contro amor sia stato mal dicente umile domanda perdono e con dirittura.

6. L' uno Guido d' Uissel, l' altro che pregando mercede promette amor leale e lodi blande è l' onorevole Gauzberto di Pugcibot.

7. Lungamente fece Amore che colui amasse il quale ovunque è detto Gioffredo Rudel: ma l' altro si chiama Guglielmo Ademaro.

8. Seguono Guglielmo di Briars, Arnaldo Daniel, Fonsalada che canta il re aragonese e Girardone il rosso, Elia Cairel.

9. Tutti i mali d'amore loda Perdigon: chè egli ben li fa più dolci e più gradire quanto il suo servaggio Donna Guiderdone.

10. Se uom potesse udire Rambaldo d'Orange quando canta la contessa di Mon-Rosier ben, odo or dire, troverebbe assai dolcezza.

11. . . . .
. . . .
. . . .

12. Cadenet tutto pensieroso verso Amore prova che nè scudo nè brando può difendere contro le forze di troppo valoroso Amore.

13. Ugo di s. Siro fa intendere la sua canzone alla valente contessa di Provenza da parte della sua amica, chè non osa difendersi.

14. Aimerico di Belenoi ha timore di un amor piccolo quando fortemente ama e poco gli sembra il suo gran contegno.

15. Bernardo di Ventadorn è a voi di conforto, fini amatori, chè ei disse che Amore fa senza torto di un paraggio e povero e ricco.

CODICE VENEZIANO

16. Gaucelm Faidit chamors chan be
Le reis valenz Richart reys delz engles
Ploranz mielz chanta qe yamais al re.
17. Raenbaut de Vacheras fis et chortes
Sap mautas vez tornar folz e saput
Per zo ch jngen damor mielz li valgues.
18. Pos fost della fondatz Aporcebut
De sa dona Aymeric de pegulan
Doventa son nimis cum fo son eschut.
19. En neus engels Guillerm de Berguedan
Per yoy qer as nafratz douza mezina
Non se plueya in freg in vent gelan.
20. Que fort perongut dalla moroutza spina
Er qe non tug guerir ma vegis miraval
Mas cum faut laur en fuec amssi saffina
21. Guillerm de montagnegol, per vidal
Monge de Montandon pons de Capducol
Richaut de Berbecil ciaschun trop val
22. Nuc els Brunet peroul Giraud borneil
Maria deventadorn Raymon yordan
Nalbertet paubertin de Bonareil.
23. Guillierm dandusa folqet da roman
Pere de Bonifaci pier rogier
Peire raymon gentils tolosan
24. Raymon vidal Nazimar lo negrier
Guillierm magret peyre da pomarol
Daude da prodas Giraut de Calmonyer
25. Mas als le ne son qe dir aras non vol
Ma lenga qe sont chaut gens de bonaire
Non ay auzitz qant be sonar oc suol
26. Ne ges tenoreres lourz donz cantayre
Se apres aves la proensal faveyla
Che deynna te pairia ses autre paire
Delano e de pres cal flors en fucilla.

CODICE TRIVIGIANO

16. L'anzelin fait dit qu amor quambe
. . . valen . . . Richard reis dele angles
Ploraz mechz . . . . ia mais al re
17. Raenbalt . . . vaqeras . . . e chortes
. . . rienz tornar . . . . l. . a saput
. . . que gen . . . . midz . . . . . .
18. . . . . apceput
Di se dona ai maric . . . .
Deventan son nemis chon so san eschut
19. . . . an ^{e}gles (sic) guilem . . . . . .
. . . . . afratz . . . . donca metzina
. . . . ni vent gelanz
20. Oe for perogant . . . . morouca sinc
. . . . . guerier man . . . . . .
Maschon . . . . amsi
21. Gucelm de Montaneqol
. . . . Capducil
. . . Berbeciol cascun trop val
22. Nuc els brunce . . . .
. . . . . . Raimond jordanz
Nal bertet *paubertin de bon arcicl.*
23. Gulierm . . . .
. . . . . rocier . . . .
. . . . raimond gientils toloxan
24. . . . . Nacimar lo negrier
Guielm magret . . . . pamorol
Dande de paradas . . . . Chalmonier
25. . . . . . . che dor aras non vol
. . . . che sont chant ziens
. . . . chanc . . . ce suol.
26. . . . . . tenoreres laurz donz chantare
Se apres . . . . faveila
. . . .
. . . .

LEZIONE PROPOSTA

---

16. Gaucelms Faiditz qu Amor ne chan tan be:
Lo reis valenz Richartz, reis dels engles
Ploran mielhs chanta que ja mais al re.

17. Raimbautz de Vaqueira fis e cortes
Sap mantas vetz tornar fols e saputz
Per ço qu engen d'amor mielhs li valgues.

18. Pos s'est de la foudat apercebutz
De sa domna, Aimerics de Pegulhan
Deventa son nemis cum fo so escutz.

19. . . . .
. . . .
. . . .

20. Que fort ponhutz da l'amorosa espina
. . . .
Mas cum fai l'aurs en fuec aissi s'affina.

21. Guillems Montanhagol, Peire *Vidal*
Monges de Montaudo, Pons de Capduelh,
Richartz de Berbezilh, cascus trop val.

22. N' Ucs Brunetz, Peirols, Guirautz *Bronelh*
Maria de Ventador, Raimons *Jordan*
N Albertetz, Lambertis de Buvarelh

23. Guillems d'Andusa, Folquetz da Roman
Peire de Bonifaci, Peir' Rotgier,
Peire Raimonds, gentils *tolosan*

24. Raimons Vidals e 'N Azimars *lo ner*
Guillems Magretz, Peire de Pomarol
Deudes de Pradas, Guirautz de Cabrier (?)

25. Mas als ne son que dir aras non vol
Ma lengua
Non ai aurit quant be sonar oc suol.

26. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .

TRADUZIONE

---

16. Anselmo Faidit che sì bene ci canta d'amore: il valente re Ricardo, re degli inglesi, canta piangendo meglio che mai altro re.

17. Rambaldo di Vaqueira fino e cortese seppe molte volte mutarsi in folle e in savio onde frode di amore gli valesse meglio.

18. Come s' ebbe accorto della follia di sua donna, Aimerico de Pegulhan diventa suo nemico come le fu scudo.

19. . . . .
. . . .
. . . .

20. Chè punto forte dall'amorose spine
. . . .
ma come fa l'oro così s'affina nel fuoco.

21. Guglielmo Montanhagol, Pietro Vidal, il monaco di Montaudon, Ponzio di Capduelh, Riccardo di Berbezilh, ciascuno val troppo.

22. Ugo Bruneto, Peirol, Giraldo Bornelh, Maria di Ventadorn, Raimondo Jordan, Albertino, Lamberti di Buvarelh.

23. Guglielmo d'Andusa, Folchetto da Roman, Pietro di Bonifacio, Pietro Rotgier, Pietro Raimondo gentile di Tolosa.

24. Raimondo Vidal, Ademaro il nero, Guglielmo Magretto, Pietro di Pomarol, Deude de Pradas, Giraldo Cabrière.

25. Ma ne son altri che ora la mia lingua non vuol dire dopo dire . . . . non ha udito quanto ben suole sonare il si (oc).

26. . . . .
. . . .
. . . .
. . . .

NOTE

——o——

Cercai riporre nel testo una ortografia regolare; qui molte sono le forme scorrette ma alcune avrebbero potuto restare difese dall' autorità di molti codici. — Speriamo che presto un sistema più sicuro ci permetterà di ricondurre ad unità le mille lezioni varie dei manoscritti. La ortografia seguita qui è quella che ha più esempi nella letteratura di Provenza. Pei suoni nostri *gl gn* accettai unica la ortografia portoghese *lh nh.*

Di *Pietro di Pomarol* e di *Giraldo Calmonyer* cercai invano notizia nelle biografie provenzali o nel Fauriel *(Hist. de la litt. prov.)*, nel Diez *(Leben der Troubad)* e nella *Hist. lett. de France;* all' ultimo sostituii congetturando, *Giraldo Cabriere:* ma non nego gli allori all' altro se mai visse poeta.

Parecchi mancano: e per alcuni troviamo scusa nelle vite che ce ne serbarono i nazionali: così dice di Marcabruno (uno dei famosi) il biografo che fu *doptatz per sa lengua*, temuto per la lingua, e che *dis mal de las femnas e d' amor*, disse male delle donne e d' amore. Onde chiaro è che il poeta non l' *abbia accolto nell' amoroso stuolo.*

---

15. Vedi il detto di Bernardo nel Raynouard. Lex. I. p. 331

Paubres e richs fai Amors *d' aut* paratge:

Ma nel dizionario alla voce cita: *d' un paratge:* e un bel ms. marciano: *de paratge.*

Questa sentenza troviamo frequente nei poeti di quel paese: e la opinione dei molti la confermava. Adesso rimase nei canzonieri. Così il biografo provenzale parlando di Miraval dice che la *Loba* ch' era stata sua amante si prese poscia del conte di Fois « onde ella cadde di pregio, di onore, di amici: chè là teneano per morta ogni donna che cercasse amore in un alto cavaliero. » Rayn. *Choix*, p. 384. Vol. V.

16. Abbiamo questa voce *re* (per *rei)*, ma solo come oggetto:

Fonsalada bon drogomanz	(Fonsalada siate buono interprete
Siatz vas mon senhor *lo re.*	verso il mio signore il re).

Ma al nostro italiano bisogna perdonare assai cose.

20. Vedi egual pensiero in P. Vidal:

Qu en lieis s' afina beutatz	Chè in lei beltà s' affina
Cum l' aurs en l' arden carbo.	Come oro in carbone ardente.

22. Suppongo che invece di *paubertin*, che leggono i codici, si intenda
Lamberti de Buvarel o Bonanel di cui Raynouard ci dà pochi frammenti. *Choix*, V, p. 243 e *Hist. litt. de France*, XX, pag. 586.

23. Non si prenda *gentil* in senso di nobile: che pur ha talvolta anche nel provenzale. Infatti un biografo provenzale dice che fu figlio di un borghese. Fu contemporaneo di Guglielmo Saint Leidier.

Stava per proporre una lezione anche degli ultimi versi corrottissimi: e vi aveva chiesto il consiglio di uno dei tedeschi più dotti in questo campo di ricerche. Mi rispose toccando delle difficoltà di ristabilire la vera lezione nei codici provenzali: e come sia ottimo partito tenersi alla copia esatta. Onde mi parve inutile orgoglio cercare rimedi ove uomini di somma dottrina non sanno trovarli.

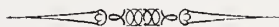
(Il Ragionamento fu letto ai 16 febbrajo 1857).

SOPRA DUE NUOVE FORMULE

ONDE INTEGRARE

LE FUNZIONI DI QUALUNQUE ORDINE A PIÙ VARIABILI INDIPENDENTI

MEMORIA

DEL M. E. PROF. S. R. MINICH

Qualora una funzione differenziale di qualsiasi ordine a più variabili indipendenti ammetta una primitiva, senza supporre veruna relazione fra le variabili ch' essa contiene, hannovi parecchi mezzi onde assegnarne l' integrale totale, potendosi infatti replicare l' integrazione della formula quante volte è d' uopo onde conseguirne la primitiva, oppure svolgere l' integrale richiesto in integrali semplici, od anco esprimere ciascuna variabile primitiva in funzione d' una di esse con un conveniente numero di costanti arbitrarie da eliminarsi dopo l' integrazione relativa all' unica variabile rimanente. Di tutti i varj metodi finora proposti il più proficuo e notabile consiste nella formula esibita a quest' uopo dal celebre Poisson nella Memoria sul calcolo delle variazioni (*Mémoires de l' Institut de France*, T. XII), e dimostrata anco dal preclaro Analista sig. Bertrand nell' egregio suo scritto sull' integrabilità delle funzioni differenziali (*Journal de l' École polytechnique*, C. XXVIII). Vero è che la formula del Poisson soggiace ad eccezione ne' casi in cui pel valore nullo dell' origine degl' integrali definiti in essa compresi la funzione sotto al segno d' integrazione divenga infinita o discontinua. Ma a questi casi di deficienza provvede in parte l' espressione più generale data alla formula suddetta dall' illustre sig. J. Binet, nella quale si possiede l' ultimo e il più compiuto risultamento a cui sia giunta l' analisi intorno a questo soggetto (Moigno — *Leçons de calcul diff. et intègral*, T. II).

Applicando la formula del Poisson o quella del Binet all' integrazione delle funzioni differenziali di primo ordine a più variabili si scorge, che l' uso delle medesime non sarebbe forse preferibile al metodo presentemente adottato dagli Analisti onde assegnare l' integrale di dette funzioni, mercè un aggregato di integrali parziali, che offre il vantaggio della maggiore speditezza, e permette di proseguire le integrazioni relative alle diverse variabili finchè si trovino adempiute le rispettive condizioni d' integrabilità. Si può quindi argomentare, che un metodo d' integrazione delle funzioni di qualunque ordine a più variabili analogo a quello oggidì adottato per le funzioni di primo ordine sarebbe il più utile in paragone degli altri finora proposti: ed a questo scopo mira la presente Memoria, in cui si deducono due diverse formule d' integrazione, nell' una delle quali le integrazioni parziali relative a ciascuna variabile ed alle sue differenziali si succedono nell' ordine ascendente di queste quantità, e nell' altra sono invece schierate in ordine discendente. Però la seconda di dette formule torna più utile della prima per facilità di applicazione, e nel caso in cui la funzione ad integrarsi sia del primo ordine coincidono entrambe colla nota espressione dell' integrale d' una funzione di primo ordine per mezzo di integrali parziali relativi alle singole variabili. Mediante l' una o l' altra, si può svolgere l' integrazione della data funzione d' un ordine qualunque finchè risultino avverate le condizioni d' integrabilità spettanti a ciascuna variabile, ed ove avvenga di eseguire con facilità le parziali integrazioni in termini finiti, si può ben anco prescindere dalla verificazione di simili condizioni, poichè allora basta esaminare se sottraendo dalla data funzione i risultati delle integrazioni, che si riferiscono ad una variabile primitiva ed alle sue differenziali, spariscano dal residuo tutte queste grandezze. Nel dedurre le predette due formule d' integrazione si ricavano egualmente le condizioni d' integrabilità sotto una forma che si riduce alla consueta, e ad altro più comodo aspetto, e si riconosce che esse sono necessarie e sufficienti onde la data funzione sia differenziale esatta. Inoltre si rileva il più facile modo di soddisfarle, imperocchè, avveratesi le condizioni relative ad una primitiva variabile y, si può nelle condizioni spettanti ad un' altra variabile u porre in luogo di y una funzione qualsiasi della indipendente x, ed anco di tutte le residue variabili primitive, e verificatesi pur queste, sostituire nelle condizioni che si riferiscono ad una terza variabile z invece di y, u due funzioni qualunque di x, ed anco delle rimanenti variabili, e così di seguito. Le funzioni da sostituirsi ponno ridursi a quantità costanti, oppure a zero, e in

quest' ultima supposizione si raccoglie un notabile Teorema già osservato dal Poisson nella Memoria dianzi citata.

Nelle presenti ricerche si supporrà costante l' elemento d' una variabile indipendente x senza nuocere alla generalità della questione, giacchè se dopo aver supposto dx costante si passi a riguardare questo elemento come variabile, fatte le sostituzioni richieste dal cangiamento della variabile indipendente, si dee trovare che il risultato ricade nella funzione proposta; altrimenti questa, anzichè ammettere una primitiva, non avrebbe una precisa e determinata significazione, se non qualora si stabiliscano particolari relazioni fra le variabili in essa comprese. Del resto il metodo d' integrazione offerto nella presente Memoria può del pari applicarsi alla supposizione che nessuna differenziale siasi ritenuta costante, bastando allora immaginare che le diverse variabili primitive sieno funzioni indeterminate d' una nuova indipendente ausiliaria, di cui non si contiene che l' elemento nella data funzione differenziale, e quindi non rimane alcun vestigio nel risultato della integrazione totale.

CAPO I.

Esposizione della prima formula di integrazione.

Poste per brevità

$$(1) \qquad \frac{d^i y}{dx^i} = y_i \qquad \frac{d^i u}{dx^i} = u_i \qquad \frac{d^i z}{dx^i} = z_i \quad \text{etc.},$$

una funzione qualunque V di $x, y_1, y_2 \ldots y_p$, di $u, u_1, u_2 \ldots u_q$, di $z, z_1, z_2, \ldots z_r$ etc. ha per differenziale d'ordine n nell' ipotesi del dx costante una espressione della forma $V_n\, dx^n$, essendo V_n funzione finita di $x, y, y_1, \ldots y_{p+n}$ di $u, u_1, \ldots u_{q+n}$ di $z, z_1, \ldots z_{r+n}$ etc.

Ora se sia data una funzione differenziale della forma $V_n dx^n$ in cui le primitive x, y, u, z etc. sono fra loro indipendenti, e dx siasi ritenuto costante, si può col seguente metodo indagare le condizioni per cui essa è da riguardarsi come differenziale esatta d' ordine n d' una funzione V e simultaneamente assegnare questa funzione primitiva cioè l' integrale dell' ordine n.

Essendo per supposizione

$$\int^n V_n dx^n = V$$

ossia

$$(2) \qquad V_n = \frac{d^n V}{dx^n},$$

si assuma la serie delle eguaglianze

$$(3) \qquad V = \int_{\varphi} \left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \alpha_1,$$

$$\alpha_1 = \int_{\varphi'} \left(\frac{d\alpha_1}{dy_1}\right) dy_1 + \alpha_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_p = \int_{\varphi^{(p)}} \left(\frac{d\alpha_p}{dy_p}\right) dy_p + \alpha_{p+1},$$

in cui l' origine φ è una funzione qualsivoglia della sola x, che ne' casi ordinarii può ridursi ad una costante indeterminata a ed anco a zero, e in ogni caso può assumersi di forma intera e razionale e di grado non superiore a p, cioè della forma generale

$$(4) \qquad \varphi = \sum a_m x^m$$

con coefficienti da determinarsi ed anco da annullarsi secondo i varii casi speciali, cosicchè qualora φ non possa ridursi ad una costante a si potrà, ad eccezione di qualche caso particolare, ridurre ad un solo termine $a_m x^m$.

Le origini rispettive degli altri integrali (3) sono le derivate successive φ', φ'', ... $\varphi^{(p)}$ di φ, attesochè i valori di $y_1, y_2, \ldots y_p$ corrispondenti ad $y = \varphi$ sono (1)

$$y_1 = \frac{d\varphi}{dx}, \; y_2 = \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \ldots \; y_p = \frac{d^p\varphi}{dx^p}.$$

Onde ammettere le equazioni (3) è necessario e sufficiente che α_1 sia una funzione non contenente y, che α_2 non contenga y nè y_1 etc., e in generale che α_{p+1} non comprenda $y, y_1, y_2 \ldots y_p$. Imperocchè la derivazione parziale delle (3) rapporto alle rispettive $y, y_1, y_2 \ldots y_p$ offre

$$\left(\frac{d\alpha_1}{dy}\right) = 0, \; \left(\frac{d\alpha_2}{dy_1}\right) = 0, \ldots \; \left(\frac{d\alpha_{p+1}}{dy_p}\right) = 0.$$

E poi evidente che α_{p+1} non può nemmeno comprendere $y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots y_{p+n}$,

che si contengono bensì in V_n, ma non debbono esser comprese nella primitiva funzione V.

Sommando insieme le uguaglianze (3) e ponendo, per i non superiore a p,

$$(5) \qquad \int_{\varphi}\left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \int_{\varphi'}\left(\frac{d\alpha_1}{dy_1}\right) dy_1 + \ldots + \int_{\varphi^{(i)}}\left(\frac{d\alpha_i}{dy_i}\right) dy_i = P_i,$$

$$\int_{\varphi}\left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \int_{\varphi'}\left(\frac{d\alpha_1}{dy_1}\right) dy + \ldots + \int_{\varphi}\left(\frac{d\alpha_p}{dy_p}\right) dy_p = P_p,$$

si avrà

$$(6) \qquad V = P_p + \alpha_{p+1},$$

e quindi differenziando n volte e dividendo per dx^n

$$(7) \qquad \frac{d^n\alpha_{p+1}}{dx^n} = V_n - \frac{d^nP_p}{dx^n}.$$

Ma essendo P una funzione di $x, y, y_1, \ldots y_p, u, u_1$, etc. si ha (1)

$$\frac{dP}{dx} = \left(\frac{dP}{dx}\right) + \left(\frac{dP}{dy}\right) y_1 + \left(\frac{dP}{dy}\right) y_2 + \ldots + \left(\frac{dP}{dy_p}\right) y_{p+1}$$

$$+ \left(\frac{dP}{dx}\right) u_1, + \left(\frac{dP}{dx_1}\right) u_2 + \text{etc.},$$

e quindi derivando rapporto ad y_i e accennando col segno D_{y_i} la derivazione rapporto ad y_i si trova

$$D_{y_i}\frac{dP}{dx} = \left(\frac{dP}{dy_{i-1}}\right) + \frac{1}{dx}d\left(\frac{dP}{dy_i}\right),$$

e ponendo di mano in mano $\frac{dP}{dx}$ invece di P si deduce

$$D_{y_i}\frac{d^2P}{dx^2} = \left(\frac{dP}{dy_{i-2}}\right) + \frac{2}{dx}d\left(\frac{dP}{dy_{i-1}}\right) + \frac{1}{dx_2}d^2\left(\frac{dP}{dy_i}\right),$$

$$D_{y_i}\frac{d^3P}{dx^3} = \left(\frac{dP}{dy_{i-3}}\right) + \frac{3}{dx}d\left(\frac{dP}{dy_{i-2}}\right) + \frac{3}{dx^2}d^2\left(\frac{dP}{dy_{i-1}}\right) + \left(\frac{dP}{dy_i}\right),$$

ed infine

$$(8) \qquad D_{y_i}\frac{d^nP}{dx^n} = \left(\frac{dP}{dy_{i-n}}\right) + \frac{n}{dx}d\left(\frac{dP}{dy_{i-n+1}}\right) + \frac{n(n-1)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dP}{dy_{i-n+2}}\right) + \text{etc.}$$

$$\ldots\ldots + \frac{1}{dx^n}d^n\left(\frac{dP}{dy_i}\right),$$

coll' avvertenza di scrivere y in luogo di y_0, e di cancellare i termini colle derivate di P rapporto alle quantità y_{-1}, y_{-2}, etc. y_{p+1}, y_{p+2} etc. non contenute in P, vale a dire ogniqualvolta l' indice della y per cui si deriva la P sia negativo o superiore a p.

Pertanto applicando alla funzione α_{p+1} la formula (8) testè dimostrata in generale per una funzione P si scorge (ciò che sarebbe d' altronde abbastanza evidente) che se le derivate parziali dell' una delle due quantità $\frac{d^n \alpha_{p+1}}{dx^n}$ ed α_{p+1} rapporto ad $y, y_1, y_2 \ldots y_{p+n}$ sono nulle, debbono del pari annullarsi le derivate parziali corrispondenti dell' altra, di maniera che le condizioni necessarie e sufficienti onde la proposta funzione differenziale $V_n dx^n$ abbia un integrale n^{esimo} V esprimibile (6) per α_{p+1}, le quali consistevano nell'annullamento delle derivate parziali di α_{p+1} rapporto ad $y, y_1, y_2 \ldots y_{p+n}$, si desumono del pari dall'annullarsi delle analoghe derivate parziali dell'espressione (7).

Ora sottraendo l' una dall' altra le (5) abbiamo

$$P_p = P_i + \int_{\varphi}^{(i+1)} \left(\frac{dy_{i+1}}{d\alpha_{i+1}}\right) dy_{i+1} + \ldots + \int_{\varphi}^{(p)} \left(\frac{d\alpha_p}{dy_p}\right) dy_p,$$

e in conseguenza

$$\left(\frac{dP}{dy_i}\right) = \left(\frac{dP_i}{dy_i}\right), \tag{9}$$

e in particolare

$$\left(\frac{dP_p}{dy}\right) = \left(\frac{dP_o}{dy}\right) = \left(\frac{dV}{dy}\right); \tag{10}$$

cosicchè dalla (8) risulta

$$D_{yi} \frac{d^n P_p}{dx^n} = \left(\frac{dP_{i-n}}{dy_{i-n}}\right) + \frac{n}{dx} d \left(\frac{dP_{i-n+1}}{dy_{i-n+1}}\right) + \frac{n(n-1)}{2\,dx^2} d^2 \left(\frac{dP_{i-n+2}}{dy_{i-n+2}}\right) + \\ \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{dx^n} d^n \left(\frac{dP_i}{dy_i}\right), \tag{11}$$

colla sopraddetta avvertenza di sopprimere i termini in cui le derivate si riferiscono ad y_m, e che quindi contengono le quantità P_m, semprechè m sia negativo o maggiore di p.

Pertanto l' annullamento delle derivate parziali rapporto ad $y_{p+n}, y_{p+n-1}, \ldots y_1, y$ dell' espressione (7) esibisce queste $p+n+1$ equazioni

$$(12)\qquad \left(\frac{dP_p}{dy_p}\right)=\left(\frac{dV_n}{dy_{p+n}}\right),$$

$$\left(\frac{dP_{p-1}}{dy_{p-1}}\right)+\frac{n}{dx}d\left(\frac{dP_p}{dy_p}\right)=\left(\frac{dV_n}{dy_{p+n-1}}\right),$$

$$\left(\frac{dP_{p-2}}{dy_{p-2}}\right)+\frac{n}{dx}d\left(\frac{dP_{p-1}}{dy_{p-1}}\right)+\frac{n(n-1)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dP_p}{dy_p}\right)=\left(\frac{dV_n}{dy_{p+n-2}}\right),$$

. . . .

$$\left(\frac{dP_{p-i}}{dy_{p-i}}\right)+\frac{n}{dx}d\left(\frac{dP_{p-i+1}}{dy_{p-i+1}}\right)+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-i+2)}{2.3\ldots(i-1)dx^{i-1}}d^{i-1}\left(\frac{dP_{p-1}}{dy_{p-1}}\right)$$
$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{2.3\ldots i\,dx^i}d^i\left(\frac{dP_p}{dy_p}\right)=\left(\frac{dV_n}{dy_{n+p-i}}\right),$$

. . . .

$$\left(\frac{dP_o}{dy}\right)+\frac{n}{dx}d\left(\frac{dP_1}{dy_1}\right)+\frac{n(n-1)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dP_2}{dy_2}\right)+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{2,3\ldots p dx^p}d^p\left(\frac{dP_p}{dy_p}\right)$$
$$=\left(\frac{dV_n}{dy_n}\right),$$

$$\frac{n}{dx}d\left(\frac{dP_o}{dy}\right)+\frac{n(n-1)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dP_1}{dy_1}\right)+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{2.3\ldots(p+1)dx^{p+1}}d^{p+1}\left(\frac{dP_p}{dy_p}\right)=\left(\frac{dV_n}{dy_{n-1}}\right),$$

. . . .

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{2.3\ldots m dx^m}d^m\left(\frac{dP_o}{dy}\right)+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-p-m+1)}{2.3\ldots(p+m)dx^{p+m}}d^{p+m}\left(\frac{dP_p}{dy_p}\right)$$
$$=\left(\frac{dV_n}{dy_{n-m}}\right),$$

. . . .

$$\frac{n}{dx^{n-1}}d^{n-i}\left(\frac{dP_o}{dy}\right)+\frac{1}{dx^n}d^n\left(\frac{dP_1}{dy_1}\right)=\left(\frac{dV_n}{dy_1}\right),$$

$$\frac{1}{dx^n}d^n\left(\frac{dP_o}{dy}\right)=\left(\frac{dV_n}{dy}\right),$$

delle quali le prime $p+1$ servono a determinare i valori di

$$\left(\frac{dP_p}{dy_p}\right),\ \left(\frac{dP_{p-1}}{dy_{p-1}}\right),\ \ldots\ \left(\frac{dP_o}{dy}\right),$$

e quindi, come verrà fra poco accennato, quelli di

$$\left(\frac{d\alpha_p}{dy_p}\right),\ \left(\frac{d\alpha_{p-1}}{dy_{p-1}}\right),\ \ldots\ \left(\frac{d\alpha_1}{dy_1}\right),\ \left(\frac{dV}{dy}\right).$$

Le rimanenti n equazioni dopo la sostituzione de' valori delle predette quantità determinate dalle equazioni precedenti divengono poi altrettante equazioni di condizione, onde l'integrale n^{esimo} di $V_n dx^n$ sia riducibile, mediante la (6), alla funzione α_{p+i}.

Per ricavare i valori richiesti di $\left(\frac{dP_p}{dy_p}\right)$, $\left(\frac{dP_{p-1}}{dy_{p-1}}\right)$ etc., cioè in generale di $\left(\frac{dP_{p-i}}{dy_{p-i}}\right)$, e per dedurre le n equazioni di condizione che risultano dall' eliminazione delle quantità suddette, basta ricorrere alla seguente equazione identica (Cauchy — *Cours d' Analyse algèbrique).*

$$(13)\quad \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}+\frac{n(n-1)\ldots(n-i+2)}{1.2.3\ldots(i-1)}m+\frac{n(n-1)\ldots(n-1+3)}{1.2.3\ldots(i-2)}\frac{m(m-1)}{2}$$
$$+\ldots+n\frac{m(m-1)\ldots(m-i+2)}{1.2.3\ldots(i-1)}+\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots i}$$
$$=\frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+n-i+1)}{1.2.3\ldots i},$$

la quale si deduce dalla elementare teorica delle combinazioni osservando che, supposti due gruppi di n e di m oggetti, e formate tutte le possibili combinazioni di oggetti ad i col prenderne i dal primo gruppo, indi $i-1$ dal primo ed uno dal secondo gruppo, poscia $i-2$ dal primo e 2 dal secondo etc., ed infine tutti gli i oggetti dal secondo gruppo, si ottengono tutte le possibili combinazioni ad i del numero totale $m+n$ degli oggetti. Ora l'eguaglianza (13) è una identità per qualsivoglia valore anco negativo di m o di n, imperocchè ha luogo per un numero di valori di m o di n comunque superiore al suo grado i. Di più il numero i può essere qualunque purchè intero e positivo. [Conseguentemente ponendovi $m=-n$ se ne ritrae

$$(14)\quad \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1.2.3\ldots i}-\frac{n(n-1)\ldots(n-i+2)}{1.2.3\ldots(i-1)}n+\frac{n(n-1)\ldots(n-i+3)}{1.2.3\ldots(i-2)}\frac{n(n+1)}{2}$$
$$\ldots+(-1)^{i-2}\frac{n(n-1)}{2}\frac{n(n+1)\ldots(n+i-3)}{1.2.3\ldots(i-2)}$$
$$+(-1)^{i-1}n\frac{n(n+1)\ldots(n+i-2)}{1.2.3\ldots(i-1)}+(-1)^i\frac{n(n+1)\ldots(n+i-1)}{1.2.3\ldots i}=0,$$

e se si differenziino le equazioni 1^a, 2^a, ... i^{esima} del sistema (12) un numero i, $i-1$, $i-2$ ... 1 di volte, e si moltiplichino pe' rispettivi fattori

$$(-1)^i \frac{n(n+1)\ldots(n+i-1)}{1.2.3\ldots i dx^i}, \ (-1)^{i-1} \frac{n(n+1)\ldots(n+1-2)}{1.2.3\ldots(i-1)dx^{i-1}}, \ldots \frac{n(n+1)}{2dx^2}, -\frac{n}{dx},$$

indi si sommino insieme coll' equazione $(i+1)^{esima}$, si trova, a cagione dell' identità (14) in cui ad i può sostituirsi ogni numero intero inferiore,

$$\left(\frac{dP_{p-i}}{dy_{p-i}}\right) = \left(\frac{dV_n}{dy_{n+p-i}}\right) - \frac{n}{dx} d\left(\frac{dV_n}{dy_{n+p-i+1}}\right) + \frac{n(n+1)}{2dx^2} d^2\left(\frac{dV_n}{dy_{n+p-i+2}}\right) - \text{etc.}$$

$$\ldots\ldots + (-1)^i \frac{n(n+1)\ldots(n+i-1)}{2.3\ldots i dx^i} d^i \left(\frac{dV_n}{dy_{n+p}}\right),$$

ossia, mutato i in $p-i$,

$$(15) \quad \left(\frac{dP_i}{dy_i}\right) = \left(\frac{dV_n}{dy_{n+i}}\right) - \frac{n}{dx} d\left(\frac{dV_n}{dy_{n+i+1}}\right) + \frac{n(n+1)}{2dx^2} d^2\left(\frac{dV_n}{dy_{n+i+2}}\right) + \ldots$$

$$\ldots\ldots + (-1)^{p-i} \frac{n(n+1)\ldots(n+p-i-1)}{2.3\ldots(p-i)dx^{p-i}} d^{p-i} \left(\frac{dV_n}{dy_{n+p}}\right).$$

Da questa formula si avrebbero i valori di $\left(\frac{dP_o}{dy}\right)$, $\left(\frac{dP_1}{dy_1}\right)$, ... $\left(\frac{dP_p}{dy_p}\right)$ attribuendo ad i i valori di cui è suscettibile $0, 1, 2 \ldots p$.

Così pure prendendo le rispettive differenziali d' ordine $p+m$, $p+m-1$ etc. $2, 1$ delle $p+m$ equazioni successive (12) rispettivamente moltiplicate per

$$(-1)^{p+m} \frac{n(n+1)\ldots(n+p+m-1)}{2.3\ldots(p+m)dx^{p+m}}, \ (-1)^{p+m-1} \frac{n(n+1)\ldots(n+p+m-2)}{2.3\ldots(p+m-1)dx^{p+m-1}}, \ldots -\frac{n}{dx},$$

e sommandole coll' equazione $(p+m+1)^{esima}$, siccome la (14) ha luogo anco se invece di i si pongano i numeri $i+1$, $i+2 \ldots p+m$ si ha l' equazione

(16)

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{dV_n}{dy_{n-m}}\right) - \frac{n}{dx} d\left(\frac{dV_n}{dy_{n-m+1}}\right) + \frac{n(n+1)}{2dx^2} d^2\left(\frac{dV_n}{dy_{n-m+2}}\right) - \ldots \\ \ldots + (-1)^{p+m} \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p+m-1)}{2.3\ldots(p+m)dx^{p+m}} d^{p+m} \left(\frac{dV_n}{dy_{n+p}}\right) \end{array}\right\} = 0$$

nella quale conviene attribuire ad m tutti i valori $1, 2, 3 \ldots n$ già assunti nel sistema (12), e quindi si raccolgono le seguenti n condizioni d' integrabilità della proposta funzione $V_n dx^n$ relative alla primitiva variabile y

$$(17)\quad \left.\begin{aligned}&\left(\frac{dV_n}{dy_{n-1}}\right)-\frac{n}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy_n}\right)+\frac{n(n+1)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dV_n}{dy_{n+1}}\right)-\dots\\&\dots+(-1)^{p+1}\frac{n(n+1)\dots(n+p)}{2.3\dots(p+1)dx^{p+1}}d^{p+1}\left(\frac{dV_n}{dy_{n+p}}\right)\end{aligned}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{dV_n}{dy_{n-2}}\right)-\frac{n}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy_{n-1}}\right)+\frac{n(n+1)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dV_n}{dy_n}\right)-\dots\\&\dots+(-1)^{p+2}\frac{n(n+1)\dots(n+p+1)}{2.3\dots(p+2)dx^{p+2}}d^{p+2}\left(\frac{dV_n}{dy_{n+p}}\right)\end{aligned}\right\}=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{dV_n}{dy}\right)-\frac{n}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy^1}\right)+\frac{n(n+1)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dV_n}{dy^2}\right)-\dots\\&\dots+(-1)^{p+n}\frac{n(n+1)\dots(2n+p-1)}{2.3\dots(p+n)dx^{p+n}}d^{p+n}\left(\frac{dV_n}{dy_{n+p}}\right)\end{aligned}\right\}=0.$$

I coefficienti di queste equazioni, fuorchè nella prima, differiscono da quelli delle solite forme sotto le quali vengono esposte le condizioni d' una differenziale esatta d' ordine n. Ma nondimeno è facile accertarsi che il sistema delle (17) equivale a quello delle ordinarie equazioni di condizione. Conciossiachè col porre nella identità (13) invece di n, m, i rispettivamente $-n$, $m-1$, $p+m$ risulta l' eguaglianza

$$(-1)^{p+m}\frac{n(n+1)\dots(n+p+m-1)}{2.3\dots(p+m)}+(-1)^{p+m-1}\frac{n(n+1)\dots(n+p+m-2)}{2.3\dots(p+m-1)}(m-1)$$

$$+(-1)^{p+m-2}\frac{n(n+1)\dots(n+p+m-3)}{2.3\dots(p+m-2)}\frac{(m-1)(m-2)}{2}+\dots\dots\dots$$

$$\dots+(-1)^{p+2}\frac{n(n+1)\dots(n+p+1)}{2.3\dots(p+2)}(m-1)+(-1)^{p+1}\frac{n(n+1)\dots(n+p)}{2.3\dots(p+1)}$$

$$=(-1)^{p+m}\frac{(n-m+1)(n-m+2)\dots(n+p)}{2.3\dots(p+m)},$$

in cui p può ricevere ogni valore intero che renda $p+m$ positivo, e quindi i valori $p-1, p-2, \dots 0, -1, \dots -(m-1)$. In conseguenza moltipli-

cando rispettivamente le equazioni $1^a, 2^a, \ldots (m-1)^{esima}$ del sistema (17) differenziate $m-1, m-2, \ldots 2, 1$ volte per

$$\frac{1}{dx^{m-1}}, \quad \frac{m-1}{dx^{m-2}}, \quad \frac{(m-1)(m-2)}{2dx^{m-3}}, \ldots \quad \frac{m-1}{dx}$$

e sommandole colla m^{esima} cioè colla (16) si rinviene l'equazione

$$(18)\quad \left.\begin{array}{l} \left(\frac{dV_n}{dy_{n-m}}\right) - \frac{n-m+1}{dx} d\left(\frac{dV_n}{dy_{n-m+1}}\right) + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2dx^2} d^2\left(\frac{dV_n}{dy_{n-m+2}}\right) \\ \ldots\ldots + (-1)^{p+m} \frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n+p)}{2.3\ldots(p+m)dx^{p+m}} d^{p+m}\left(\frac{dV_n}{dy_{n+p}}\right), \end{array}\right\} = 0$$

la quale tiene le veci della (16), e da cui si deducono le consuete condizioni di integrabilità attribuendo ad m i valori di cui è suscettibile, cioè $1, 2, 3, \ldots n$.

Giova ricordare che il sistema delle condizioni (17) può ridursi ad un altro più semplice costituito da altrettante equazioni ciascuna delle quali contiene $p+2$ termini soltanto ed un numero $p+1$ di differenziazioni. L'equazione generale di questo nuovo sistema sarebbe

$$(19)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{(p+2)(p+3)\ldots(p+m)}{1.2.3\ldots(m-1)}\left(\frac{dV_n}{dy_{n-m}}\right) - \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+m-1)}{1.2.3\ldots(m-1)} \cdot \frac{n-m+1}{dx} d\left(\frac{dV_n}{dy_{n-m+1}}\right) \\ + \frac{p(p+1)\ldots(p+m-2)}{1.2.3\ldots(m-1)} \cdot \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2dx^2} d^2\left(\frac{dV_n}{dy_{n-m+2}}\right) - \ldots\ldots \\ + (-1)^{i-n+m} \frac{(p+n-m-i+2)\ldots(p+n-i)}{1.2.3\ldots(m-1)} \cdot \frac{(n-m+1)\ldots(i-1)i}{2.3\ldots(i-n+m)dx^{i-n+m}} d^{i-n+m}\left(\frac{dV_n}{dy_i}\right) \\ \ldots\ldots + (-1)^{p+1} \frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-m+p+1)}{2.3\ldots(p+1)dx^{p+1}} d^{p+1}\left(\frac{dV_n}{dy_{n-m+p+1}}\right) \end{array}\right\} = 0,$$

e quindi attribuendo ad m i suoi valori $1, 2, 3, \ldots n$ si deducono queste nuove equazioni di condizione

$$(20)\quad \left.\begin{array}{l} \left(\frac{dV_n}{dy_{n-1}}\right) - \frac{n}{dx} d\left(\frac{dV_n}{dy_n}\right) + \frac{n(n+1)}{2dx^2} d^2\left(\frac{dV_n}{dy_{n+1}}\right) - \ldots\ldots \\ + (-1)^{i-n+1} \frac{n(n+1)\ldots i}{2.3\ldots(i-n+1)dx^{i-n+1}} d^{i-n+1}\left(\frac{dV_n}{dy_i}\right) + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + (-1)^{p+1} \frac{n(n+1)\ldots(n+p)}{2.3\ldots(p+1)dx^{p+1}} d^{p+1}\left(\frac{dV_n}{dy_{n+p}}\right) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l}(p+2)\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{n-2}}\right)-(p+1)\;\frac{n-1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{n-1}}\right)+p\frac{(n-1)n}{2\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_n}\right)-\dots\\ +(-1)^{i-n+2}(p+n-i)\,\frac{(n-1)n\dots i}{2.3\dots(i-n+2)\,\mathrm{d}x^{i-n+2}}\mathrm{d}^{i-n+2}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_i}\right)+\dots\dots\\ \dots\dots\dots+(-1)^{p+1}.\;\frac{(n-1)n\dots(n+p-1)}{2.3\dots(p+1)\,\mathrm{d}x^{p+1}}\mathrm{d}^{p+1}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{n+p-1}}\right)\end{array}\right\}=\mathrm{o},$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{(p+2)(p+3)}{2}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{n-3}}\right)-\frac{(p+1)(p+2)}{2}\,.\,\frac{n-2}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{n-2}}\right)\dots\dots\dots\\ +(-1)^{i-n+3}\frac{(p+n-i-1)(p+n-i)}{2}\,\frac{(n-2)(n-1)\dots i}{2.3..(i-n+3)\,\mathrm{d}x^{i-n+3}}\mathrm{d}^{i-n+3}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_i}\right)+\\ \dots\dots\dots+(-1)^{p+1}\,\frac{(n-2)(n-1)\dots(n+p-2)}{2.3\dots(p+1)\mathrm{d}x^{p+1}}\mathrm{d}^{p+1}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{n+p-2}}\right)\end{array}\right\}=\mathrm{o},$$

. . . .

. . . . , ... , ...

$$\left.\begin{array}{l}\frac{(p+2)(p+3)..(p+n)}{2.3\dots(n-1)}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y}\right)-\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)}{2.3\dots(n-1)\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_1}\right)\dots\\ +(-1)^i\,\frac{(p-i+2)(p-i+3\dots(p-i+n)}{2.3\dots(n-1)\mathrm{d}x^i}\mathrm{d}^i\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_i}\right)\dots+\frac{(-1)^{p+1}}{\mathrm{d}x^{p+1}}\mathrm{d}^{p+1}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{p+1}}\right).\end{array}\right\}=\mathrm{o},$$

Simili forme furono da me proposte negli Atti di questo Istituto (*Bullettino*, T. II, pag. 377. Sessione 26 Giugno 1843) e negli *Annali di Matematica e Fisica* del ch.^{mo} Prof. Tortolini (Roma, Agosto 1850).

Per dimostrare l' equivalenza del nuovo sistema (20) con quello delle ordinarie condizioni d' integrabilità rappresentate dall' equazione (18), si osservi che l'identità (13), ove invece di n, m, i si introducano rispettivamente $i-n+m$ $n+p-i$, $m-1$, esibisce

$$(21)\;\frac{(i-n+m)(i-n+m-1)\dots(i-n+2)}{1.2.3\dots(m-1)}+\frac{(i-n+m)(i-n+m-1)\dots(i-n+3)}{1.2.3\dots(m-2)}.(n+p-i)$$

$$+\frac{(i-n+m)(i-n+m-1)\dots(i-n+4)}{1.2.3\dots(m-3)}.\frac{(n+p-i)(n+p-i-1)}{1.2}+\dots$$

$$\dots\dots+(i-n+m)\,\frac{(n+p-i)(n+p-i-1)\dots(n+p-i-m+3)}{1.2.3\dots(m-2)}$$

$$+\frac{(n+p-i)(n+p-i-1)\dots(n+p-i-m+2)}{1.2.3\dots(m-1)}=\frac{(p+m)(p+m-1)(p+m-2)\dots(p+2)}{1.2.3\dots(m-1)}.$$

Ciò posto, differenziando le equazioni 1ª, 2ª . . . $(m-1)^{esima}$ del sistema (20) $m-1,\ m-2,\ \ldots\ 2,\ 1$ volte e sommandole colla m^{esima} (19) dopo di averle rispettivamente moltiplicate per

$$(-1)^{m-1}\frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-1)}{dx^{m-1}}\,,\ (-1)^{m-2}(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-2)\frac{m-1}{dx^{m-2}}\,,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$(-1)^{m-3}(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-3)\ \frac{(m-1)(m-2)}{dx^{m-3}}\,,\ (n-m+1)\ \frac{(m-1)(m-2)\ldots3.2.1}{dx}\,,$$

si ottiene una equazione il cui termine generale contenente come nella (19) la quantità

$$\frac{(-1)^{i-n+m}}{dx^{i-n+m}}\,d^{i-n+m}\left(\frac{dV_n}{dy_i}\right),$$

avrebbe per coefficiente

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots i}{2.3\ldots(i-n+1)}+\frac{(n-m+1)\ldots i}{2.3\ldots(i-n+2)}(p+n-i)(m-1)$$

$$+\frac{(n-m+1)\ldots i}{2.3\ldots(i-n+3)}(p+n-i)\ (p+n-i-1)\ \frac{(m-1)(m-2)}{2}+\ \ldots$$

$$+\frac{(n-m+1)\ \ldots\ i}{2.3\ldots(i-n+m-1)}(p+n-i)\ (p+n-i-1)\ldots(p+n-m-i+3)\ (m-1)$$

$$+\ \frac{(n-m+1)\ldots i}{2.3\ldots(i-n+m)}\ (p+n-i)\ldots(p+n-m-i+2)$$

$$=\frac{i(i-1)\ldots(i-n+2)}{2.3\ldots(n-m)}+\frac{i(i-1)\ldots(i-n+3)}{2.3\ldots(n-m)}(p+n-i)(m-1)$$

$$+\ \frac{i(i-1)\ldots(i-n+4)}{2.3\ldots(n-m)}\ (p+n-i)\ (p+n-i-1)\ \frac{(m-1)(m-2)}{2}+\ \ldots$$

$$+\ \frac{i(i-1)\ldots(i-n+m)}{2.3\ldots(n-m)}\ (p+n-i)\ (p+n-i-1)\ldots(p+n-m-i+3)(m-1)$$

$$+\ \frac{i(i-1)\ldots(i-n+m+1)}{2.3\ldots(n-m)}\ (p+n-i)\ \ldots\ (p+n-m-i+2)\,.$$

a cagione dell' identità

$$\frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots i}{2.3\ldots(i-n+m)}=\frac{i(i-1)\ldots(i-n+m+1)}{2.3\ldots(n-m)}.$$

Ora questa quantità si trova essere il prodotto del fattor comune

$$1.2.3\ldots(m-1)\frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-n+m+1)}{2.3\ldots(n-m)}$$

per l'espressione (21). Conseguentemente il valore del coefficiente richiesto si riduce alla formula

$$\frac{i(i-1)(i-2)\ldots(i-n+m+1)}{2.3\ldots(n-m)}(p+m)(p+m-1)\ldots(p+2).$$

Ma siccome il fattore $(p+m)(p+m-1)\ldots(p+2)$ essendo indipendente da i è comune a tutti i termini della finale equazione così dedotta, i quali risultano dall' attribuire ad i i suoi valori $n-m, n-m+1, \ldots n+p$, esso si può omettere nella espressione del termine generale di detta equazione, il quale perciò diviene

$$(-1)^{i-n+m}\frac{i(i-1)(i-n+m+1)}{2.3\ldots(n-m)\,\mathrm{d}x^{i-n+m}}\mathrm{d}^{i-n+m}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_i}\right).$$

E poichè attribuendovi ad i i suddetti valori $n-m, n-m+1, \ldots n+p$ se ne ottengono i varii termini dell' equazione (18), da cui poscia col dare ad m i suoi valori $1, 2, 3\ldots n$ si ricavano le note condizioni d' integrabilità della funzione $V_n\mathrm{d}x^n$; si rileva quindi che al sistema di queste corrisponde il nuovo sistema delle equazioni (20).

Il vantaggio e l'utilità delle equazioni (20) s' aumenta al crescere di n ed al diminuirsi del numero p. Abbiamo infatti, qualunque sia n,

per $p=0$

$$(22)\qquad \left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{n-1}}\right)-\frac{n}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_n}\right)=0,\quad 2\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{n-2}}\right)-\frac{n-1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{n-1}}\right)=0,$$

$$3\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{n-3}}\right)-\frac{n-2}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{n-2}}\right)=0\;\ldots\; n\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y}\right)-\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_1}\right)=0;$$

per $p=1$

$$\left(\frac{dV_n}{dy_{n-1}}\right)-\frac{n}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy_n}\right)+\frac{n(n+1)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dV_n}{dy_{n+1}}\right)=0,$$

$$3\left(\frac{dV_n}{dy_{n-2}}\right)-2\frac{(n-1)}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy_{n-1}}\right)+\frac{(n-1)n}{2dx^2}d^2\left(\frac{dV_n}{dy_n}\right)=0,$$

$$6\left(\frac{dV_n}{dy_{n-3}}\right)-3\frac{(n-2)}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy_{n-2}}\right)+\frac{(n-2)(n-1)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dV_n}{dy_{n-1}}\right)=0,$$

. . . .

$$\frac{n(n+1)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dV_n}{dy}\right)-n\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy_1}\right)+\frac{1}{dx^2}d^2\left(\frac{dV_n}{dy_2}\right);$$

per $p=2$

$$\left(\frac{dV_n}{dy_{n-1}}\right)-\frac{n}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy_n}\right)+\frac{n(n+1)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dV_n}{dy_{n+1}}\right)-\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3\,dx^3}d^3\left(\frac{dV_n}{dy_{n+2}}\right)=0,$$

$$4\left(\frac{dV_n}{dy_{n-2}}\right)-3\frac{n-1}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy_{n-1}}\right)+2\frac{(n+1)n}{2dx^2}d^2\left(\frac{dV_n}{dy_n}\right)-\frac{(n-1)n(n+1)}{2.3\,dx^3}d^3\left(\frac{dV_n}{dy_{n+1}}\right)=0,$$

$$10\left(\frac{dV_n}{dy_{n-3}}\right)-6\frac{n-2}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy_{n-2}}\right)+3\frac{(n-2)(n-1)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dV_n}{dy_{n-1}}\right)-\frac{(n-2)(n-1)n}{2.3\,dx^3}d^3\left(\frac{dV_n}{dy_n}\right)=0,$$

. . . .

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}\left(\frac{dV_n}{dy}\right)-\frac{n(n+1)}{2}\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy_1}\right)+n\frac{1}{dx^2}d^2\left(\frac{dV_n}{dy_2}\right)-\frac{1}{dx^3}d^3\left(\frac{dV_n}{dy_3}\right)=0;$$

etc.

Verificate le condizioni (17), oppure le (20), l'integrale n^{esimo} di $V_n dx^n$ sarà così riducibile, mediante l'equazione (6), ad una funzione α_{p+1} non contenente veruna delle quantità $y, y_1, y_2, \ldots y_{p+n}$.

Per ottenere l'espressione di P_p (5) è d'uopo avere in generale quella di $\left(\frac{d\alpha_i}{dy_i}\right)$. Ma siccome α_m non contiene $y, y_1, \ldots y_{m-1}$, derivando la 1ª delle (5) rapporto ad y_i abbiamo

$$\int_{\varphi}\left(\frac{d^2V}{dy\,dy_i}\right)dy+\int_{\varphi'}\left(\frac{d^2\alpha_1}{dy_1 dy_i}\right)+\ldots+\int_{\varphi^{(i-1)}}\left(\frac{d^2\alpha_{i-1}}{dy_{i-1}dy_i}\right)dy_{i-1}+\left(\frac{d\alpha_i}{dy_i}\right)=\left(\frac{dP_i}{dy_i}\right),$$

e poste $y = \varphi$, $y_1 = \varphi'$, $\ldots y_{i-1} = \varphi^{(i-1)}$, e denotato con $\left(\frac{dP_i}{dy_i}\right)_i$ il valore corrispondente di $\left(\frac{dP_i}{dy_i}\right)$ ne viene

$$\left(\frac{d\alpha_i}{dy_i}\right) = \left(\frac{dP_i}{dy_i}\right)_i,$$

ossia (15)

$$(23)\quad \left(\frac{d\alpha_i}{dy_i}\right) = \left\{\left(\frac{dV_n}{dy_{n+i}}\right) - \frac{n}{dx} d\left(\frac{dV_n}{dy_{n+i+1}}\right) + \ldots + (-1)^{p-i} \frac{n(n+1)\ldots(n+p-i-1)}{2.3\ldots(p-i)dx^{p-i}} d^{p-i}\left(\frac{dV_n}{dy_{n+p}}\right)\right\}_i,$$

ritenendo che l'indice i applicato inferiormente a tutta l'espressione significhi il suo valore corrispondente ad $y = \varphi$, $y_1 = \varphi'$, $\ldots y_{i-1} = \varphi^{(i-1)}$. Siccome poi nella espressione (23) per le avverate condizioni d'integrabilità non possono rimanere le quantità y_{p+1}, $y_{p+2} \ldots y_{p+n}$, si potrà annullarvi queste quantità prima o dopo di aver eseguito le differenziazioni ivi indicate.

Circa all'espressione di $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ avendosi (5)

$$\int_\varphi \left(\frac{dV}{dy}\right) dy = P_0, \text{ e quindi } \left(\frac{dV}{dy}\right) = \left(\frac{dP_o}{dy}\right),$$

si trova (15)

$$(24)\quad \left(\frac{dV}{dy}\right) = \left(\frac{dV_n}{dy}\right) - \frac{n}{dx} d\left(\frac{dV_n}{dy_1}\right) + \frac{n(n+1)}{2dx^2} d^2\left(\frac{dV_n}{dy_2}\right) - \ldots$$

$$+ (-1)^p \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{2.3\ldots p\, dx^p} d^p\left(\frac{dV_n}{dy_{n+p}}\right).$$

Conosciuti così i valori (23) (24) di $\left(\frac{d\alpha_1}{dy_1}\right)$, $\left(\frac{d\alpha_2}{dy_2}\right) \ldots \left(\frac{d\alpha_p}{dy_p}\right)$, e di $\left(\frac{dV}{dy}\right)$,

si avrà colle relative integrazioni rapporto ad y_1, y_2, $\ldots y_p$, y, il valore di P_p (5), e quindi sarà ridotta la ricerca dell'integrale n^{esimo} di $V_n dx^n$ alla determinazione di α_{p+1} (6). Pertanto qualora siasi ottenuta con facilità ed abbastanza semplicemente l'espressione di P_p, si può rilevare l'integrabilità di $V_n dx^n$ rispetto alla primitiva y, senza ricorrere alle condizioni (17) o (20), esaminando se dalla differenza $V_n dx^n - d^n P_p$ si dileguino y_{p+1}, y_{p+2}, $\ldots y_{p+n}$.

Ora per determinare α_{p+1} si ha l'equazione (7) da cui, attribuendovi ad $y, y_1, \ldots y_{p+n}$, i rispettivi valori φ, φ', $\ldots \varphi^{(p+n)}$, e denotato con $V_n^{(1)}$ il

corrispondente valore di V_n, si ritrae per l' annullarsi di P_p (5), e per l' indipendenza di α_{p+1} da $y, y_1, \ldots y_{p+n}$,

$$(25) \qquad \frac{d^n \alpha_{p+1}}{dx^n} = V_n^{(1)},$$

ossia

$$\alpha_{p+1} = \int^n V_n^{(1)} dx^n ;$$

di maniera che la questione della integrazione di $V_n dx^n$, e delle condizioni d' integrabilità di questa funzione, trovasi ridotta ad una questione analoga relativa alla formula $V_n^{(1)} dx^n$ la quale è più semplice della proposta, attesochè non contiene la y nè veruna delle differenziali di y.

Procedendo alla ricerca dell' integrale n^{esimo} di $V_n^{(1)} dx^n$ in un modo affatto conforme a ciò che si espose finora intorno a $V_n dx^n$, basterà, senza mestieri di ripetere le medesime dimostrazioni, stabilire le analoghe conclusioni, mutando rispettivamente V_n, V, y, p in $V_n^{(1)}, \alpha_{p+1}, u, q$. Perciò assumendo in conformità alle relazioni (3) (4) (5)

$$(26) \qquad \alpha_{p+1} = \int_\chi \left(\frac{d\alpha_{p+1}}{du}\right) du + \beta_1 ,$$

$$\beta_1 = \int_{\chi'} \left(\frac{d\beta_1}{du_1}\right) du_1 + \beta_2 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_q = \int_{\chi^{(q)}} \left(\frac{d\beta_q}{du_q}\right) du_q + \beta_{q+1} ,$$

ove si suppone

$$(27) \qquad \chi = \sum b_m x^m$$

e ne' casi ordinarii

$$\chi = b, \text{ oppure } \chi = b_m x^m$$

inoltre ponendo

$$(28) \qquad \int_\chi \left(\frac{d\alpha_{p+1}}{du}\right) du + \int_{\chi'} \left(\frac{d\beta_1}{du_1}\right) du_1 + \ldots + \int_{\chi^{(i)}} \left(\frac{d\beta_i}{du_i}\right) du_i = Q_i ,$$

$$\int_\chi \left(\frac{d\alpha_{p+1}}{du}\right) du + \int_{\chi'} \left(\frac{d\beta_1}{du_1}\right) du_1 + \ldots + \int_{\chi^{(q)}} \left(\frac{d\beta_q}{du_q}\right) du_q = Q_q ,$$

si otterrà analogamente alla (6)

$$(29) \qquad \alpha_{p+1} = Q_q + \beta_{q+1}.$$

Quindi si avrà

$$\frac{d^n \beta_{q+1}}{dx^n} = V_n^{(1)} - \frac{d^n Q_q}{dx^n},$$

ed annullando le derivate parziali rapporto ad $u, u_1, u_2 \ldots u_{q+n}$ di questa espressione, si dedurranno le n condizioni d'integrabilità di $V_n^{(1)} dx^n$, e in conseguenza di $V_n dx^n$, relative alla variabile primitiva u, ed inoltre i valori di

$$\left(\frac{dQ_0}{du}\right), \left(\frac{dQ_1}{du_1}\right) \ldots \left(\frac{dQ_q}{du_q}\right).$$

Queste n condizioni verranno rappresentate da una qualsivoglia delle tre seguenti equazioni conformi alle (16) (18) (19).

$$(30) \left.\begin{matrix} \left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n-m}}\right) - \frac{n}{dx} d\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n-m+1}}\right) + \frac{n(n+1)}{2dx^2} d^2\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n-m+2}}\right) - \ldots \\ \ldots \ldots + (-1)^{q+m} \frac{n(n+1)\ldots(n+q+m-1)}{2.3\ldots(q+m)dx^{q+m}} d^{q+m}\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+q}}\right) \end{matrix}\right\} = 0,$$

ovvero

$$(31) \left.\begin{matrix} \left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n-m}}\right) - \frac{n-m+1}{dx} d\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n-m+1}}\right) + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2dx^2} d^2\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n-m+2}}\right) - \ldots \\ \ldots \ldots + (-1)^{q+m} \frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n+q)}{2.3\ldots(q+m)dx^{q+m}} d^{q+m}\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+q}}\right) \end{matrix}\right\} = 0,$$

od anco più brevemente

$$(32) \left.\begin{matrix} \frac{m(m+1)\ldots(m+q)}{1.2.3\ldots(q+1)}\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n-m}}\right) - \frac{m(m+1)\ldots(m+q-1)}{1.2.3\ldots q}\left(\frac{n-m+1}{dx}\right) d\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n-m+1}}\right) \\ + \frac{m(m+1)\ldots(m+q-2)}{1.2.3\ldots(q-1)} \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2dx^2} d^2\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+m+2}}\right) - \ldots \ldots \\ + \ldots + (-1)^{q+1} \frac{(n-m+1)(n-m+2)\ldots(n-m+q+1)}{2.3\ldots(q+1)dx^{q+1}} d^{q+1}\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n-m+q+1}}\right) \end{matrix}\right\} = 0,$$

essendo m dotato de' valori $1, 2, 3 \ldots n$.

La coincidenza della (32) colla (19) ove si muti p in q è manifesta per l'evidente identità di queste due espressioni

$$\frac{(q+2)(q+3)\ldots(m+q)}{1.2.3\ldots(m-1)}=\frac{m(m+1)\ldots(m+q)}{1.2.3\ldots(q+1)}.$$

Si avrebbe poi di conformità alla (15)

$$(33)\qquad \left(\frac{dQ_i}{du_i}\right)=\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+1}}\right)-\frac{n}{dx}d\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+i+1}}\right)+\frac{n(n+1)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+i+2}}\right)-\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{q-i}\frac{n(n+1)\ldots(n+q-i-1)}{2.3\ldots(q-i)dx^{q-i}}d^{q-i}\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+q}}\right),$$

e poichè risulta del pari

$$\left(\frac{d\beta_i}{du_i}\right)=\left(\frac{dQ_i}{du_i}\right)_i$$

cioè $\left(\frac{d\beta_i}{du_i}\right)$ ha per valore quello di $\left(\frac{dQ_i}{du_i}\right)$ corrispondente ad $u=\chi$, $u_1=\chi'$, $u_2=\chi''$, .. $u_{i-1}=\chi^{(i-1)}$,

ne viene

$$(34)\qquad \left(\frac{d\beta_i}{du_i}\right)=\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+i}}\right)-\frac{n}{dx}d\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+i+1}}\right)+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +(-1)^{q-i}\frac{n(n+1)\ldots(n+q-i-1)}{2.3\ldots(q-i)\,dx^{q-i}}d^{q-i}\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+q}}\right)\end{array}\right\}_i;$$

di più avendosi

$$\left(\frac{d\alpha_{p+1}}{du}\right)=\left(\frac{dQ_0}{du}\right),$$

si ottiene

$$(35)\qquad \left(\frac{d\alpha_{p+1}}{du}\right)=\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_n}\right)-\frac{n}{dx}d\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+1}}\right)+\ldots\ldots$$
$$+(-1)^q\frac{n(n+1)\ldots(n+q-1)}{2.3\ldots q\,dx^q}d^q\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+q}}\right).$$

Determinato così il valore di Q_q (28) mercè le integrazioni parziali relative ad u, u_1, ... u_{n+q} si trova, mediante l'equazione (29), ridotta α_{p+1}, e quindi (6) V, alla ricerca di β_{q+1}.

Ora per le avverate condizioni di integrabilità essendo β_{q+1} indipendente da u, u_1, ... u_{q+n} si ottiene dall'equazione (29) differenziata n volte e divisa

per dx^n, ponendovi $u = \chi$, $u_1 = \chi' \ldots u_{n+q} = \chi^{(n+q)}$, denotati con $\alpha^{(2)}_{p+1}$, $V^{(2)}_n$ i valori corrispondenti di α_{p+1}, $V^{(1)}_n$

$$\frac{d^n\beta_{q+1}}{dx^n} = \frac{d^n\alpha^{(2)}_{p+1}}{dx^n}$$

cioè a cagione della (25)

$$(36) \qquad \frac{d^n\beta_{q+1}}{dx^n} = V^{(2)}_n$$

il qual valore di $V^{(2)}_n$ è quello della proposta funzione V_n per $y = \varphi$, $u = \chi$, e pe' relativi valori di $y_1, y_2 \ldots y_{p+n}$ $u_1, u_2, \ldots u_{q+n}$ (1).

Ridotta così la questione a determinare

$$\beta_{q+1} = \int^n V^{(2)}_n dx^n$$

si assumerà del pari

$$(37) \qquad \psi = \Sigma\, c_m x^m$$

e ne' casi più frequenti

$$\psi = c\,, \quad \text{oppure} \quad \psi = c_m x^m\,.$$

poscia

$$(38) \int_{\psi}\left(\frac{d\beta_{q+1}}{dz}\right)dz + \int_{\psi'}\left(\frac{d\gamma_1}{dz_1}\right)dz_1 + \ldots + \int_{\psi^{(i)}}\left(\frac{d\gamma_i}{dz_i}\right)dz_i + \ldots + \int_{\psi^{(r)}}\left(\frac{d\gamma_r}{dz_r}\right)dz_r = R_r,$$

e si avrà a simiglianza delle (6) (29)

$$(39) \qquad \beta_{q+1} = R_r + \gamma_{r+1}$$

purchè si avverino n equazioni conformi ad uno de' sistemi rappresentati dalle equazioni (16) (18) (19), cioè purchè sieno soddisfatte n equazioni di condizione deducibili da qualsivoglia delle equazioni seguenti analoghe alle (30) (31) (32).

$$(40) \quad \left.\begin{aligned} &\left(\frac{dV^{(2)}_n}{dz_{n-m}}\right) - \frac{n}{dx}d\left(\frac{dV^{(2)}_n}{dz_{n-m+1}}\right) + \frac{n(n+1)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dV^{(2)}_n}{dz_{n-m+2}}\right) - \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots + (-1)^{r+m}\frac{n(n+1)\ldots(n+r+m-1)}{2.3.(r+m)dx^{r+m}}d^{r+m}\left(\frac{dV^{(2)}_n}{dz_{n+r}}\right) \end{aligned}\right\} = 0.$$

ovvero

(41)

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_{n-m}}\right)-\frac{n-m+1}{dx}d\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_{n-m+1}}\right)+\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_{n-m+2}}\right)-\dots\\&\dots\dots+(-1)^{r+m}\frac{(n-m+1)(n-m+2)\dots(n+r)}{2.3\dots(r+m)dx^{r+m}}d^{r+m}\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_{n+r}}\right)\end{aligned}\right\}=0,$$

oppure

$$(42)\quad\left.\begin{aligned}&\frac{m(m+1)\dots(m+r)}{1.2.3\dots(r+1)}\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_{n-m}}\right)-\frac{m(m+1)\dots(m+r-1)}{2.3\dots r}\left(\frac{n-m+1}{dx}\right)d\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_{n-m+1}}\right)\\&+\frac{m(m+1)\dots(m+r-2)}{2.3\dots(r-1)}\,\frac{(n-m+1)(n-m+2)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_{n-m+2}}\right)-\dots\\&\dots+(-1)^{r+1}\frac{(n-m+1)(n-m+2)\dots(n-m+r+1)}{2.3\dots(r+1)dx^{r+1}}d^{r+1}\left(\frac{dV^{(2)}}{dz_{n-m+r+1}}\right),\end{aligned}\right\}=0,$$

ove ad m sono ad attribuirsi i valori $1, 2, 3 \dots n$.

Per ottenere l'espressione di R_r (38) si ha poi la formula analoga alle (23) (34)

(43)

$$\left(\frac{d\gamma_i}{dz_i}\right)=\left\{\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_{n+i}}\right)-\frac{n}{dx}d\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_{n+i+1}}\right)+\dots+(-1)^r\frac{n(n+1)\dots(n+r-i-1)}{2.3\dots(r-i)dx^{r-i}}d^{r-i}\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_{n+r}}\right)\right\}_i$$

ed inoltre a simiglianza delle (24) (35)

(44)

$$\left(\frac{d\beta_{q+1}}{dz}\right)=\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_n}\right)-\frac{n}{dx}d\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_{n+1}}\right)+\dots+(-1)^r\frac{n(n+1)\dots(n+r-1)}{2.3\dots r dx^r}d^r\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_{n+r}}\right).$$

Il valore di γ_{r+i} si deduce, come anteriormente si è veduto circa a quelli di α_{p+1}, β_{q+1}, dal porre nella differenziale n^{esima} della (39) $z=\psi$, $z_1=\psi'$, .. $z_{r+n}=\psi^{(r+n)}$. Imperocchè riducendosi allora R_r a zero (38), ed essendo γ_{r+1} indipendente da $z, z_1 \dots z_{r+n}$, denotati con $\beta_{q+1}^{(3)}$, $V_n^{(3)}$ i valori corrispondenti di β_{q+1}, $V_n^{(2)}$ per $z=\psi, \dots z_{r+n}=\psi^{(r+n)}$, se ne ritrae

$$\frac{d^n\gamma_{r+1}}{dx^n}=\frac{d^n\beta_{q+1}^{(3)}}{dx^n};$$

e siccome pe' medesimi valori di z, $z_1 \ldots z_{r+n}$ si ha dalla (36)

$$\frac{d^n \beta^{(3)}_{q+1}}{dx^n} = V^{(3)}_n,$$

ne risulta

$$(45) \qquad \frac{d^n \gamma_{r+1}}{dx^n} = V^{(3)}_n,$$

ossia

$$\gamma_{r+1} = \int^n V^{(3)}_n dx^n,$$

essendo $V^{(3)}_n$ il valore di V_n per $y = \varphi$, $u = \chi$, $z = \psi$, e pe' relativi valori di $y_1, y_2 \ldots y_{p+n}$, $u_1, \ldots u_{q+n}$ $z_1, \ldots z_{r+n}$ (1).

Se la proposta funzione differenziale $V_n dx^n$ non contenesse altre variabili primitive oltre x, y, u, z, $V^{(3)}_n dx^n$ sarebbe una funzione della sola x che non esige veruna condizione d' integrabilità, attesochè il suo integrale n^{esimo} si può sempre assegnare almeno col mezzo d' una serie infinita. Non resterebbe quindi che sostituire nella (39) *a* γ_{r+1} il suo valore testè dedotto, e sommare insieme le (6) (29) (39), onde avere l' espressione dell' integrale cercato cioè

$$V = P_p + Q_q + R_r + \int^n V^{(3)}_n dx^n,$$

essendo P_p, Q_q, R_r determinate dalle eguaglianze (5) (28) (38), e i valori di

$$\left(\frac{d\alpha_i}{dy_i}\right), \left(\frac{d\beta_i}{du_i}\right), \left(\frac{d\gamma_i}{dz_i}\right)$$

deducendosi dalle formule (23) (34) (43), come pur quelli di

$$\left(\frac{dV}{dy}\right), \left(\frac{d\alpha_{p+1}}{du}\right), \left(\frac{d\beta_{q+1}}{dz}\right)$$

dalle (24) (35) (44).

Se poi nella data funzione V_n si contenesse qualche altra variabile, si procederebbe analogamente allo sviluppo di $\int^n V^{(3)}_n dx^n$, riducendo questo integrale a quello di $V^{(4)}_n dx^n$, e così di mano in mano finchè, supposto m il numero delle variabili y, u, etc., ad eccezione della x il cui elemento si ritenne costante, si giungerà all' integrale n^{esimo} di $V^{(m)}_n dx^n$, e si avrà in generale

$$(46) \qquad \int^n V_n dx^n = P_p + Q_q + R_r + \ldots + \int^n V^{(m)}_n dx^n.$$

E siccome $V^{(m)}_n dx^n$ non contiene che la variabile x, e fu assunto dx costante, la funzione $V^{(m)}_n dx^n$ sarà sempre integrabile almeno per serie, donde si scorge che per l' integrabilità della data funzione $V_n dx^n$ non si richiede veruna condizione riguardo alla variabile x il cui elemento si è ritenuto costante.

CAPO II.

Deduzione di un' altra formula di più facile applicazione.

La formula (46) può offrire qualche vantaggio su' mezzi più usitati per l'integrazione d'una funzione differenziale d'ordine n a più variabili indipendenti, ove l'elemento d'una variabile siasi ritenuto costante. Ma una maggiore utilità sarà per offrire un' altra formula d'integrazione che ci rimane a dedurre assumendo in luogo delle equazioni (3) la serie di queste eguaglianze

$$V = \int_{\varphi^{(p)}} \left(\frac{dV}{dy_p}\right) dy_p + \alpha_{(p)}, \tag{47}$$

$$\alpha_{(p)} = \int_{\varphi^{(p-1)}} \left(\frac{d\alpha_{(p)}}{dy_{p-1}}\right) dy_{p-1} + \alpha_{(p-1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{(1)} = \int_{\varphi} \left(\frac{d\alpha_{(1)}}{dy}\right) dy + \alpha_{(0)},$$

in cui $\alpha_{(i)}$ è una funzione che non contiene veruna delle quantità $y_i, y_{i+1} \cdots y_p$, e quindi $\alpha_{(0)}$ non dee comprendere alcuna delle $y, y_1, y_2 \cdots y_p$, e nemmeno le $y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots y_{p+n}$, che non esistono nella funzione primitiva V.

Conseguentemente ponendo

$$\int_{\varphi^{(p)}} \left(\frac{dV}{dy_p}\right) dy_p + \int_{\varphi^{(p-1)}} \left(\frac{d\alpha_{(p)}}{dy_{p-1}}\right) dy_{p-1} + \ldots + \int_{\varphi^{(i)}} \left(\frac{d\alpha_{(i+1)}}{dy_i}\right) dy_i = P_{(i)}, \tag{48}$$

$$\int_{\varphi^{(p)}} \left(\frac{dV}{dy_p}\right) dy_p + \int_{\varphi^{(p-1)}} \left(\frac{d\alpha_{(p)}}{dy_{p-1}}\right) dy_{p-1} + \ldots + \int_{\varphi} \left(\frac{d\alpha_{(1)}}{dy}\right) dy = P_{(0)},$$

si otterrà dal sommare insieme le (47)

$$V = P_{(0)} + \alpha_{(0)}, \tag{49}$$

e differenziando n volte, e dividendo per dx^n questa eguaglianza, si avrà

$$\frac{d^n\alpha_{(0)}}{dx^n} = V_n - \frac{d^nP_{(0)}}{dx^n}. \tag{50}$$

Perchè abbia luogo la (49), ossia perchè V sia riducibile ad $\alpha_{(0)}$ è necessario e sufficiente che le derivate parziali della espressione (50) si riducano a zero. Ora dalla equazione (48) si ritrae colla sottrazione

$$P_{(0)} = P_{(i)} + \int_{\varphi^{(i-1)}} \left(\frac{d\alpha_{(i)}}{dy_{i-1}}\right) dy_{i-1} + \int_{\varphi^{(i-2)}} \left(\frac{d\alpha_{(i-1)}}{dy_{i-2}}\right) dy_{i-2} + \ldots + \int_{\varphi} \left(\frac{d\alpha_{(1)}}{dy}\right) dy,$$

e in conseguenza

$$(51) \qquad \left(\frac{dP_{(0)}}{dy_i}\right) = \left(\frac{dP_{(i)}}{dy_{(i)}}\right),$$

e nel caso di $i = p$ (48)

$$(52) \qquad \left(\frac{dP_{(p)}}{dy_p}\right) = \left(\frac{dV}{dy_p}\right);$$

cosicchè dalla formula (8) si deduce

$$(53)\ D_{y_i}\left(\frac{d^n P_{(0)}}{dx^n}\right) = \left(\frac{dP_{(i-n)}}{dy_{i-n}}\right) + \frac{n}{dx} d\left(\frac{dP_{(i-n+1)}}{dy_{i-n+1}}\right) + \frac{n(n-1)}{2dx^2} d^2\left(\frac{dP_{(i-n+2)}}{dy_{i-n+2}}\right) - \text{etc.}$$
$$\ldots\ldots + \frac{1}{dx^n} d^n \left(\frac{dP_{(i)}}{dy_i}\right),$$

cioè una formula del tutto conforme alla (11), dalla quale debbono del pari escludersi i termini con indice negativo o superiore a p. Quindi la derivazione parziale della espressione (50) rapporto alle singole variabili $y_{p+n}, y_{p+n-1}, \ldots y_1, y$ somministra altrettante equazioni pienamente conformi alle (12), sennonchè invece di ciascuna delle P_m si troverebbe la corrispondente $P_{(m)}$. Perciò l'eliminazione delle $p+1$ quantità $\left(\frac{dP_{(i)}}{dy_i}\right)$ guiderebbe alle stesse n equazioni di condizione (17) riducibili al sistema rappresentato dalla (18), oppure a quello più facile delle (20) rappresentabili mediante la (19). Si avrà poi per l'analogia delle $\left(\frac{dP_{(i)}}{dy_i}\right)$ colle $\left(\frac{dP_i}{dy_i}\right)$ la stessa formula (15) onde esprimere $\left(\frac{dP_{(i)}}{dy_i}\right)$, cioè

$$(54)\ \left(\frac{dP_{(i)}}{dy_i}\right) = \left(\frac{dV_n}{dy_{n+i}}\right) - \frac{n}{dx} d\left(\frac{dV_n}{dy_{n+i+1}}\right) + \frac{n(n+1)}{2dx^2} d^2\left(\frac{dV_n}{dy_{n+i+2}}\right) - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{p-i} \frac{n(n+1)\ldots(n+p-i-1)}{2.3\ldots(p-i)dx^{p-i}} d^{p-i}\left(\frac{dV_n}{dy_{n+p}}\right).$$

E poichè la derivazione della 1.ª eguaglianza (48) rapporto ad y_i offre

$$\left.\begin{array}{l}\int_{\varphi^{(p)}}\left(\frac{d^2V}{dy_p dy_i}\right)dy_p+\int_{\varphi^{(p-1)}}\left(\frac{d^2\alpha_{(p)}}{dy_{p-1}dy_i}\right)dy_{p-1}+\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot+\int_{\varphi^{(i+1)}}\left(\frac{d^2\alpha_{(i+2)}}{dy_{i+1}dy_i}\right)dy_{i+1}+\left(\frac{d^2\alpha_{(i+1)}}{dy_i}\right)\end{array}\right\}=\left(\frac{dP_{(i)}}{dy_i}\right),$$

si avrà col porre in questa eguaglianza $y_{i+1}=\varphi^{(i+1)}$, $y_{i+2}=\varphi^{(i+2)}$, ... $y_p=y^{(p)}$, attesa l' indipendenza di α_{i+1} da queste variabili, denotando con $\left(\frac{dP_{(i)}}{dy_i}\right)_{(i)}$ il corrispondente valore di $\left(\frac{dP_{(i)}}{dy_i}\right)$,

cioè (54)
$$\left(\frac{d\alpha_{(i+1)}}{dy_i}\right)=\left(\frac{dP_{(i)}}{dy_i}\right)_{(i)},$$

$$(55)\qquad \left(\frac{d\alpha_{(i+1)}}{dy_i}\right)=\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dV_n}{dy_{n+i}}\right)-\frac{n}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy_{n+i+1}}\right)+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ +(-1)^{p-i}\frac{n(n+1)\ldots(n+p-i-1)d^{p-i}}{2.3\ldots(p-i)dx^{p-i}}\left(\frac{dV_n}{dy_{n+p}}\right)\end{array}\right\}_{(i)}$$

Ora per le soddisfatte condizioni d' integrabilità questa espressione non può contenere nemmeno $y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots y_{p+n}$, e perciò si potrà annullarvi tutte queste quantità anco prima di eseguirvi le accennate differenziazioni.
Si avrà inoltre per $i=p$ dalla (54) a cagione della (52)

$$(56)\qquad \left(\frac{dV}{dy_p}\right)=\left(\frac{dV_n}{dy_{n+p}}\right).$$

Determinato col mezzo della 2.ª formula (48) e delle (55) (56) il valore di $P_{(o)}$, sarà ridotta la ricerca di V a quella di $\alpha_{(o)}$, mediante la (49). Ma ponendo $y=\varphi$, $y_1=\varphi'$, ... $y_{p+n}=\varphi^{(p+n)}$ nella (50) si ha

$$(57)\qquad \frac{d^n\alpha_{(o)}}{dx^n}=V_n^{(1)},$$

cioè

$$\alpha_{(o)}=\int^n V_n^{(1)}dx^n,$$

e quindi col porre analogamente alle (48)

$$(58)\quad \int_{\chi(q)}\left(\frac{d\alpha_{(0)}}{du_q}\right)du_q+\int_{\chi^{(q-1)}}\left(\frac{d\beta_{(q)}}{du_{q-1}}\right)du_{q-1}+\ldots+\int_{\chi}\left(\frac{d\beta_{(1)}}{du}\right)du=Q_{(0)},$$

esprimendo $\left(\frac{d\beta_{(i+1)}}{du_i}\right)$, $\left(\frac{dV}{du_q}\right)$, mercè le formule consimili alle (55) (56),

$$(59)\quad \left(\frac{d\beta_{(i+1)}}{du_i}\right)=\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+i}}\right)-\frac{n}{dx}d\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+i+1}}\right)+\ldots\ldots\ldots\\ +(-1)^{q-i}\frac{n(n+1)\ldots(n+q-i-1)}{2.3\ldots(q-i)dx^{q-i}}d^{q-i}\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+q}}\right)\end{array}\right\}_i,$$

$$\left(\frac{d\alpha_{(0)}}{du_q}\right)=\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+q}}\right),$$

si avrà

$$(60)\quad \alpha_{(0)}=Q_{(0)}+\beta_{(0)},$$

purchè sia soddisfatto il sistema delle relative equazioni di condizioni rappresentate da una qualsivoglia delle (30) (31) (32). In seguito dalla (60) derivata n volte, ove si ponga $u=\chi$, $u_1=\chi'$, $u_2=\chi''$, ... $u_{n+q}=\chi^{(n+q)}$, e si denoti con $\alpha_{(0)}^{(2)}$ il valore rispettivo di $\alpha_{(0)}$, avendosi a cagione della (57)

$$(61)\quad \frac{d^n\beta_{(0)}}{dx^n}=\frac{d^n\alpha_{(0)}^{(2)}}{dx^n}=V_n^{(2)},$$

sarà

$$\beta_{(0)}=\int^n V_n^{(2)}\,dx^n,$$

e similmente assunto

$$(62)\quad \int_{\psi^{(r)}}\left(\frac{d\beta_{(0)}}{dz_r}\right)dz_r+\int_{\psi^{(r-1)}}\left(\frac{d\gamma_r}{dz_{r-1}}\right)dz_{r-1}+\ldots+\int_{\psi}\left(\frac{d\gamma_{(1)}}{dz}\right)dz=R_{(0)},$$

essendo in conformità alle (59)

$$(63)\quad \left(\frac{d\gamma_{(i+1)}}{dz_i}\right)=\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_{n+i}}\right)-\frac{n}{dx}d\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_{n+i+1}}\right)+\ldots\ldots\ldots\\ +(-1)^{r-i}\frac{n(n+1)\ldots(n+r-i-1)}{2.3\ldots(r-i)dx^{r-i}}d^{r-i}\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_{n+r}}\right)\end{array}\right\}_i$$

$$\left(\frac{d\beta_{(0)}}{dz_r}\right)=\left(\frac{dV_n^{(2)}}{dz_{n+r}}\right),$$

si troverà

(64) $$\beta_{(o)} = R_{(o)} + \gamma_{(o)},$$

semprechè si avveri il sistema delle relative n condizioni d'integrabilità rappresentate da una qualsiasi delle equazioui (40) (41) (42). Si avrà poi dalla differenziale n^{esima} della (64) ponendo $z = \psi$, $z_1 = \psi'$, ... $z_{n+r} = \psi^{(n+r)}$, e denotando con $V_n^{(3)}$ il valore corrispondente di V_n, attesa la (61),

(65) $$\frac{d^n \gamma_{(o)}}{dx^n} = V_n^{(3)},$$

cioè

$$\gamma_{(o)} = \int^n V_n^{(3)} dx^n.$$

Qualora V_n oltre le x, y, u, z contenga altre variabili primitive si procederà analogamente allo sviluppo di $\int^n V_n^{(3)} dx^n$, finchè si giunga ad $\int^n V_n^{(m)} dx^n$ in cui $V_n^{(m)}$ rappresenta il risultato della sostituzione di $y = \varphi$, $u = \chi$, $z = \psi$, etc. fino all'ultima di queste variabili primitive, che si suppone la m^{esima}, e di $y_1 = \varphi' \ldots y_{p+n} = \varphi^{(p+n)}$, $u_1 = \chi'$ etc. Pertanto dalla somma delle eguaglianze (49) (60) (64) etc. si avrà per esprimere il richiesto integrale la formula generale

(66) $$\int^n V_n dx^n = P_{(o)} + Q_{(o)} + R_{(o)} + \ldots + \int^n V_n^{(m)} dx^m$$

deducendosi $P_{(o)}$, $Q_{(o)}$, $R_{(o)}$ etc., mediante le rispettive espressioni (48) (58) (62) e le eguaglianze (55) (56) (59) (63) etc. L'ultima formula $V_n^{(m)} dx^m$ essendo funzione della sola x, nell'ipotesi del dx costante, è sempre integrabile almeno per serie, e all'espressione del suo integrale converrà aggiungere sì nella (66) che nella (46) una funzione intera e razionale di x del grado $n-1$ i cui coefficienti saranno le n costanti arbitrarie che rendono l'integrale completo.

Si è già notato che le funzioni φ, χ, ψ, etc. della x (4) (27) (37) possono essere funzioni qualunque di x e d'ordinario funzioni intere e razionali dei rispettivi gradi p, q, r etc., ma nei casi ordinarii si ridurranno alle costanti qualunque a, b, c, etc., ovvero a' soli termini $a_m x^m$, $b_m x^m$, $c_m x^m$ etc. Ora l'integrale totale della data funzione $V^n dx^n$ esprimendosi (46) (66), mediante integrali di funzioni che risultano dalla V_n o dalla sua parziale e totale differenziazione, è palese che basterà attribuire ad y, u, z, etc. que' valori φ, χ, ψ, etc. che non rendano infinito il valore di V_n o quello di alcuna delle sue parziali derivate.

Dal presente metodo d' integrazione delle funzioni differenziali di qualunque ordine a più variabili indipendenti e dalle equazioni (30) (32) (40) (42) etc. si rende altresì evidente questo generale teorema.

« Allorchè sieno soddisfatte le condizioni d'integrabilità relative ad una » primitiva variabile y, si può nelle condizioni relative ad un' altra variabile u » sostituire alla y una funzione qualunque di x ed anco delle rimanenti va- » riabili, oppure una costante. Parimenti nel procedere alla verificazione delle » condizioni che si riferiscono ad una terza variabile z è concesso surrogare ad » y u funzioni qualunque di x e delle residue variabili, e così progressivamente. »

Se i valori così attribuiti alle successive variabili y, u, etc. sono nulli o costanti, si ha il teorema dimostrato dal celebre Poisson (*Mémoires de l' Institut de France*, T. XII), ed enunciato dal sig. Sarrus (*Comptes rendus de l' Académie des Sciences de Paris*, T. I, 1835). Ma però la supposizione dei valori di y, u, etc. eguali a zero od a quantità costanti non sarebbe ammissibile nei casi in cui risultino infiniti i valori delle derivate parziali di V_n.

La formula (66) si vantaggia per maggiore prontezza nell' applicazione in paragone della (46) e mi sembra preferibile a' mezzi finora proposti d' integrazione delle funzioni a più variabili d' un ordine qualunque, ed anco alla formula del Binet per cui fu resa più generale la formula dedotta dal Poisson nella citata Memoria sul calcolo delle variazioni.

Nel caso di p, q, r, etc. nulli le due formule (46) (66) si accordano ad esibire questa espressione dell' integrale n^{esimo} di $V_n \mathrm{d}x^n$.

$$(67)\quad \int_{\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_n}\right)\mathrm{d}y+\int_{\chi}\left(\frac{\mathrm{d}V_n^{(1)}}{\mathrm{d}u_n}\right)\mathrm{d}u+\int_{\psi}\left(\frac{\mathrm{d}V_n^{(2)}}{\mathrm{d}z_n}\right)\mathrm{d}z+\ldots+\int^n V_n^{(m)}\mathrm{d}x^n\,,$$

la quale nel caso di $n=1$ coincide colla nota espressione dell' integrale totale d' una funzione del primo ordine a più variabili.

Se p, q, r, etc. fossero eguali all' unità si avrebbe dalla (66)

$$(68)\quad \int_{\varphi'}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{n+1}}\right)\mathrm{d}y_1+\int_{\varphi}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_n}\right)-\frac{n}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{n+1}}\right)\right\}_{(1)}\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\chi'}\left(\frac{\mathrm{d}V_n^{(1)}}{\mathrm{d}u_{n+1}}\right)\mathrm{d}u_1+\int_{\chi}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}V_n^{(1)}}{\mathrm{d}u_n}\right)-\frac{n}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_n^{(1)}}{\mathrm{d}u_{n+1}}\right)\right\}_{(1)}\mathrm{d}u$$

$$+\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;+\int^n V_n^{(m)}\mathrm{d}x^n$$

Si dedurrebbe invece dalla (46)

$$(69)\qquad \int_\varphi \left\{\left(\frac{dV_n}{dy_n}\right) - \frac{n}{dx} d\left(\frac{dV_n}{dy_{n+1}}\right)\right\} dy + \int_{\varphi'} \left(\frac{dV_n}{dy_{n+1}}\right)_1 dy_1$$

$$+ \int_\chi \left\{\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_n}\right) - \frac{n}{dx} d\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+1}}\right)\right\} du + \int_{\chi'} \left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+1}}\right)_1 du_1$$

$$+ \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; + \int^n V_n^{(m)} dx^n$$

onde esprimere il richiesto integrale n^{esimo} di $V_n dx^n$, purchè le note condizioni d' integrabilità sieno soddisfatte.

Se fosse $q = o$, essendo tuttora p, r, etc. eguali all' unità, si avrebbe $\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+1}}\right) = o$, e la seconda riga in ciascuna delle formule (68) (69) si ridurrebbe a $\int_\chi \left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_n}\right) du$. Ma se fosse invece $q = 2$ la seconda riga della (68) sarebbe surrogata da

$$\int_{\chi''} \left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+2}}\right) du_2 + \int_{\chi'} \left\{\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+1}}\right) - \frac{n}{dx} d\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+2}}\right)\right\}_{(1)} du_1$$

$$+ \int_\chi \left\{\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_n}\right) - \frac{n}{dx} d\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+1}}\right) + \frac{n(n+1)}{2dx^2} d^2\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+2}}\right)\right\}_{(2)} du,$$

e si dovrebbe invece sostituire alla seconda riga delle (69)

$$\int_\chi \left\{\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_n}\right) - \frac{n}{dx} d\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+1}}\right) + \frac{n(n+1)}{2dx^2} d^2\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+2}}\right)\right\} du$$

$$+ \int_{\chi'} \left\{\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+1}}\right) - \frac{n}{dx} d\left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+2}}\right)\right\}_1 du_1 + \int_{\chi''} \left(\frac{dV_n^{(1)}}{du_{n+2}}\right)_2 du_2 .$$

Quindi si comprende che per agevolare l' integrazione converrà disporre i numeri p, q, r, etc. in ordine ascendente premettendo sempre quelli che hanno minor valore, e conseguentemente integrare $V dx^n$, $V^{(1)} dx^n$, $V^{(2)} dx^n$, etc. rapporto alle variabili che corrispondono a que' numeri così ordinati.

Si è notato nel breve discorso preliminare, che se fosse proposta ad integrarsi una funzione in cui verun elemento delle variabili primitive sia costante, basta cercarne l' integrale nella supposizione che sia costante un elemento dx, e che quindi vadano a zero le differenziali della x superiori al prim' ordine.

Ciò esige, a dir vero, che la proposta formula abbia una determinata significazione, ossia che torni la stessa allorchè si riconduca alla considerazione del dx variabile, mercè la sostituzione in luogo delle y_1, y_2 etc. di quelle formule che servono al cangiamento della x in un'altra variabile indipendente. È manifesto che siffatta condizione avrebbe luogo ogniqualvolta la data funzione sia differenziale esatta n^{esima} d'una funzione finita, oppure d'una funzione differenziale del primo ordine. Ma però potrebbe darsi il caso in cui la data formula fosse differenziale n^{esima} d'una funzione superiore al primo ordine, che non offrisse quella determinata significazione che si è dianzi indicata. Non sarebbe allora concesso di supporre costante la differenziale di alcuna delle primitive variabili, ma assunto invece costante l'elemento dt d'una nuova indipendente ausiliaria, converrà porre analogamente alle (1)

$$\frac{d^i x}{dt^i} = x_i, \quad \frac{d^i y}{dt^i} = y_i, \quad \frac{d^i u}{dt^i} = u_i \quad \text{etc.,}$$

e quindi procedere alla verificazione delle consuete condizioni d'integrabilità rispetto a ciascuna delle x, y, u, etc., ed eseguire le integrazioni relative a queste variabili, ed alle loro derivate rapporto a t, colle stesse regole già accennate ne' due Capi della presente Memoria.

Prima di chiudere questo lavoro con alcuni esempii d'applicazione, giova avvertire, che si avrebbe potuto renderne più uniformi le notazioni, e quindi più spedita l'esposizione, prescindendo da una più convincente dimostrazione delle condizioni necessarie e sufficienti per l'integrabilità d'una differenziale d'ordine qualunque, se si fosse derivata parzialmente l'equazione (2) rapporto ad $y_{p+n}, y_{p+n-1}, \ldots . y_1, y$. Infatti a cagione della (8) ne risulta una serie di eguaglianze del tutto conformi alle (12), se non che in luogo delle

$$\left(\frac{dP_p}{dy_p}\right), \left(\frac{dP_{p-1}}{dy_{p-1}}\right), \ldots \left(\frac{dP_0}{dy}\right)$$

vi s' incontrano le corrispondenti

$$\left(\frac{dV}{dy_p}\right), \left(\frac{dV}{dy_{p-1}}\right), \ldots . \left(\frac{dV}{dy}\right).$$

In conseguenza se ne ritraggono espressioni di queste ultime funzioni conformi alle (15) (56) cioè in generale

(70)

$$\left(\frac{dV}{dy_i}\right)=\left(\frac{dP_i}{dy_i}\right)=\left(\frac{dP_{(i)}}{dy_i}\right)=\left(\frac{dV_n}{dy_{n+i}}\right)-\frac{n}{dx}d\left(\frac{dV_n}{dy_{n+i+1}}\right)+\frac{n(n+1)}{2dx^2}d^2\left(\frac{dV_n}{dy_{n+i+2}}\right)$$

$$+\ldots\ldots+(-1)^{p-i}\frac{n(n+1)\ldots(n+p-i-1)}{2.3\ldots(p-i)dx^{p-i}}d^{p-i}\left(\frac{dV_n}{dy_{n+p}}\right).$$

Queste espressioni non debbono contenere derivate di y superiori all'ordine p, onde la data funzione $V_n dx^n$ sia differenziale esatta dell' ordine n. È poi necessario e sufficiente a quest' uopo che le dette espressioni (70) rendano identiche le rimanenti n equazioni analoghe alle (12), ossia che si avverino gli n criterii già notati. Analoghe conclusioni valgono relativamente all' altre variabili primitive u, z, etc. Ora conosciute le derivate parziali di V (70) si può ridurre la ricerca dell' integrale n^{esimo} di $V_n dx^n$ a quella d' integrare la formula del prim' ordine dV, ed applicando all' uopo il metodo oggidì adottato dagli Analisti si otterrebbero le stesse formule d' integrazione (46) (66), ma si avrebbe altresì un nuovo mezzo forse più comodo di riconoscere l' integrabilità della formula $V_n dx^n$. Imperocchè il teorema del Poisson già enunciato nel modo più generale, in seguito alla formula (66), si estende del pari alle funzioni di prim' ordine a più variabili. Il pieno svolgimento di simili indagini verrà esposto in altra Memoria sulla integrazione delle funzioni a più variabili del prim' ordine, e sul modo di dedurne l' integrale replicato d' una funzione d' ordine qualunque.

Rimane infine a soggiungere qualche esempio di applicazione delle due formule generali (46) (66) onde sperimentarne il grado di utilità in paragone degli altri metodi, e principalmente di quello suggerito dal Bertrand, e delle formule del Poisson e di J. Binet, le quali, benchè con lieve modificazione si possano applicare all' immediata ricerca dell' integrale n^{esimo} di $V_n dx^n$, inducono talora in operazioni più laboriose di quelle richieste dal metodo del Bertrand, che consiste nell' esprimere y, u, etc. in funzione della x con un sufficiente numero di costanti da eliminarsi dopo di aver eseguito l' integrazione della data formula rapporto alla variabile x.

I. Assumiamo la formula

$$(2x+y^2)\,dx+(2xy-1)\,dy+x\frac{d^2y}{dx}+x^2\frac{d^3y}{dx^2}$$

integrata dal Bertrand (*Journal de l' École polytechnique*, C. XXVIII), e trattata anco dal Moigno (*Leçons de calcul*, T. II, pag. 557).

Per le posizioni (1) essa diviene

$$(2x+y^2+2xyy_1-y_1+xy_2+x^2y_3)\,\mathrm{d}x=V_1\mathrm{d}x\,,$$

e si ha quindi

$$\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y}\right)=2y+2xy_1\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_1}\right)=2xy-1\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_2}\right)=x\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_3}\right)=x^2,$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_2}\right)-\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_3}\right)=-x\,,\quad \left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_1}\right)-\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_2}\right)-\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_3}\right)\right\}=2xy\,,$$

ed infine

$$\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y}\right)-\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_1}\right)-\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_2}\right)-\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_3}\right)\right\}\right\}=0\,;$$

cosicchè si trova adempiuta la condizione (16) per cui la data formula $V_1\mathrm{d}x$ ammette un integrale primo.

Si avrà poscia (66) per espressione di questo integrale assumendo (4) $\varphi=0$

$$\int_0\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_3}\right)\mathrm{d}y_2+\int_0\left\{\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_2}\right)-\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_3}\right)\right\}_{(1)}\mathrm{d}y_1$$

$$+\int_0\left\{\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_1}\right)-\frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_2}\right)+\frac{1}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_3}\right)\right\}_{(2)}\mathrm{d}y+\int V^{(\prime)}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0 x^2\,\mathrm{d}y_2-\int_0 x\mathrm{d}y_1+2\int_0 xy\mathrm{d}y+2\int x\mathrm{d}x=x^2y_2-xy_1+xy^2+x^2+\text{cost.},$$

cioè (1)

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy^2+x^2+\text{cost.}$$

Alla stessa guisa procederebbe l' applicazione della (46).

II. Sia data la funzione

$$\frac{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)^{\frac{1}{2}}}{(\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\mathrm{d}^2x)^2}\left\{3(\mathrm{d}x\mathrm{d}^2x+\mathrm{d}y\mathrm{d}^2y)(\mathrm{d}x\mathrm{d}^2y-\mathrm{d}y\mathrm{d}^2x)-(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)(\mathrm{d}x\mathrm{d}^3y-\mathrm{d}y\mathrm{d}^3x)\right\}$$

la quale ha un preciso significato, in quanto ponendovi $\mathrm{d}x$ costante, e poscia

restituendola alla supposizione del dx variabile, mediante le formule del cangiamento della variabile indipendente, cioè

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y_2-y_1\frac{d^2x}{dx^2},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=y_3-y_1\frac{d^3x}{dx^3}-3\left(y_2-y_1\frac{d^2x}{dx^2}\right)\frac{d^2x}{dx^2},$$

essa ritorna alla sua forma anteriore.

Pertanto intraprendendone l'integrazione nell'ipotesi del dx costante, per cui la data formula si riduce (1) all'espressione

$$(1+y_1^2)^{\frac{1}{2}}\left\{3y_1-(1+y_1^2)\frac{y_3}{y_2^2}\right\}dx=V_1dx,$$

avremo

$$\left(\frac{dV_1}{dy}\right)=0,\quad \left(\frac{dV_1}{dy_1}\right)=3(1+y_1^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{3y_1^2}{(1+y_1^2)^{\frac{1}{2}}}-\frac{3(1+y_1^2)^{\frac{1}{2}}y_1y_3}{y_2^2},$$

$$\left(\frac{dV_1}{dy_2}\right)=\frac{2(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}y_3}{y_2^3},\quad \left(\frac{dV_1}{dy_3}\right)=-\frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2^2},$$

$$\left(\frac{dV_1}{dy_2}\right)-\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_1}{dy_3}\right)=\frac{3(1+y_1^2)^{\frac{1}{2}}y_1}{y_2},\quad \left(\frac{dV_1}{dy_1}\right)-\frac{1}{dx}d\left\{\left(\frac{dV_1}{dy_2}\right)-\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_1}{dy_3}\right)\right\}=0;$$

e in conseguenza trovasi soddisfatto il criterio d'integrabilità (16), e si ha per espressione dell'integrale primo (46), assumendo $\varphi=\frac{1}{2}ax^2$, onde φ'' non si riduca a zero, e quindi $V_1^{(1)}$ non divenga infinita, essendo allora $V_1^{(1)}=3a(1+a^2x^2)^{\frac{3}{2}}xdx$,

$$\int_{ax}\left\{\left(\frac{dV_1}{dy_2}\right)-\frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_1}{dy_3}\right)\right\}_1 dy_1+\int_a\left(\frac{dV_1}{dy_3}\right)_2 dy_2+\int V_1^{(1)}dx$$

$$=\frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}-\frac{(1+a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}+\frac{(1+a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}-\frac{(1+a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a}+\frac{(1+a^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{a}+\text{cost.}$$

$$=\frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2}+\text{cost.}=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y}+\text{cost.}$$

Riferendo questa formula alla supposizione del dx variabile si ottiene

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y-dyd^2x}+\text{cost.}$$

per integrale della funzione dapprima proposta. Ad un simile calcolo guiderebbe l'uso della (66). Si potrebbe pure integrare quella funzione, senza ricono-

scere se abbia un preciso significato, introducendo l' elemento dt costante d'una variabile ausiliaria, ed eseguendo le integrazioni relative ad x, y ed alle loro derivate x_1, x_2, y_1, y_2 rapporto a t, secondo le stesse norme da cui si dedussero le (46) (66).

Non deesi omettere a questo luogo l' osservazione, che ove sia noto essere differenziale esatta d' ordine n una data formula, può tornare agevole il metodo pratico d' intraprendere l' integrazione parziale accennata dalla 1.ª delle equazioni (47), senza fissarne l' origine. Imperocchè assumendo

$$\int^n V_n \mathrm{d}x^n = \int \left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{n+p}}\right) \mathrm{d}y_p + \alpha,$$

e differenziando totalmente n volte potrà accadere che $\mathrm{d}^n\alpha$ abbia un' espressione molto semplice, e talvolta riducasi a zero, nel qual ultimo caso si avrebbe

$$\alpha = c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \ldots + c_{n-1} x + c_n,$$

essendo c_1, c_2, ... c_n le n costanti arbitrarie che rendono l' integrale completo. Così nel precedente esempio II dal differenziare l' eguaglianza

$$\int V_1 \mathrm{d}x = \int \left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_3}\right) \mathrm{d}y_2 + \alpha = \frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2} + \alpha$$

risulta $\mathrm{d}\alpha = 0$, e quindi come sopra

$$\int V_1 \mathrm{d}x = \frac{(1+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{y_2} + \text{cost.}$$

III. Abbiasi

$$V_3 \mathrm{d}x^3 = \frac{2y\mathrm{d}^3y + 6\mathrm{d}y\mathrm{d}^2y}{u} - \frac{y^2\mathrm{d}^3u + 6y\mathrm{d}y\mathrm{d}^2u + 6(y\mathrm{d}^2y + \mathrm{d}y^2)\mathrm{d}u}{u^2} + \frac{6y(y\mathrm{d}^2u + 2\mathrm{d}y\mathrm{d}u)}{u^3}\mathrm{d}u$$

$$- \frac{6y^2\mathrm{d}u^3}{u^4} - \frac{2x\mathrm{d}^3u + 3\mathrm{d}x\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}x - \frac{x(u\mathrm{d}^4u - 3\overline{\mathrm{d}^2u}^2) + 3u\mathrm{d}x\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}u^2}\mathrm{d}u$$

$$+ \frac{6ux\mathrm{d}x\mathrm{d}^2u\mathrm{d}^3u + 6u\overline{\mathrm{d}^2u}^2\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}u^3} - \frac{6ux\mathrm{d}x\overline{\mathrm{d}^2u}^3}{\mathrm{d}u^4},$$

per cui (1)

$$V_3 = \frac{2yy_3 + 6y_1y_2}{u} - \frac{y^2u_3 + 6yy_1u_2 + 6(yy_2 + y_1^2)u_1}{u^2} + \frac{6y^2u_1u_2 + 12yy_1u_1^2}{u^3} - \frac{6y^2u_1^3}{u^4}$$

$$- \frac{2xu_3 + 3u_2}{u_1} - \frac{x(uu_4 - 3u_2^2) + 3uu_3}{u_1^2} + \frac{6uu_2(xu_3 + u_2)}{u_1^3} - \frac{6xuu_2^3}{u_1^4},$$

e posta (4) $\varphi = 0$

$$V_3^{(1)} = - \frac{2xu_3 + 3u_2}{u_1} - \frac{x(uu_4 - 3u_2^2) + 3uu_3}{u_1^2} + \frac{6uu_2(xu_3 + u_2)}{u_1^3} - \frac{6xuu_2^3}{u_1^4},$$

indi, posta (27) $\chi = bx$,

$$V_3^{(2)} = 0.$$

Essendo perciò

$$\left(\frac{dV_3}{dy}\right) = \frac{2y_3}{u} - \frac{2yu_3 + 6(y_1y_2 + y_2u_1)}{u^2} + 12\,\frac{yu_1u_2 + y_1u_1^2}{u^3} - 12\,\frac{yu_1^3}{u^4},$$

$$\left(\frac{dV_3}{dy_1}\right) = \frac{6y_2}{u} - \frac{6yu_2 + 12y_1u_1}{u^2} + 12\,\frac{yu_1^2}{u^3},$$

$$\left(\frac{dV_3}{dy_2}\right) = \frac{6y_1}{u} - \frac{6yu_1}{u^2}, \qquad \left(\frac{dV_3}{dy_3}\right) = \frac{2y}{u},$$

le tre condizioni (22) relative ad y, onde $V_3 dx^3$ sia differenziale terza esatta, cioè

$$\left(\frac{dV_3}{dy_2}\right) - \frac{3}{dx}d\left(\frac{dV_3}{dy_3}\right) = 0, \quad \left(\frac{dV_3}{dy_1}\right) - \frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_3}{dy_2}\right) = 0, \quad 3\left(\frac{dV_3}{dy}\right) - \frac{1}{dx}d\left(\frac{dV_3}{dy_1}\right) = 0,$$

si trovano soddisfatte.

Così pure avendosi

$$\left(\frac{dV_3^{(1)}}{du}\right) = - \frac{xu_4 + 3u_3}{u_1^2} + \frac{6u_2(xu_3 + u_2)}{u_1^3} - \frac{6xu_2^3}{u_1^4},$$

$$\left(\frac{dV_3^{(1)}}{du_1}\right) = \frac{2xu_3 + 3u_2}{u_1^2} + \frac{2x(uu_4 - 3u_2^2) + 6uu_3}{u_1^3} - 18\,\frac{uu_2(xu_3 + u_2)}{u_1^4} + 24\,\frac{xuu_2^3}{u_1^5},$$

$$\left(\frac{dV_3^{(1)}}{du_2}\right) = - \frac{3}{u_1} + \frac{6xu_2}{u_1^2} + \frac{6xuu_3 + 12uu_2}{u_1^3} - 18\,\frac{xuu_2^2}{u_1^4},$$

$$\left(\frac{dV_3^{(1)}}{du_3}\right) = - \frac{2x}{u_1} - \frac{3u}{u_1^2} + \frac{6xuu_2}{u_1^3}, \qquad \left(\frac{dV_3^{(1)}}{du_4}\right) = - \frac{xu}{u_1^2},$$

si troveranno adempiute anco le tre condizioni (32) relative ad u cioè

$$\left(\frac{\mathrm{d}V_3^{(1)}}{\mathrm{d}u_2}\right) - \frac{3}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}V_3^{(1)}}{\mathrm{d}u_3}\right) - \frac{2}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_3^{(1)}}{\mathrm{d}u_4}\right)\right\} = 0,$$

$$3\left(\frac{\mathrm{d}V_3^{(1)}}{\mathrm{d}u_1}\right) - \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left\{4\left(\frac{\mathrm{d}V_3^{(1)}}{\mathrm{d}u_1}\right) - \frac{3}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_3^{(1)}}{\mathrm{d}u_3}\right)\right\} = 0,$$

$$6\left(\frac{\mathrm{d}V_3^{(1)}}{\mathrm{d}u}\right) - \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left\{3\left(\frac{\mathrm{d}V_3^{(1)}}{\mathrm{d}u_1}\right) - \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_3^{(1)}}{\mathrm{d}u_2}\right)\right\} = 0.$$

Verificate queste condizioni, si ottiene dalla (66) ovvero dalla (68)

$$\int^3 V_3 \mathrm{d}x^3 = \int_0 \left(\frac{\mathrm{d}V_3}{\mathrm{d}y_3}\right)\mathrm{d}y + \int_b \left(\frac{\mathrm{d}V_3^{(1)}}{\mathrm{d}u_4}\right)\mathrm{d}u + \int_{bx}\left\{\left(\frac{\mathrm{d}V_3^{(1)}}{\mathrm{d}u_3}\right) - \frac{3}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_3^{(1)}}{\mathrm{d}u_4}\right)\right\}_{(1)} + \int^3 V_3^{(2)}\mathrm{d}x^3$$

$$= \frac{y^2}{u} + \frac{xu}{u_1} - \frac{xu}{b} + \int_{bx}\frac{x}{b}\mathrm{d}u + c_1x^2 + c_2x + c_3$$

$$= \frac{y^2}{u} + \frac{xu}{u_1} + Cx^2 + c_2x + c_3,$$

essendo C, c_2, c_3 le tre costanti arbitrarie che rendono l'integrale completo.

Come si scorge da questi esempii, il calcolo più laborioso è quello della verificazione de' criterii d'integrabilità. Ma nell'esempio III il calcolo sarebbe stato più lungo, se in luogo delle (22) si fossero adoperate le ordinarie condizioni (18). Non tralascieremo però di ripetere l'avvertenza premessa a queste applicazioni, che riducendo immediatamente l'integrale n^{esimo} di $V_n\mathrm{d}x^n$ a dipendere dall'integrazione di $\mathrm{d}V$, si può agevolare maggiormente la verificazione dell'integrabilità di $V_n\mathrm{d}x^n$, riservandoci a trattare di simile quistione sotto questo nuovo aspetto nella Memoria dianzi indicata.

IV. Sia data in ultimo luogo (posta e la base de' logaritmi iperbolici)

$$V_1\mathrm{d}x = \frac{2(5x^m - 2e^y)\{\mathrm{d}^2u\mathrm{d}^3z(y\mathrm{d}^5v + \mathrm{d}y\mathrm{d}^4v) - y\mathrm{d}^4v(\mathrm{d}^2u\mathrm{d}^4z + \mathrm{d}^3u\mathrm{d}^3z)\}}{(y\mathrm{d}^4v\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}^2u\mathrm{d}^3z)^2}\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{4e^y\mathrm{d}y\,\mathrm{d}^2u\,\mathrm{d}^3z + 5mx^{m-1}y\,\mathrm{d}x^2\mathrm{d}^4v}{y\mathrm{d}^4v\,\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}^2u\mathrm{d}^3z},$$

per cui (1)

$$V_1 = \frac{2(5x^m - 2e^y)}{(yv_4 + 2u_2z_3)^2}\{u_2z_3(yv_5 + y_1v_4) - yv_4(u_2z_4 + u_3z_3)\} + \frac{4e^y y_1u_2z_3 + 5mx^{m-1}yv_4}{yv_4 + 2u_2z_3}.$$

Verificata la condizione relativa alla y (18)

$$\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y}\right) - \frac{1}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_1}\right) = 0\,,$$

e posta (4) $\varphi = 0$, si avrà $V_1^{(1)} = 0$, cosicchè non sarà mestieri di soddisfare a verun' altra condizione riguardo ad u, z, v.

Essendo pòi

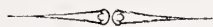
$$\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_1}\right) = \frac{2(5x^m - 2e^y)\,u_2z_3v_4}{(yv_4 + 2u_2z_3)^2} + \frac{4\,e^y u_2z_3}{yv_4 + 2u_2z_3}\,,$$

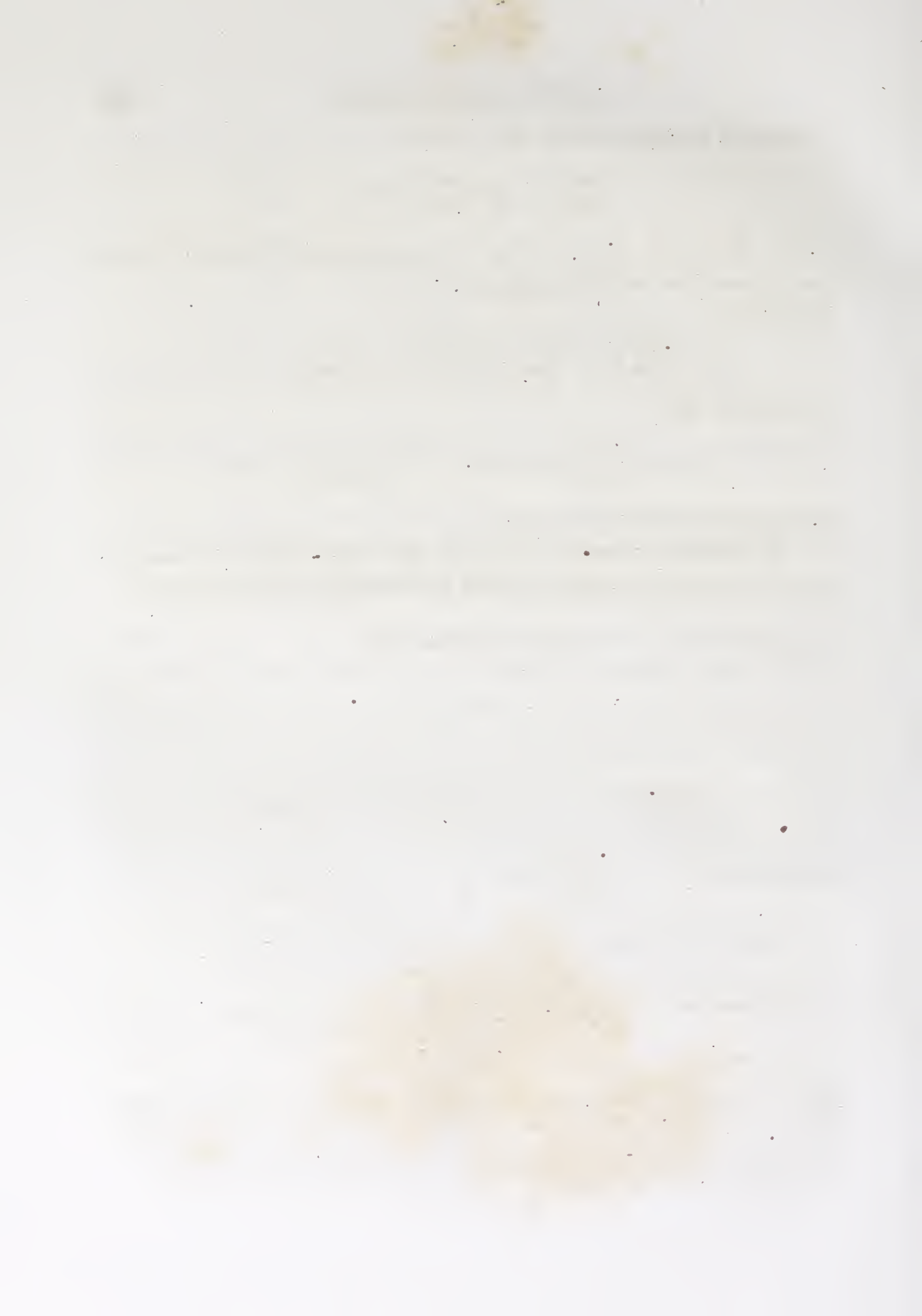
si avrà tosto (66)

$$\int V_1\mathrm{d}x = \int_0\left(\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}y_1}\right)\mathrm{d}y + \text{cost.} = \frac{4\,e^y u_2z_3 + 5x^m yv_4}{yv_4 + 2u_2z_3} + C$$

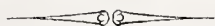
per espressione dell' integrale cercato.

Si potrebbero accumulare gli esempii. Ma il saggio offerto può essere bastevole ad accennare le applicazioni delle teorie proposte in questa Memoria.

(*Letta il* 21 *dicembre* 1856).

	ERRATA	CORRIGE
Pag. 477, formula (5)	$\int_{\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha_p}{\mathrm{d}y_p}\right)\mathrm{d}y_p$	$\int_{\varphi^{(p)}}\left(\frac{\mathrm{d}\alpha_p}{\mathrm{d}y_p}\right)\mathrm{d}y_p$
» » form. preced. la (8)	$\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y_i}\right)$	$\frac{1}{\mathrm{d}x_3}\mathrm{d}^3\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y_i}\right)$
» 487, ultima linea	$\int_{\varphi'}\left(\frac{\mathrm{d}^2\alpha_1}{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_i}\right)$	$\int_{\varphi'}\left(\frac{\mathrm{d}^2\alpha_1}{\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_i}\right)\mathrm{d}y_1$
» 488, form. (24)	$\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y}\right) - \frac{n}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_1}\right) + \frac{n(n+1)}{2\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_2}\right)$ etc.	$\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_n}\right) - \frac{n}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{n+1}}\right) + \frac{n(n+1)}{2\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}^2\left(\frac{\mathrm{d}V_n}{\mathrm{d}y_{n+2}}\right)$

SUL

CREDITO FONDIARIO

MEMORIA SECONDA

DEL M. E. PROF. BALDASSARE POLI

PARTE I.

Delle istituzioni del credito fondiario di soli proprietari.

A prepararci con senno e maturità di giudizio al progetto d'una società di credito fondiario che provvegga a' casi nostri, e venga in soccorso della nostra agricoltura; a non affaticarci con vani sforzi in cimentarne la prova, siccome di cosa per noi aliena o nuovissima, ad essere condotti con vera cognizione di causa alla scelta di una infra le molte, la quale ci accomodi davvero, e soddisfi interamente allo scopo, io credo giovevole e savio consiglio quello di passare a rassegna innanzi tutto le principali istituzioni di credito fondiario che già esistono in Europa, e quelle puranco che s'additano per le più opportune all'Italia, pel modo stesso già da me tenuto nella prima memoria per quelle di Francia (1): sì perchè a tale rassegna ne verrà fatto di avvantaggiarci nella futura costituzione delle nostre; sì perchè dallo studio accurato e profondo delle cose degli estrani s'apprende meglio quello che c'è da trapiantare e maturare tra noi; sì perchè infine coll' esame attento di queste istituzioni là dove già nacquero e si mostrano tanto fortunate ed operative, si fanno studi preparatori ed acconci a pigliarvi pratica e dimestichezza, a poterne maneggiare con destrità le ragioni, a valutare le cause per le quali vennero introdotte, ed a far in

(1) Memoria I.ª sul Credito fondiario.

modo da renderle anco per noi proficue e fruttuose. Oltracciò darebbe sentore d' orgoglio o d' ingratitudine il mettere da banda la sapienza e gl' intendimenti de' primi istitutori del credito fondiario, e la prova che ne fecero già le più culte nazioni; ed avrebbesi il mal nome di temerità e di presunzione chiunque volesse andar solo, quando si può andar meglio in compagnia, o si studiasse di venire all' atto e all' operamento ignorando il già fatto, o disdegnando l' altrui esperienza per attenersi solamente alla propria. Il perchè anche questa seconda memoria sul credito fondiario io intendo pur di dedicarla tutta alla rivista delle sue principali istituzioni già note, nella fiducia ch' essa servirà non ch' altro a mostrare esserci d' uopo, se non di uscire, di scegliere tra queste strade per arrivare a buon termine nel nostro cammino. Ne è mio divisamento per tanto di tessere qui la storia di tutte quante le istituzioni di un tal credito, e meno poi di rivederle ad una ad una; chè ciò sarebbe opera noiosa ed infinita, ma di sottoporre a disamina soltanto le principali, e tra queste quelle che più tra sè si dissomigliano; poichè per queste poche si renderanno note tutte le rimanenti, delle quali mi fossi taciuto. Dopo le quali premesse sarà più facile eziandio e più naturale il passare con una terza memoria a quella qualunque siasi istituzione di credito fondiario, che per mio avviso starebbesi bene alle Venete Provincie.

Per quanto sieno varie di numero e di qualità e di nome tutte le istituzioni di credito fondiario, che finora si stabilirono in Europa, e di cui parlano a distesa le opere di *Royer,* di *Josseau*, del Piemontese di *Salmour* e di *Barre*, esse si possono comodamente ripartire in due grandi gruppi. Il primo è di quelle che hanno per base il credito reale o fondiario, e quindi offrono beni proprii a guarentigia dei mutui, e che si formano di soli proprietarii e possidenti, od anche di capitalisti. Tali sono le associazioni territoriali e fondiarie di Prussia, di Sassonia, del Witemberg, della Polonia e di tutta quanta la Germania, della Baviera e del Belgio. Il secondo è di quelle che si reggono sul credito personale od anche mobile, e quindi non si servono del credito fondiario che per sostenere gl' impegni dell' associazione. Queste sono le *Banche* o Casse agrarie o degli agricoltori di Russia, di Scozia e d' Irlanda. Seguitando ora tale partizione delle istituzioni del credito fondiario che è molto diversa da quella che già seguii nella prima Memoria; poichè questa si appoggia ad un fondamento storico e positivo, e quella ad uno piuttosto filosofico e razionale, verrò discorrendo prima delle specie o sorta d' istituzioni di credito fondiario che si

denominano e si conservano propriamente tali, e poscia delle altre che si chiamano più precisamente Società o Banche agrarie o per gli agricoltori, mostrandone sì delle une che delle altre i principii e le ragioni fondamentali, il meccanismo e l'organizzazione, ed anco gli effetti o le conseguenze, e soggiungendovi all'ultimo quelle *osservazioni* che ne dimostrino più o meno la ragionevolezza e la praticabilità per il nostro paese.

Le istituzioni di credito fondiario propriamente dette, o che hanno per base il credito soltanto reale ed ipotecario sebbene non varieggino quasi mai di natura, pure diversificano moltissimo tra di loro, secondo che un cosifatto credito giova più o meno direttamente ai proprietarii ovvero ai capitalisti. Egli è perciò che anche storicamente parlando, cotali istituzioni si suddividono in due altre classi o specie subalterne, cioè in quelle dei *proprietarii* o mutuatari, ed in quelle dei mutuanti o *capitalisti.* Le prime hanno preceduto alle seconde: quelle sono le associazioni territoriali della Prussia, della Sassonia, della Gallizia e del Wirtemberg; e queste le Banche o Casse ipotecarie della Baviera e del Belgio. Tra le une primeggia l'associazione territoriale di Pomerania, e tra le altre la Banca ipotecaria di Monaco e della Baviera, la Cassa dei proprietarii e la Banca fondiaria di Brusselles o del Belgio.

Le istituzioni di credito fondiario, siano pure o di soli proprietarii, o di soli capitalisti, od anche degli uni e degli altri, ossia miste, altro non sono per loro essenza e natura che tante società libere o forzate di credito collettizio, che sotto l'azione più o meno immediata dello Stato ricevono o prestano capitali a mutuo con ipoteca per mezzo di cedole o lettere di pegno, e da estinguersi ad arbitrio od obbligatoriamente in tante piccole annualità e col sistema dell'amortizzazione allo scopo d'impedire l'espropriazione e la divisione dei fondi e delle terre, e di offrire un rimborso comodo e al minimo dell'interesse dei capitali a beneficio dei proprietarii, o dell'agricoltura. Quindi il loro *meccanismo* tutto consiste, — 1) nella unione volontaria o forzata dei proprietarii di terre o di capitalisti d'una data Provincia, che figurino o da semplici mutuanti o mutuatarii, ovvero da mutuanti e mutuatarii insieme; — 2) nei mutui con una ipoteca generale o collettiva, ed anco speciale o individuale; — 3) nell'emissione e nel giro delle lettere di pegno per una parte rappresentative del valore del suolo o della terra, come titoli ipotecarii, e per l'altra come segni o

simboli dei capitali o mutui assicurati su quella; — 4) nel rimborso volontario od obbligatorio de' mutui col sistema dell' ammortizzazione o colla regola degli interessi composti, e quindi a lungo tratto di tempo; — 5) nel pagamento in picciole annualità complessive dell' interesse e del capitale a sollievo e comodo dei debitori, — siccome la loro *ragione* è riposta nel doppio scopo di pubblica utilità, di liberare cioè la terra dalle gravezze dell' usura, e di promuovere i grandi miglioramenti della sua produzione. Esse poi sono *pubbliche* o dello Stato, oppure soltanto *private* secondo il maggiore o minor grado d' ingerenza e di azione che vi piglia lo Stato medesimo; ma siccome tale ingerenza od azione non ne altera nè il modo nè l' essenza, così in generale esse sono pressochè tutte private. Esse infine diconsi *fondiarie, ipotecarie* e *territoriali,* e perchè hanno sempre per base l' ipoteca, e perchè non si effettuano senza il concorso delle terre o dei beni-fondi, e perchè tendono alla prosperità ed alla conservazione della proprietà fondiaria. Se non che le istituzioni del credito fondiario non ebbero tutte ad un tratto il pieno loro sviluppo, nè poterono sortire di subito tutta questa loro organizzazione, che per quanto semplice e regolare apparisca, pure non resta di essere complicata e difficile, e d' aver abbisognato del tempo innanzi di giungere alla presente perfezione. — Queste istituzioni di fatto incominciarono col ricevere a prestito capitali guarantiti collettivamente dai beni de' nobili proprietarii d' una Provincia, d' un Circolo, dando fuori le proprie obbligazioni con lettere di pelle e di pergamena, e lasciando libero ai debitori la restituzione del capitale purchè fosse puntuale ed indeficiente il pagamento degl' interessi. Indi crebbero e si dilatarono col sistema del contraccambio o della mutuazione, onde i debitori stessi divennero socii e compartecipi del dividendo comune e sociale, e coll' estinzione od ammortizzazione graduale e forzata del capitale la mercè d' una piccola annualità oltre a quella degl' interessi; e all' ultimo finirono al sistema delle Banche formate per azioni con un fondo di riserva in contante, e fatte non solo per sovvenire ai bisogni dell' agricoltura, ma benanco per concorrere a tutte le operazioni del cambio e del commercio. Per ciò le istituzioni di credito fondiario da semplici società intermediarie o intromettitrici che erano nel loro nascere tra i capitalisti e proprietarii, diventarono in appresso società di proprietarii o di capitalisti esse medesime, trasformandosi alla fine in vere Banche di sconto e di giro sebbene rivolte sempre principalmente al grande scopo di giovare alla proprietà fondiaria, e di promuovere i miglioramenti dell' agricoltura. Tale è in breve la istoria del credito fondiario in

tutta Europa, se si eccettuino l'Inghilterra e l'Italia; l'una perchè non ne abbisogna, e l'altra perchè non lo conosce se non da pochi anni fa. Ora tenendomi anch'io a questa storia verrò discorrendo partitamente le specie e forme principali di cotesta istituzione per farne conoscere la più intima organizzazione, i principii e le conseguenze, e per recarvi sopra a quando a quando que' ragionamenti che valgano ad anticipatamente istruirci sulla sua maggior convenienza ed applicabilità alle nostre ciscostanze (1).

La Prussia come fu la prima inventrice delle istituzioni di credito fondiario sotto il nome di *Associazioni territoriali*, così ne è eziandio la più ricca posseditrice. Essa vanta sei di queste associazioni distribuite nelle otto Provincie del suo Regno con un'amministrazione separata e centrale nel Capo-luogo d'ogni Provincia. L'associazione però tipica e veramente normale di quel Regno è quella della Pomerania, il cui Statuto fu rinnovato nel giugno, 16 marzo 1846. Essa fu stabilita ed organizzata dal Governo medesimo e sovvenuta del danaro per la sua prima istituzione, ma ora possiede un fondo sociale proprio. Quest'associazione è formata da tutti i proprietarii della Provincia abbianvi o no interesse, e ciò in virtù del suo privilegio che data sino dal 13 marzo 1781. Essa riceve capitali limitatamente al bisogno al 3 $^1/_2$ p. $^0/_0$, e fino alla somma di 100 taleri, e li presta ai soli proprietarii al 4 p. $^0/_0$ col diritto fisso di $^1/_6$ p. $^0/_0$ a titolo di tassa per la quitanza, e per mezzo di lettere di pegno girabili, il cui rimborso non è mai esigibile, ma soltanto facoltativo e volontario. Quali segni o simboli de' capitali o ricevuti o prestati consegna a' mutuanti ed ai mutuatarii e nel corrispondente valore tante *lettere di pegno* al presentatore da 200 sino a 1000 taleri divisibili per 100, portanti interesse, spontaneamente pagabili a sei mesi d'avviso, e che hanno l'aggiunta di 10 *coupons* che rappresentano gl' interessi semestrali percepibili per 5 anni. I mutuatarii versano il pagamento di questi interessi per i primi alle casse dell'associazione dal 16 al 24 giugno, dal 16 al 24 dicembre d'ogni anno, e poscia l'associazione paga quelli ch'ella deve ai mutuanti o presentatori delle lettere di pegno in un tempo posteriore, cioè dal 24 giugno al 2 gennajo: talchè essa con una specie di costante e perpetuo giro si serve degli interessi incassati da' suoi debitori per passarli cui deve

(1) Chi vuol conoscere il perchè l'Inghilterra non abbisogni finora delle istituzioni di credito fondiario può leggere l'opera del *Josseau*, Cap. XX, pag. 487.

o come suoi capitalisti o come suoi creditori. Ecco come e perchè una tale associazione per questo giro o passaggio continuo da una mano all' altra si qualifichi per una agenzia intermedia ed intromettitrice tra il capitalista ed il proprietario. Se non che l' emissione o spedizione delle lettere di pegno non ha luogo se non quando sia già avvenuta ed accettata la valutazione definitiva del fondo sul quale debbono essere assicurate, e ne sia stata fatta espressa domanda e il fondo da ipotecarsi per quelle porti con sè le condizioni di prima ipoteca. Queste lettere di pegno sono titoli ipotecari iscritti, che indipendentemente dalla gravezza sull' intero capitale sociale, hanno l' ipoteca speciale sul fondo particolarmente impegnato nel mutuo, e quella generale su tutti i fondi de' proprietarii della Provincia di Pomerania, che conservano con eguale ordine e grado qualunque sia la data della loro iscrizione ed emissione, che si negoziano alla borsa, e passano da uno all' altro senza indossamento e senza cessione, e che vengono rimborsate o riscattate o dalla società o da ciascun proprietario debitore, mediante la denunzia di pagarle in ispecie ed al valore nominale dentro sei mesi, e per parte della società mediante la estrazione a sorte. Per lo che in tale associazione l' individualità del mutuatario interamente disparisce e viene sostituita dalla comunanza, o da un' individualità sociale e collettiva. Il capitalista non ha che fare col suo debitore o col mutuatario, non è esposto a' timori, od a' pericoli per insolvibilità o per fallimento, riscuote il suo direttamente dall' associazione come sua debitrice. Del paro, il mutuatario sorregge il proprio credito personale con quello di tutta la società, nasconde il suo bisogno all' usura, nè conosce nemmeno di persona il suo creditore o sovvenitore, può realizzare egli stesso quando che sia le lettere di pegno anche in contante, ed alla pari, giacchè accade bene spesso ch' esse facciano agio e si tengano più alte di prezzo della stessa rendita dello stato. In caso di mora o di ritardo al pagamento degl' interessi per parte dei mutuatari o debitori l' associazione non fa che darne nota al Commissario d' esecuzione del Tribunale Superiore, ed ottiene subito il sequestro dei mobili e dei frutti del debitore, od il possesso o la subasta anche dei fondi ipotecati; o se così crede, può fare invece un prestito a rischio e pericolo del debitore od accettare la ricognizione o l' assegnamento di un capitalista che anticipa per lui gli interessi scaduti oppure correnti. Il creditore o prestatore del capitale percepisce con puntualità direttamente dalla associazione i semestrali interessi, il pagamento del suo credito in ispecie ed a sua scelta colla denunzia e col riscatto delle lettere di pegno delle quali è possessore, o col cambio di altre nuove lettere di pegno,

ove cresca l' ammortizzazione per modo da non averne più tante in natura da soddisfare a tutte le dimande del riscatto. Il fondo dell' associazione territoriale conferisce alle spese di amministrazione, all' anticipazione degl' interessi arretrati, al ristoro dei fondi ipotecati e che sono sotto sequestro, e a tutte le altre spese non prevedute; e questo fondo si compone dei 200,000 talleri che le donò il re Federico II all' epoca della sua creazione, e della provisione di quittanza in ragione di $^1/_6$ p. % che pagano i mutuatari semestralmente assieme agli interessi del capitale. Questa associazione ha altresì una cassa depurata dei *depositi* per le lettere di pegno che i proprietari o mutuatari stessi vogliono denunciare ed ammortizzare col pagamento parziale od intero del mutuo, sia mediante danaro, sia mediante lettere di pegno già scadute, oppure mediante altri valori. L' amministrazione di questa società territoriale (*Landschaft*) è affidata ad una direzione generale, e ad un commissario del re, che ne è il presidente, ed a quattro direzioni dipartimentali con quattro collegi pure dipartimentali che hanno dimora in varie città della provincia. La direzione generale ha stanza in Stettino, ed un Comitato speciale si raduna in questa stessa città una volta all' anno. L' assemblea generale di tutti i proprietari soci non si raccoglie a Stettino che in straordinarie occasioni. Ogni direzione dipartimentale si compone di un direttore e di due consiglieri, d' un sindaco o consigliere giudiziario e del personale d' ufficio. Il collegio dipartimentale formato dai deputati eletti in ciascun circolo, ed insieme alla direzione dipartimentale, costituisce il collegio di dipartimento. Tutti i soci proprietari sono elettori, ed ogni membro della direzione o del collegio dipartimentale è pure membro dell' associazione. La direzione dipartimentale tiene le adunanze dei collegi annuali, si assembra per l' emissione delle lettere di pegno, rivede i conti, esamina lo stato delle casse, accetta le dimande de' futuri associati, determina la stima e la valutazione dei fondi da ipotecarsi, sorveglia ed incoraggisce la diffusione del credito fondiario, rappresenta la società in concorso dei terzi, amministra i fondi della società, e sostiene le sue parti in giudizio, invigilando alla coltivazione ed all' acconciamento dei terreni, e sopra tutto al niun deterioramento del loro valore già assoggettato ad ipoteca, ed invocando l' assenso del collegio dipartimentale in tutti gli affari straordinari, e ne' quali richiedesi la rappresentanza dei membri o soci interessati. Al sindaco spettano tutti gli affari legali, e specialmente l'esame dei certificati ipotecari e della capacità dei contraenti, della sicurezza dei mutui e delle lettere di pegno. La direzione generale è costituita da un direttore generale, dai membri eletti e dai deputati di dipartimento

col titolo di consiglieri generali, e che devono essere nobili, e da un sindaco od avvocato pure generale. Essa stassi alla cima od alla testa dell' amministrazione dell' associazione territoriale, nomina impiegati e funzionari, emana tutti gli ordini secondo lo statuto alle direzioni dipartimentali, e decide inappellabilmente dentro i limiti dello statuto. Alle direzioni di questa associazione è data facoltà di mandare ad effetto le proprie decisioni per via di ammende o multe, del richiamo o riscatto forzato del capitale e dei frutti, del sequestro dei soli frutti, o della vendita del fondo, ed i tribunali sono obbligati a prestarvi mano qualora ne sieno richiesti (1).

Considerando impertanto l' indole ed il meccanismo dell'associazione fondiaria della Pomerania, siccome quella che da pochi anni venne rinnovata e rinsaldata, e che io tolsi a modello delle altre, scorgesi ad un tratto com'essa sia fondata sui principii:

1) Dell' associazione necessaria forzata od essenzialmente politica, ma di soli proprietari.

2) Dell' intervento diretto dal governo.

3) Del prestito ipotecario al minimo d' interesse.

4) Del prestito con lettere di pegno e senza numerario.

5) Dell' ipoteca prima o speciale, ed anche generale o collettiva.

6) Del rimborso volontario o facoltativo, escluso il sistema dell' ammortizzazione.

7) Della mutuazione o reciprocità.

8) Della giurisdizione propria e privilegiata.

9) Dell' amministrazione centrale ed elettiva.

L' associazione fondiaria di Pomerania innanzi tutto gode della triplice qualità d' essere cioè di soli proprietari, d' essere stata in origine una società necessaria e forzata e dipoi volontaria o libera, d'essere eminentemente politica, od una vera istituzione dello stato o di pubblica utilità. Essa di fatto nacque col reale privilegio dell' anno 1781 a foggia di tutte le altre pubbliche istituzioni, venne limitata ai soli possidenti della provincia e come in quella del Ducato di Posen così ebbesi in vista in questa di disgravare la nobiltà di quegli enormi capitali

(1) Jousseau nell' opera già citata: *Des Instit. de Crèdit foncier, pag.* 117, *Règlement revisé en* 1846 *de la Société de Crèdit foncier de la Pomèranie.*

ed eccessivi interessi che la opprimevano, e di procurarle un credito perenne che la liberasse da indiscreti sovvenitori anche in futuro. Per la qual cosa l'associazione fondiaria Pomeraniese differisce di tanto dalla cassa provinciale di Westfalia e dall' altra cassa di Paderbonn specialmente nello scopo o nell' oggetto; giacchè la cassa di Westfalia non mira ad altro che a procurare ed incoraggire i grandi miglioramenti dell' agricoltura, mentre quella di Paderbonn non si cura che di affrancare le terre dai loro pesi. Egli è evidente pertanto che una cosiffata associazione per l'indole sua propria e per il proprio suo scopo non poteva riuscire ad altro se non che ad una società dei proprietari di quella provincia, siccome quelli cui stava più a cuore la fondazione di un credito perpetuo al fine di procacciarsi vistosi capitali a basso interesse anco per l'avvenire. Se non che per dare a questa società un saldo e ricrescente vigore di vita, massime ne' suoi principii non era prudente di abbandonarla all' incerto e sempre mutabile volere de' privati. Per ciò fu d' uopo che v' intervenisse d'un tratto l' opera efficace e risoluta del Governo col dichiararnela una società necessaria e forzata fra tutti i proprietari nobili della Provincia, e coll' obbligarli tutti a comparticiparvi co' propri fondi. Poscia cresciuta a prosperità ed a consistenza essa potè trasformarsi eziandio in una società libera e volontaria (e ciò avvenne collo statuto dell' anno 1846) aprendone l'adito a qualunque altro proprietario non nobile degli stati di Pomerania che pur bramasse d'impegnarsi o con tutti o con parte de' suoi tenimenti. Con che la istituzione fondiaria Pomeraniese venne a dilungarsi per un altro rispetto da tutte le altre associazioni germaniche di questa specie, le quali si mantengono tuttavia come associazioni libere o come associazioni solamente forzate o necessarie. Ma se tutto questo è buono per una istituzione fondiaria in Prussia od in Germania, non si addirebbe mai a quelle che si volessero introdurre col suo esempio in Italia. Tra noi non si conoscono nè le grandi signorie nè i vasti possedimenti territoriali per diritto di eredità inalienabili, e che vennero in possesso della nobiltà Prussiana e Tedesca, mentre tra noi la proprietà delle terre e dei beni-fondi è divisa e minuzzolata, e sciolta e liberissima ne' suoi commerci, qualunque sia il padrone ed il signore. La stessa associazione forzata dei soli possidenti nobili d'una provincia quanto fu facile ad effettuarsi in Prussia ove essi esistono od esistevano già come tanti stati e corporazioni politiche rappresentative, altrettanto sarebbe difficile ad ottenersi qui, dove v'ha un' infinità di piccoli proprietari al tutto liberi e indipendenti per ogni distretto e per ogni provincia, e quindi incerti e va-

riabili nel pensare e nel volere e sempre ricalcitranti a collegarsi, e tanto più sforzatamente a quell'unità di scopo e d'interesse senza cui una società qualunque non può mai nè reggersi nè fiorire. D'altro canto dove non c'è vista di pubblica ed immediata utilità una società qualunque è volontaria, e qualsiasi costringimento della legge per formarla avrebbesi la taccia di violenza, di sorpruso e di arbitrio. Tanto è vero che nel rinnovato statuto del 1846 la stessa associazione fondiaria di Pomerania fu dichiarata libera per i soci futuri. Tanto è vero che quella del credito fondiario per la Polonia non diventa obbligatoria se non a beneplacito del creditore ipotecario che ha denunziato indarno il suo capitale. Tanto è vero che quella della Galizia Austriaca che servì di modello a molte altre nell' impero d' Austria, non costringe mai i proprietarii ad entrarvi e si rimane del tutto spontanea e volontaria. Dal che s'inferisce dover essere al tutto volontarie le associazioni del credito fondiario, ed il Governo non poterle che preparare od avviare con quelle provvidenze che siano le più attrattive a formarle com' è l' esca dell' interesse o del reciproco ajuto o sostegno. L'essere poi l' istituzione fondiaria di Pomerania al pari di quasi tutte le altre di Germania un' associazione di soli proprietarii, egli è questo un documento gravissimo sulla necessaria relazione che intercede fra queste sorta di società e la condizione civile ed economica del paese a cui si vuole applicarle. Per lo che non sarà mai nè capricciosa, nè arbitraria la loro scelta o preferenza, non adattandosi elleno come l' abito ad ogni corpo o ad ogni persona. L' associazione fondiaria di Pomerania altresì, siccome quella che consta di soli proprietarii, dovette naturalmente atteggiarsi sul credito territoriale sì attivo che passivo pigliando da un canto capitali a mutuo siccome ella stessa ne fosse la debitrice, e prestando dall' altro a' suoi che ne divengono i veri mutuatarii o debitori, com' essa ne è la creditrice. Col quale avvicendamento di credito e di debito, o di mutui attivi e di mutui passivi questa società divenne una specie di cassa o di agenzia che si intermedia tra il capitalista e il proprietario, e che trasferisce dall' uno all' altro il danaro a disgravamento dei pesi ipotecarii sulle terre, e ad anticipazione dei capitali produttivi od atti a fecondarle e rimigliorarle. Ma il carattere ancora più deciso e spiccato che abbiasi una cosiffatta istituzione, egli è quello di non essere una società privata, ma politica tanto per la sua indole, quanto per il suo scopo e per la medesima sua organizzazione; e sotto questo punto di vista l' associazione Pomerianese non dissomiglia gran fatto da tutte le altre non che di Prussia, ma di tutta quanta l' Allemagna a motivo della particolare costituzione

de' suoi stati e delle sue attinenze colla proprietà fondiaria e coi titoli della nobiltà ereditaria. Quindi dalla storia di quest' associazione apparisce che il credito fondiario nelle sue prime origini fu tutto vòlto a conservare la proprietà de' nobili e delle signorie, ed impedire che venisse in basso un ceto politico che dava lustro alla monarchia e ch' era ad un tempo una delle più cospicue rappresentanze dello stato. Se non che non fu pure politico lo scopo o fine dell' istituzione fondiaria Pomerianese, ma la medesima sua organizzazione. Essa comparve in sulle prime quale una società o corporazione privilegiata de' soli nobili, e non è che adesso che possono farne parte i proprietarii appartenenti a qualsivoglia classe della borghesia o di cittadini, purchè siano proprietarii nella provincia. Essa venne stabilita ed attuata per una legge politica o dello stato che la rendette obbligatoria ed esclusiva ai possidenti, e s' appuntò sempre sui due principii della grande proprietà e del suo titolo ereditario, ed ha alla testa non già privati amministratori, ma vere autorità politiche che vengono nominate dal re, e che godono di un' effettiva e legittima giurisdizione nell' emettere carte o lettere circolanti di pegno che si agguagliano a quelle della rendita pubblica, e nell' emanare decreti ed ordinanze di sequestro e di pignoramento, al cui eseguimento debbono prestare mano forte gli stessi tribunali. Per le quali cose mentre l' associazione di Pomerania a riguardo del suo carattere politico s' assomiglia a quelle del Gran Ducato di Posen, del Regno di Polonia e della Galizia, e a tutte quante già esistono nel Nord della Germania, si distingue moltissimo dall' associazione generale del Würtemberg, e da quella di Hannover, in quanto la prima altro non è che una cassa od agenzia di privati che s' intromette per i prestiti ipotecarii a basso interesse, e in quanto la seconda comprende tre specie di operazioni del credito fondiario tra loro ben separate e distinte, quelle cioè del credito fondiario pei nobili, quelle del credito fondiario per le particolari e singole provincie, e quelle del credito fondiario del Governo o dello stato. Ciò premesso, sorge naturale e spontanea la dimanda: Se sia poi conveniente e giusto che lo stato privilegi coteste associazioni di credito fondiario sino al punto di tramutarle in una istituzione politica, come è quella della Pomerania? A questa dimanda è apertissima la risposta. In Prussia fu una necessità od una conseguenza logica il riconoscere le associazioni di credito fondiario siccome tante corporazioni od istituzioni dello stato, ossia politiche. Ivi la rappresentanza e costituzione istorica e civile del regno è quella degli stati provinciali, il cui titolo precipuo e perpetuante è quello della grande proprietà

immobiliare ed inalienabile. Quivi i nobili proprietarii per ordine di primogenitura o per successione feudale entrano negli stati provinciali, e sono i naturali rappresentanti dell'aristocrazia che è un elemento essenziale della politica costituzione. Quivi pertanto era indispensabile che si pensasse seriamente dal Governo medesimo a conservare e mantenere in credito la proprietà nobile ed i suoi possessori, ed il mezzo più acconcio erasi quello di ridurre le associazioni fondiarie alla vera indole di istituzioni politiche. Il qual riducimento tornerebbe e vano ed impraticabile là dove fossero ignoti le signorie e gli stati provinciali della Germania, ove la proprietà in generale sia alienabile e libera, ove il complesso e l'unione de' possidenti non possa che formare tante associazioni o società private. Quinci è ovvio che nelle provincie nostre il credito fondiario per quanto si aggrandisse, non potrebbe che rivolgersi all'istituzione di società private, ed al bene immediato di proprietarii o di capitalisti, e che il Governo non potrebbe intervenirvi, se non per iniziarne e dirigerne la prima istituzione, e per concederle quel favore di che deve esser largo in tutto che coopera, sebbene indirettamente, al bene pubblico.

D'altra parte, comunque fossero per essere private le associazioni di credito fondiario, l'intervento governativo in esse sarebbe sempre necessario e ragionevole. La dottrina del lasciar fare non corre dove vengono ad aspro conflitto gl'interessi dei privati e quelli della comunanza; dove si contrastano e si osteggiano lo spirito d'intraprendenza col principio dell'inerzia e della noncuranza; dove non esiste o non isvolgesi ancora con tutta la sua forza agglomerante il principio dell'associazione. Ma questo intervento del Governo nelle associazioni di credito fondiario può essere diretto o indiretto. Il primo sta nel prenderne tanta parte da divenirne il Governo stesso un socio od un attivo cooperatore. Il secondo nell'approvarle e nell'esercitare sopra di esse il diritto di inspezione e di sorveglianza. Quello e non questo si preferì in Prussia nell'istituzione fondiaria Pomeraniese per la sua origine e natura essenzialmente politica; talchè lo stato colà vi concorre dapprima colla vistosa somma di 200 mila fiorini del proprio, coll'esentarla da qualsiasi tassa di bollo, o di registro, coll'autorizzarla a mettersi in possesso dei beni de' suoi debitori per via di sequestro o di esecuzione, col nominarvi un commissario regio a presidente della società, ed infine coll'improntare le decisioni de' suoi funzionarii di un carattere pubblico, ossia delle stesse autorità dello stato. Laonde anche per siffatta guisa l'associazione

fondiaria di Pomerania venne a dissentire non poco dalla Galiziana e da quelle del regno di Polonia e della Sassonia; le quali tuttochè protette e sovvenute dal tesoro, cionnondimeno hanno più libera azione nella scelta de' propri rappresentanti o comitati, nell' andamento de' proprii negozii. Se non che per quanto fosse dubbia e controversa la massima d' intervenzione governativa in cosiffatte società, essa dovrebbe sempre esserci, sì perchè le grandi associazioni non sorgono se non v' ha una forza superiore e prevalente che le desti a vita e le costringa al fare, sì perchè l' atto legislativo è quello solo che le possa nonchè fondare, ma dirigere e rassodare per uno scopo di comune utilità, prevenendo e combattendo tutti gli ostacoli onde lo spirito dell' isolamento e l' abitudine dell' individualismo si sforzano di respingerle e di soffocarle. E qui parlandosi della necessità ed opportunità dell' intervento governativo nelle associazioni fondiarie potrebbe nascere il dubbio, se torni meglio che lo stato riduca a dirittura in suo potere coteste associazioni, ovvero le lasci in balìa de' singoli, siccome cosa di ragione privata. Se stiamo all' esperienza, essa ne porge buoni risultamenti così in una maniera come nell' altra. Ma se si consulti la scienza legislativa intorno al principio dell' opportunità, lo stato dovrebbe far sue e piantare egli stesso le associazioni fondiarie, solamente quando a tanto non valessero le forze de' privati, o quando non fosse altramente possibile di disgravare i fondi dal peso delle usure, e di promuovere i grandi miglioramenti dell' agricoltura. Ma da questi casi all' infuori le istituzioni fondiarie, siccome un oggetto di immediata utilità privata e di diritto civile privato debbono commettersi all' attività e al credito di privati, essendo bastevole all' uopo che il Governo le ecciti e le faccia esistere coll' impulso de' suoi Decreti, e col benefico influsso de' suoi incoraggiamenti.

Uno de' principii più essenziale al credito fondiario, e senza del quale non potranno giammai effettuarsi le sue istituzioni, egli è quello del prestito ipotecario a basso prezzo, ossia a basso interesse del danaro prestato. Il perchè è canone principalissimo d' ogni società fondiaria di fissarne la misura sempre al disotto della rendita dei fondi; imperciocchè in altro modo nè si soccorre all' incremento dell' agricoltura, nè si liberano i proprietari dalle enormità dell' usura nè si ottiene il puntuale pagamento delle annualità tuttochè pochissime nel sistema dell' ammortizzazione. Ed il basso interesse del danaro è così necessario alla prosperità del credito fondiario, che senza di esso non possono più costi-

tuirsi nè prestiti attivi, nè passivi dai quali dipende unicamente la mutua relazione, e quindi l'esistenza tra le società prestatrici o mutuanti, ed i possessori mutuatarii o debitori. Dietro a questo principio l'associazione fondiaria della Pomerania non riceve che capitali al $3\frac{1}{2}$ p. %, e li presta al 4 p. % con un sesto di fisso ragguagliato all'importo del capitale ed a titolo di quitanza o di provvigione. E questa misura dell'interesse della Pomeraniese è pressochè comune a tutte le altre società fondiarie di Germania, eccetto quella di Würtemberg che il limita al 3 p. %; di quelle dell'Hannover e del Ducato di Posen che l'innalzano invece fino al 5 p. %. Il che, se per una parte è assai singolare, in quanto l'associazione di Pomerania non paga i capitali in numerario, ma con semplice lettere di pegno che soggiacquero perfino al ribasso d'una conversione, per l'altra non sorprende, ma è affatto naturale e per la copia del danaro sonante in quella provincia poco dedita al commercio e all'industria, e per la grande fiducia che ispirano le lettere di pegno, e per il corso sempre alto che si ebbero ai giuochi della borsa, essendo arrivate nient'altro che al 110 prima dei rivolgimenti politici dell'anno 1848. Che se il basso interesse del danaro è la primissima condizione indispensabile allo stabilimento delle associazioni fondiarie, come si potrà mai introdurne alcuna tra noi, presso cui la valuta ha già il prezzo legale del 5 e del 6 p. %, non calcolate tutte le spese di provvigione e la tassa sui capitali? Cionondimeno sarà superabile anche quest'ostacolo, qualora si faccia in modo che la tassa dell'interesse ne' mutui ipotecarii delle nostre associazioni fondiarie non trapassi tutto compreso i termini della misura legale; poichè l'abitudine e la fede nell'ipoteca che è antica e grandissima tra noi, stimola i prudenti capitalisti a procedere lentamente e sicuramente, ad affidare il danaro piuttosto alla terra che non alla borsa e all'industria, a vagheggiare di più il gruzzolo che non il far sacco con angoscia continua d'una soprastante ruina. Si aggiunga che il danaro a buon mercato ne moltiplica l'inchiesta, e che dalla moltiplicità delle inchieste si fa maggiore il lucro; che colle lettere di pegno poste in circolazione, rendendosi più frequenti e più rapidi i giri dei valori ipotecarii, le società fondiarie possono rintegrarsi più presto del minor interesse del danaro di cui si fanno così discrete prestatrici.

Ma in qual guisa l'associazione fondiaria di Pomerania effettua i suoi prestiti? Essa ne fa di due sorta; cioè gli uni attivi e gli altri passivi. Da un canto essa riceve danaro e capitali; ed in ciò diviene mutuataria e posseditrice di

prestiti passivi; e dall' altro essa presta a' proprietarii suoi consoci questi stessi capitali, e sotto questo aspetto fassi mutuante e distributrice de' capitali o prestiti attivi. Sì negli uni che negli altri mutui o prestiti però non adopera mai il contante, ma solo le proprie obbligazioni sotto il nome di lettere di pegno *(Pfandbriefe)*, le quali non sono propriamente nè carta monetata, nè biglietti di banca o del tesoro, ma semplici titoli al presentatore, ossia valori circolanti anche alla borsa; e che rappresentano un capitale ipotecario coi suoi interessi, e la cui realizzazione è assicurata ad un tempo e sopra un fondo speciale, e sopra tutti gli immobili e capitali dell' intera associazione. La forma poi di queste lettere di pegno è semplicissima, e consiste in una carta di obbligazione a numero progressivo, sottoscritta dai direttori o capi della società stessa per una data somma a cifra rotonda, coll' indicazione più precisa nel fondo ipotecato, e colla data della sua emissione. Queste lettere di pegno così conformate vengono iscritte nel libro ipotecario della provincia in cui è situato il fondo ipotecato, e dal momento della loro iscrizione il presentatore acquista il diritto di riscuotere in contante il pagamento degl' interessi, oppure di cederle o girarle negoziandole eziandio alla borsa, e facendo valere il suo diritto anche per mezzo dell' esecuzione reale. Egli è perciò evidente che il possessore di queste lettere di pegno anche senza ricorrere all' espediente dell' esecuzione, può ad un tratto rinvenire il capitale di cui abbisogna, potendo trasmetterne sul momento il possesso o la proprietà a chiunque indipendentemente da quella. Al qual uopo era opportuno di regolarne specialmente l' emissione. Ed è qui dove l' associazione fondiaria della Pomerania ha date le più provvide disposizioni. Infatti per essa viene stabilito:

1) Che le lettere di pegno non si possano emettere se non se sui fondi situati in Pomerania e che abbiano una pagina aperta nel libro ipotecario di questa provincia, vale a dire, che siano atti alla guarentigia di prima ipoteca.

2) Che si rilascino pel capitale non minore di 200, nè maggiore di 1000 talleri divisibili però per cento in altrettante somme minori col relativo interesse.

3) Che la quantità o somma della loro emissione sia sempre proporzionata al bisogno, ovvero a ciascuna dimanda di mutuo.

4) Che la loro emissione non possa aver luogo se non a favore de' proprietarii, i quali siano già soci, o che vogliano divenirlo col fatto del mutuo o dei capitalisti sovventori o prestatori.

5) Che esse si convertano e si girino senza veruna formalità, una volta che

ne sia seguita la regolare iscrizione, e quindi senza la solita cessione od indossamento.

6) Che finalmente possano essere ammortizzate od estinte colla conversione in qualunque capitale, colla denuncia di pagamento, col cambio e col loro rinnuovamento. Dal che si comprende quanto divario corra fra le lettere di pegno delle associazioni fondiarie, e le varie specie di carta monetata o di pubblico credito, le quali girano alla borsa, od al mercato. Sicchè, se per esse si aumenta la massa o quantità di segni o simboli dei valori circolanti non pertanto s'accumulano o si confondono con quelli, essendo gli uni fondati sul credito personale, e le altre sul reale. Dal che consegue che mentre quelli vanno soggetti a tutte le oscillazioni del cambio e dell'aggiotaggio, ne sentono assai meno l'influsso, tuttochè al paro di quelli siano negoziabili alla borsa. E ciò dipende naturalmente dall'essere essenzialmente le lettere di pegno titoli ipotecarii, i quali fissi ed immobili, divennero circolanti e mobili a maggior comodo della proprietà o dell'agricoltura. Con che è impossibile che esse dismettano la primitiva loro indole e natura. Siccome poi riguardo all'emissione delle lettere di pegno sono della massima importanza il limite ossia la quantità e le cautele in eseguirla, così l'associazione fondiaria di Pomerania ha accolto il doppio principio del bisogno e dell'inchiesta pel primo oggetto, e della solennità nell'emissione per il secondo. Infatti sebbene la Prussia con tutte le sue associazioni fondiarie conti la somma omai di 400 millioni in tante lettere di pegno messe in circolazione, ciò nonostante in quella della Pomerania conservasi gelosamente il principio di non dar fuori queste lettere se non in ragione del bisogno o della dimanda per non ricorrere, come si fece nell'anno 1839 dalla Slesia, al tristo rimedio della loro conversione col riducimento degl'interessi. E benchè ad infrenare la eccessiva emissione delle lettere di pegno sarebbe forse conveniente di fissarne il limite sull'esempio di quello che si costuma per rispetto al fondo di riserva nelle banche, ciò nonostante da questo freno trovasi già rattenuta e compressa l'associazione fondiaria di Pomerania coll'andar stretto nell'emissione delle lettere di pegno, la quale non debbe mai eccedere il valore ben avverato del fondo ipotecato; col non emettere coteste lettere, se non ad ogni mutuo ipotecario già conchiuso, e sempre limitate alla sua somma; colla consegna di queste lettere di pegno se non a proprietarii della medesima provincia, o dei capitalisti che prestano danaro alle società fondiarie. Per quanto si riferisce alle necessarie solennità che devono accompagnare la stessa emissione

delle lettere di pegno, affinchè ne sia guarentita l'autenticità e ne vengano impediti ad un tempo gli abusi e le contraffazioni, la medesima società ha provveduto che l'emissione delle lettere di pegno sia esclusivamente riservata alla superior direzione, la quale è eziandio la depositaria e la custoditrice de' loro esemplari, e che al loro rilascio preceda sempre la iscrizione ipotecaria eseguita formalmente dinanzi non solo dei rappresentanti della società, ma benanco dell'autorità giudiziaria, che tiene i registri od i libri pubblici in cui avviene l'iscrizione.

Ogni scopo ed ogni utilità delle associazioni fondiarie, l'esistenza medesima di queste e la sorte del credito fondiario, su cui esse si appoggiano, andrebbero ad annientarsi ed in ruina, qualora mancasse per qualsiasi cagione la certezza di realizzare i valori od il capitale di cui le lettere di pegno sono le rappresentatrici. E siccome questa certezza non può conseguirsi se non per opera del credito reale o territoriale, ossia con ipoteca sui fondi; così la società fondiaria di Pomerania stabilì il principio che la ipoteca non solo debba essere prima, ma eziandio speciale e generale, ovvero individuale e collettiva, facendo sì che il diritto ipotecario dei capitali affidati al suolo sia per così dire incorporato ed inerente non solo con fondo ma che divenga perpetuo ed imperituro in tanta estensione di fondi quanta è quella d'una provincia. Egli è perciò che a suo favore qualunque capitale ipotecario non può anteporsi giammai a quello portato dalle sue lettere di pegno debitamente prenotate od iscritte; ondechè la loro ipoteca è sempre la anteriore o la prima, e cotesta ipoteca sempre anteriore non cade soltanto ed immediatamente sul fondo ipotecato, ma benanco su tutti i beni immobili che esistono nella provincia, e che sono di proprietà dei membri della società medesima. Dal che nasce l'altro principio di sopra accennato della così detta ipoteca collettiva a doppio riguardo e della società siccome intromettitrice, e di ciascuno siccome parte o membro di quella. La sicurezza pertanto o la realizzazione dei capitali prestati e sostenuti dal credito delle lettere di pegno non può essere maggiore con questo triplice carattere ipotecario, mentre qualunque altra ipoteca deve cedere alla loro prevalenza primamente per la ragione sì del tempo come del privilegio; secondariamente per l'obbligo d'ogni socio di contribuire proporzionalmente coi propri beni e fondi giacenti nel circuito della provincia a quanto mancasse al loro pagamento, e per ultimo, con i beni di tutta la Pomerania impegnati ugualmente al loro soddisfacimento. Ecco in qual senso possa dirsi che la ipoteca delle lettere di pegno dell'associazione fondiaria di Pomerania sia ad un tempo speciale e generale, individuale e collettiva. Nè ci

voleva meno, acciocchè i titoli ipotecarii di quell' associazione fossero indeficienti e sicurissimi tanto dal lato della sorte principale, quanto da quella degl' interessi. Nè potrebbesi gridare all' ingiustizia od alla violenza per l' aggravio o per lo spogliamento con questa ipoteca generale od involontaria di que' proprietarii che non abbisognano nemmeno dei prestiti della società, allorchè si considera che la fondazione dell' associazione Pomeraniese e delle altre consimili ha in sè lo scopo della pubblica utilità, tende ad avvantaggiare un ceto od una casta politica alla quale ogni proprietario o possessore della provincia appartiene e come nobile e come possessore, e in quanto ognuno ne gode degli onori e delle prerogative nella sua legale rappresentanza. Se non che tutta la loro sicurezza od indeficienza sarebbe un' illusione ed un inganno, qualora dalla rendita del fondo ipotecato non si ritraesse quel tanto che corrisponde ad ambedue insieme. Anche a questo si è pensato con fino accorgimento, sia col non emettere le lettere di pegno se prima non venga ben determinato colla stima de' suoi commissarii periti ed anche giudiziali il vero valore dei fondi offerti ad ipoteca, sia col non approvare questa stima se non dopo che essa venne scrutinata nelle sue operazioni, e sottoposta al voto dei revisori ed a quello della direzione generale, tenendosi sempre per fermo che questo voto non può essere affermativo se non quando la quota di vendita netta, sulla quale deve cadere l' ipoteca delle lettere di pegno, sia maggiore della somma del prestito. E questa quota di rendita netta non è mai fissa o determinata, ma variabile secondo la diversa qualità e coltura delle terre, e la diversa loro ubicazione.

Ma dopo tuttociò quello ch' è veramente singolare, e onde diversifica l' associazione fondiaria di Pomerania da tutte le altre, si è il rimborso volontario o facoltativo del capitale portato dalle lettere di pegno, dovendosi accontentare il possessore di riscuoterne puntualmente in danaro i soli frutti od interessi. Talchè per questo principio non è in costume presso di essa il sistema di ammortizzazione, ch'è pure decantato per tutta Germania siccome il principio fondamentale di qualsiasi società fondiaria. Egli è adunque per questo rimborso facoltativo o volontario, che il possessore delle lettere di pegno dell' associazione fondiaria Pomeraniese non può mai pretenderne od intimarne il pagamento, mentre può venderle e girarle a suo beneplacito, ed esse perciò rimangonsi in continua circolazione come tanti biglietti al presentatore, infino a tanto che o l' associazione stessa, o l' autorità pubblica od un socio proprietario qualunque, ovvero il de-

bitore ipotecario non intenda di ritirarle e di estinguerle dietro formale denunzia: nel qual caso soltanto ha luogo il loro ammortimento ch' è ben diverso dal sistema dell' ammortizzazione inventato dagl' Inglesi per estinguere il debito pubblico, ed applicato ora nel graduale e successivo pagamento ai mutui delle associazioni fondiarie. Con che fu scopo dell' associazione fondiaria Pomeraniese di evitare la vera ammortizzazione forzata di questi mutui, che può talvolta superare le forze della rendita fondiaria, e di collocare i suoi capitali ipotecarii a censo perpetuo rendendoli però mobili e circolanti col mezzo delle lettere di pegno, che sottentrano al difetto del rimborso forzato e necessario imposto dalle altre associazioni. Se non che il rimborso facoltativo o volontario usato in questa società fondiaria è ristretto al capitale; mentre rimane sempre forzato quello degl' interessi pagabilili semestralmente tanto dalla società medesima in quanto essa siasi fatta debitrice, quanto da' suoi mutuatarii o debitori in quanto essa gli abbia sovvenuti di mutui attivi qual creditrice. Conseguentemente in caso di mora per parte di questi debitori l' associazione ricorre ai mezzi coattivi della multa o dell' ammenda, del sequestro, dell' esecuzione sui mobili, e della vendita all' asta eziandio dei fondi per incassare puntualmente gl' interessi di cui va creditrice. E quindi col giro alternante e perenne degl' interessi proprii che incassa a dati giorni d' ogni semestre come creditrice, e coi pagamenti che fa per altrettanti interessi da lei dovuti, essa arriva a mantenere il necessario fondo di danaro sonante, sì per soddisfare ai proprii impegni, come a dar credito alle sue lettere di pegno, allontanandone qualunque richiesta di rimborso. Per la qual cosa l' associazione fondiaria di Pomerania distinguesi assolutamente dalle altre tutte di Germania, le quali hanno assunto in generale l' opposto principio del lento e forzato rimborso mediante il sistema dell' ammortizzazione, per la quale i debitori o mutuatarii sono costretti a scontare in un cogl' interessi una piccola porzione del capitale per forma che questo va ad essere estinto in un periodo più o meno lungo d' anni colla regola dell' interesse composto. E qui volendo conoscere quale tra i due sistemi faccia più pro, si dovrà pur convenire che col rimborso volontario o facoltativo si ottiene il pareggiamento assoluto delle lettere di pegno colla rendita dello stato: il che vuolsi l' ultimo progresso o perfezionamento del credito fondiario; che perpetuandosi il giro di queste lettere come un pubblico consolidato e sulla sola base del cambio si viene a fondare e ad assodare meglio questo credito; che col tramutamento in tanti censi perpetui de' mutui fondiari per loro natura temporanei e sempre rinnovabili, si

raccolgono tutti i vantaggi della sicurezza e del risparmio nell' impiego de' capitali; che coi simboli o segni delle lettere di pegno mobilitandosi i valori fissi delle terre, riproducesi e si moltiplica l'identica somma in molti altri valori; che col non forzare al pagamento dei mutui ipotecarii si prevengono gl' infortuni e l' impotenza di sostenere anche il peso delle piccole annualità, avendo riguardo alla pochezza della rendita fondiaria e all' impossibilità dell' avanzo o dei risparmi; che infine con questo sistema s' impediscono gli atti sempre molesti e dispendiosi della procedura esecutiva e dell' espropriazione forzata. Che invece coll' opposto sistema del rimborso forzato o coattivo la proprietà fondiaria viene intaccata e pregiudicata dallo stesso credito fondiario con che s' immagina di proteggerla e conservarla; si aggrava d' un peso incomportevole la rendita fondiaria con delle annualità fisse e troppo spesso ricorrenti; onde viene impedito qualsiasi miglioramento dell' agricoltura. Egli sarà perciò cosa di gran momento la scelta fra i due sistemi. Accanto dell' uno stanno la perpetuità e la maggior fiducia del credito fondiario parificato in tutto e per tutto alla rendita dello Stato, il pagamento dei mutui a tutto agio e comodo dei proprietarii debitori, il vantaggio di prevenire gli atti sempre molesti e dispendiosi del processo civile. Accanto invece dell' altro stanno il pericolo delle piccole annualità superiori alla rendita del fondo, il rimborso forzato e quindi sempre incomodo se non dannoso ai proprietarii debitori, i mutui del credito fondiario fatti a beneficio più dei capitalisti che dei possessori, la troppa facilità di pigliare capitali a mutuo congiunta coll' impossibilità della loro restituzione.

Il principio di *mutuazione* che dicesi anche *reciprocità* o *contraccambio* o *scambievolezza* consiste nell' essere tutti i soci reciprocamente debitori e creditori l' uno dell' altro, e ad un tempo verso la società intera che ha poi la legale rappresentanza di tutti. Sicchè i debitori o mutuatarii verso l' associazione intera divengono membri o soci di quella, e quindi compartecipi del suo dividendo o de' suoi lucri per il solo fatto di avere avuto a prestito un capitale qualunque dall' associazione medesima. Questo principio, ch' è comune a molte associazioni fondiarie della Germania, è una specie di consorteria e di solidarietà reciproca tra i mutuanti ed i mutuatarii, per la quale i titoli ipotecarii o le lettere di pegno vengono reciprocamente guarantite sì dai beni dei mutuatarii o che ricevono i capitali, come dai beni dei mutuanti che li prestano indipendentemente dell' ipoteca speciale per quelle. Questa mutuazione o contraccambio è uno sti-

molo efficacissimo a crescere ed estendere, sempre più la fiducia o credito delle lettere di pegno e a vigoreggiarle col principio che non se ne possa esigere il rimborso se non col sopravanzo degl' introiti e dei risparmii.

Il debitore o prestatore passivo de' loro capitali, oltrecchè non è stretto dalla necessità del rimborso, può avere un compenso degl' interessi che paga alla società creditrice nella quota che va a toccargli alla divisione annua del sociale profitto. Egli è quindi spinto ad associarsi da un doppio interesse; l' uno di trovar capitali a buon mercato senza cadere fra le branche dell'usurajo, l' altro di entrare in una società che può agevolargli la via al loro soddisfacimento.

Finalmente i due ultimi principii che contraddistinguono l' associazione fondiaria Pomeraniese sono, come già dissi a bel principio, la giurisdizione propria e privilegiata, e l' amministrazione centrale ed elettiva. Un cenno anche su questi varrà a farci conoscere vieppiù l' ordine e la ragionevolezza eziandio del suo andamento materiale, ossia del suo interno meccanismo. La giurisdizione propria altro non è che il diritto conferito ai capi o direttori dell' associazione fondiaria di emanare decreti o decisioni in proprio nome ed anche inappellabili, e d' infliggere multe ed ammende dentro i limiti dello statuto ed indipendentemente dalle sentenze dei tribunali che hanno in quella vece l' obbligo di prestarsi al loro eseguimento. Il privilegio poi onde si fregia cotesta giurisdizione, comprende la massima di non essere soggetta l' associazione fondiaria alla legge imperante e comune in tutti gli oggetti che ragguardano immediatamente al credito fondiario. Egli è pertanto in forza di questo privilegio, che i sequestri e la oppignorazione ordinati da questa società vengono mandati ad effetto dall' autorità giudiziaria senza che vi concorrano i soliti atti della lite o contestazione, che il decreto della subasta dei fondi ipotecati va esente dai preliminari sperimenti del processo ordinario civile, che infine le sue lettere di pegno ed i suoi libri o registri conseguono la fede di documenti pubblici, e forniscono una prova legale in giudizio. Conseguentemente il principio della giurisdizione propria e privilegiata così ampio e così possente accelera ed assicura le operazioni del credito fondiario, lo esenta dalle spese della procedura giudiziaria, e conserva alla società fondiaria quel carattere di società eminentemente politica, di che la volle impressa fino dal suo nascimento la sapienza del legislatore. Per ultimo l' amministrazione centrale ed elettiva sulla quale reggesi l'associazione fondiaria della Pomerania, si ravvisa nell' accentramento di tutti i poteri de' suoi rappre-

tentanti e di tutte le sue secondarie o locali direzioni in una sola suprema o superiore. Quindi per effetto di questa centralità l'intera associazione è sempre unanime e concorde ne' suoi atti e nelle sue deliberazioni, e conosce e decide de' proprii negozii con una sola mente e con una sola volontà sempre prevalente ed irresistibile, alla quale si raccolgono e mettono capo tutti gl'interessi dell'intero corpo per quanto siano disparati e lontani, e per quanto sia divisa e suddivisa in tante sezioni di circolo o di dipartimento, e non ha che di mira l'utile comune, il bene o la prosperità della generale istituzione. Se non che a rendere più compiuti i vantaggi di cotesta giurisdizione propria e privilegiata vengono sottoposti all'elezione generale o di tutti i soci quelli che debbono esercitarla, od averne il mandato. Il che è conforme altresì all'indole giuridica della società, e giova a non perpetuare un potere lesivo del diritto di uguaglianza che deve dominarla, ed a far concorrere e cospirare al bene comune tutte le forze più intelligenti ed attive delle quali essa va fornita. A questa amministrazione così ben intesa e congegnata io credo sia dovuta in gran parte la lunga e prosperosissima vita di che si gode l'associazione fondiaria della Pomerania. Ma dato che fosse possibile questa centralità dell'amministrazione anche elettiva per qualunque altra associazione fondiaria che si volesse pure introdurre, sarà egli poi da conferirsi una giurisdizione propria e così piena e tal quale venne attribuita alla Pomeraniese? Della giurisdizione propria e privilegiata si potè assai facilmente investire cotesta associazione a motivo del pubblico interesse, per la peculiare costituzione politica della Prussia, pel carattere politico che si volle imprimere dal Governo alla società fondiaria di soli proprietarii in quella provincia. Ma come tutto ciò potrassi od effettuare o conseguire là dove è in vigore il principio legale, che tutti gli oggetti di diritto privato siano soggetti ad un solo codice generale o comune, là dove non esistono gli stati provinciali a forma della Germania, là dove i corpi morali e le società tutte non possono che vivere della vita privata o dell'individuo? Anche questo riflesso non dovrà sfuggire alla mente nostra nella futura istituzione dell'associazione fondiaria pel nostro paese.

Ora che per me si venne esaminando, ed anche a dilungo l'indole, la specie e l'intima costituzione delle associazioni fondiarie di soli possessori o proprietarii, che ne formano il primo gruppo, passerò alla rassegna eziandio di quelle costituite di soli capitalisti e che appartengono al secondo gruppo. E in tal guisa mi sarà dato di seguire filo per filo tutta la tela già divisata nel noto lavoro.

PARTE II.

Delle istituzioni del credito fondiario di soli capitalisti e del credito agrario

Proseguendo a parlare delle principali istituzioni del credito fondiario dopo quelle già esaminate di soli proprietarii, mi vengono dinanzi le altre di soli capitalisti. Ed è sotto questo titolo che vanno comprese tanto le associazioni in cui i congregati o sozii non forniscono che danaro a semplice ipoteca, le quali però sono e saranno sempre pochissime, quanto quelle nelle quali l'interesse fondiario si frammischia con quello delle banche o del cambio; e siccome tra queste figurano come le più grandiose ed importanti la *Banca ipotecaria* di Monaco, e la *Cassa de' proprietarii* di Brusselles; così mi fermerò a ragionare di queste due soltanto anche perchè esse bastano a porgere un' idea adequata di tutte le altre che loro s'assomigliano.

La banca ipotecaria di Monaco o bavarese, che s' intitola altresì banca di deposito, di sconto e di circolazione, è privilegiata a novantanove anni, ed esiste come tale dall'anno 1835 in poi. Ad essa è data facoltà di emettere titoli ipotecarii trasmissibili e da potersi negoziare alla borsa, e d' intraprendere altresì qualunque operazione di sconto, di assicurazione, e perfino delle casse di risparmio. Il suo capitale nominale ascende a dieci milioni di fiorini, divisi in 20,000 azioni da 500 fiorini l' una, con obbligo d' impiegarne tre quinti in altrettanti prestiti ipotecarii, e col diritto di recarlo fino alla somma di 20 milioni, quattro od otto dei quali possono girare a guisa di biglietti a corso forzato. I suoi prestiti attivi od in contante, oppure in biglietti fruttiferi al 4 per % vengono assicurati sulla metà del valore dei fondi e con prima ipoteca, ed estinguonsi per un'annualità del 4 per % nel corso di 43 anni, e colla sola aggiunta dell' uno per % a causa d'ammortimento. Perciò i suoi debitori o mutuatarii non deggiono mai pagare un' annualità che superi in tutto il cinque per %, soggiacendo per altro alla espropriazione forzata, qualora mettessero indugio ai pagamenti. Se non che una così fatta banca, mentre da un canto sovviene la terra d' una parte dei suoi capitali, coll'altra s'affaccenda e traffica in operazioni mercantesche d'ogni sorta e dello stesso credito mobile personale, facendo così colare alla propria cassa non che il valore delle proprie azioni, ma ben anco le somme convertite

ne' biglietti circolanti, oppure ricevute a titolo di prime, di deposito, e di risparmio. Perlochè la sicurezza de' suoi biglietti reggesi non solo sulla prima ipoteca, ma sì ancora sui valori del portafoglio, sul fondo di riserva spettante a tutti i socii, e sull' obbligo delle casse pubbliche di riceverli siccome danaro sonante.

Non molto dissomiglievole da essa si è la cassa dei proprietarii belgica, o di Brusselles, istituita con regio editto 8 giugno 1835, e privilegiata essa pure ad anni novantanove. Questa cassa, che al pari dell' altra più che al servigio della terra mira al vantaggio de'suoi membri capitalisti, venne costituita da una società anonima con un capitale di tre milioni, divisi in tante azioni a 500 franchi l' una, e fruttifere al 4 per %, suole prestare il suo danaro pure al 4 per % in un coll'uno per % di soprassello ed a titolo di commissione, e coll'ipoteca prima sul terzo del valore libero dei fondi, ed affranca i suoi capitali per mezzo di annualità ora maggiori ora minori, in relazione al vario periodo tra i cinque ed i trenta anni dentro i quali è stipulato il mutuo. Quindi, metti caso, se si pigliano a prestito 100 franchi per anni cinque, devonsi pagare 23,47 all' anno, se per dieci 13,33, se per diciotto 8,90 ; e così via via. Questa stessa cassa poi nel punto che si fa per un verso creditrice o prestatrice di capitali, diviene essa medesima per l'altro e debitrice e mutuataria, in quanto dà fuori tanti biglietti che corrispondano alla somma de' suoi prestiti attivi, offerendo per tal guisa l' occasione a' capitalisti di usufruttuare il loro danaro rassicurato da doppia guarentigia, dall'ipoteca cioè del capitale sociale, e dell'annuo rimborso di questi biglietti, che vanno estinguendosi per serie estratte a sorte e con premio così detto mercantilmente *prima*. A costa della cassa belgica dei proprietarii, ne sorse un'altra congenere pure in Brusselles, qual rivale o competitrice, sotto il nome di *Cassa ipotecaria* formata da una *società anonima* con un capitale ripartito in azioni, e che prende danaro a prestito al 4 per %, concambiandolo colle proprie azioni nominative e non al presentatore, e che dà a mutuo del pari sotto la condizione d' una prima ipoteca. Questa cassa ipotecaria però non ammette premii o *prime* di sorta ; ma in loro luogo una specie di *tontina* o cassa di sopravvivenza, e differisce da quella dei proprietarii, in quanto riscuote dai debitori un' annualità più forte.

Per la qual cosa mentre la prima può avvantaggiarsi d'un dividendo dell' 8 per %, la seconda corse già il pericolo di chiudersi e di fallire. Dal che apparisce quanto la banca ipotecaria bavarese e le due casse di Brusselles, abbenchè tutte tre costituite di soli capitalisti, siano differenti dall'associazione fondiaria pure di

soli capitalisti stabilita nel Würtemberg nell' anno 1831, la quale è una vera cassa od agenzia di prestiti o mutui ipotecarii, in quanto riceve direttamente da capitalisti il danaro senza emettere vere cedole o lettere di pegno, ma delle carte fruttifere ch'essa estingue coll'estrazione a sorte o col preavviso di sei mesi. Essa non fa mai prestiti passivi per sè, ma dietro altrui ricerca, e per la somma giammai minore di 2000 fiorini, a cui s'aggiungono piccoli stacchi o *coupons* da 200, 300 e 500 fiorini per renderli accessibili a tutte le condizioni, e che vengono assicurati sopra fondi di doppio valore del capitale mutuato, e colla restituzione dentro 50 anni, appunto perchè tra l'annualità di un tre $^1/_2$ per $^0/_0$, e tra qualche altra spesuccia i suoi debitori giungono ad estinguere il capitale in questo spazio di tempo. Quello, onde si segnala l'associazione generale del credito fondiario Würtemberghese, si è la sua doppia singolarità, l' una cioè di starsi il Comune a sicurtà in caso che i beni dei debitori non bastino, l' altra di far partecipi i soli debitori o mutuatarii e non già i prestatori o sozii del fondo di riserva, qualora sia questo in guadagno. Talchè si può dire essere questa società del mutuo diretto tutta a pro dei debitori, e non già de' suoi membri o fondatori.

Volendo impertanto mettere a riscontro questa sorta di associazioni fondiarie di soli capitalisti, coll'altro di soli proprietarii, comprendesi di leggieri che l' indole ed i principii di quelle sono particolari e differenti da quelli di queste. Diffatto le associazioni di soli proprietarii sono società politiche e necessarie, e quelle dei capitalisti società private e libere. Le prime si reggono sul puro credito fondiario o reale, e le seconde sul credito eziandio personale e bancario. Quelle o non ammettono il sistema dell' ammortizzazione, o la ammettono soltanto come graduale e volontaria ; e queste la usano graduale sì, ma sempre forzata. Le une sono istituite al vantaggio immediato e diretto dei proprietarii, e le altre al diretto de' capitalisti o banchieri, e all' indiretto de' proprietarii. Laonde come corrono ambedue una sorte ben diversa, così tengonsi ambedue in un concetto ben diverso dagli scrittori di politica e di economia. Sennonchè la differenza qui notata sì dell' indole come dei principii di queste due sorta di associazioni del credito fondiario, mentre è l' effetto del naturale e necessario svolgimento dell' unico principio che le informa e della diversa loro applicazione, non nuoce neppure al loro scopo ; chè anzi meravigliosamente il secondano e favoriscono, ed hanno entrambe a riguardarsi siccome istituzioni salutari e vantaggiosissime tuttavolta che vengano ben ideate, e si attuino in fra condizioni alla qualità loro ben adatte e rispondenti.

E considerando primamente l'indole diversa di coteste due specie di associazioni, come mai la Germania e singolarmente la Prussia che ne fu la prima culla, poteva agognare in origine a tali associazioni come private e libere, se in essa la proprietà immobile era pressochè tutta in mano de' nobili o signori; se la nobiltà vi conferisce un titolo alla rappresentanza istorica e politica degli Stati? D' altro canto dove i nobili sono già collegati negli Stati, e ad un tempo grandi posseditori di beni-fondi, ivi esiste già un principio di associazione gelosa di conservare la proprietà già per sè inalienabile ed eziandio necessaria al lustro delle famiglie e del governo in quanto che queste si tengono per la prima rappresentanza dello Stato. Quindi bastò colà un decreto dello stesso governo a renderle obbligatorie e scambievoli fra tutti i possidenti nobili della provincia, stimandosi una così fatta unione od associazione non già utile e di spettanza del privato, ma sì bene vantaggiosa al pubblico e di pretto diritto dello Stato. Ecco come e perchè le associazioni prime di Germania furono di soli proprietarii e di natura politica e ad un tempo obbligatorie e necessarie. Per un verso egli è evidente che in altre nazioni come la Francia e il Belgio, in cui non si conoscono nè gli Stati quali rappresentanze politiche, nè la nobiltà quale unione od associazione già presistente in quelli, le associazioni del credito fondiario dovettero seguire gl' impulsi e l' arbitrio dell' interesse individuale, e divenire perciò società del tutto private e libere. E siccome appo queste nazioni il credito era già forte ed in voga, nè potevano applicarlo che quelli i quali sono i più atti a condurlo e maneggiarlo; così addivenne che tali associazioni e come libere e come private riuscissero più presto di capitalisti che non di proprietarii; onde che questa nuova specie o forma del credito fondiario segnò per via di progresso il secondo stadio del credito fondiario considerato nel suo successivo sviluppo od incremento.

Ma le associazioni fondiarie di soli capitalisti oltre ad essere per indole private e libere, s' attengono a principii propri molto ragionevoli e conducenti al fine. Si prescinda di fatto dal principio fondamentale d' ogni e qualunque associazione del credito fondiario, cioè a dire, da quello della prima ipoteca e dell' emissione delle cedole o lettere di pegno che rappresentano i valori circolanti del credito stesso fondiario o della terra, e vengasi alla rassegna degli altri che sono a loro speciali e veramente esclusivi. Il primo principio su cui si fondano queste associazioni, egli è quello di chiedere ajuto dai capitalisti, e di mettere insieme quel tanto di danaro e di credito che possa concorrere con prestiti ai bisogni della

terra o dei proprietarii. Ciò non era conseguibile dove non esistano traccie di colleganza politica come nell'Alemagna, se non per mezzo delle società mercantili o di capitalisti. Questi capitalisti attratti dall'esca del guadagno o dell'interesse, avvezzi ai rischi di borsa, nè alieni dall'uso delle carte, facilmente s'inducono ad assembrarsi per viste di lucro e di traffico, e facendosi forti da una parte del credito fondiario e dall'altra del bancario, riescono a fondere ed a mescolare insieme queste due sorta di credito per forma che l'uno serva di sostegno all'altro. Questo è il modo ond'ebbero la loro scaturigine le associazioni fondiarie di soli capitalisti tanto in Francia, quanto al Belgio ed in Baviera; poichè per tale intramischianza del credito fondiario col bancario o mercantile venne data non pure la spinta a crearle, ma benanco le società ed i mezzi acconci a vigoreggiarle e mantenerle. Nè per siffatto mescolamento delle due specie di credito può dirsi immutata l'indole delle associazioni fondiarie; imperciocchè prevale tuttavia in esse il principio del capitale assicurato sulla prima ipoteca o sui beni-fondi, e non vi è commisto quello delle banche se non pel giro delle lettere o cedole di pegno, e per le altre operazioni di deposito e di sconto che per avventura vi si uniscono, e che sono estranee al puro credito fondiario.

Il secondo principio di che s'avvivano le associazioni di soli capitalisti, egli è quello dell'ammortizzazione graduale, ma forzata, laddove in quelle de' soli proprietarii è facoltativa o volontaria l'estinzione del capitale, e talvolta anche a solo beneplacito delle associazioni medesime. Egli è in conseguenza di questo principio che i debitori o mutuatarii verso codeste società in una col semestre degli interessi sul capitale si obbligano a scontare una particella di capitale colla regola dell'interesse composto, ossia dell'interesse ad interesse. Nè altrimenti potrebbersi sostenere cosiffatte società; poichè dipende dalla puntualità dei debitori o mutuatarii in questi pagamenti a piccole rate la puntualità delle stesse associazioni in soddisfare i loro prestiti passivi, od in estinguere le cedole o lettere di pegno che pongono in circolazione. Per la qual cosa il sistema o principio dell'ammortizazzione graduale ma forzata è da riguardarsi quale una necessità connaturata all'indole medesima delle associazioni fondiarie di soli capitalisti, sebbene ve n'abbia di tali e più recenti che preferiscono il pagamento a piccole rate volontarie del capitale, ma disgiunte sempre da quelle degl'interessi, nella credenza che ciò torni di maggior bene ai debitori in quanto riesce loro assai gravoso, anzi talvolta impossibile, di pagare punto per punto così presto e ad un tratto gl'interessi ed una porzione di capitali. D'altra parte il principio o sistema

dell' ammortizzazione forzata e graduale che è il carattere distintivo di queste associazioni, fa pro ai debitori medesimi, sia perchè la restituzione del capitale si fa a tutto loro agio e pressochè insensibilmente, sia perchè eglino in tal guisa ritraggono tutti i vantaggi dell'interesse composto, i quali non sono nè tenui nè dispregievoli, siccome appariscono anche più in grande nel sistema d' ammortizzazione applicato al consolidato degli Stati, e che andrebbero interamente perduti col sistema della restituzione del capitale in rate anche piccole ma volontarie, ed a tratte di tempo ancorchè lunghissimo.

Il terzo ed ultimo principio che contraddistingue le associazioni fondiarie di soli capitalisti, si manifesta nel loro scopo di giovare direttamente ai banchieri e speculatori di danaro, e indirettamente soltanto ai proprietarii, adoperandosi elleno a crescere con ogni studio il ripartimento del dividendo fra gli azionisti, ed a far procaccio non che di prestiti a beneficio del suolo, ma sì ancora ad imprendere altre operazioni che ne sono alienissime, come quelle del deposito dello sconto e perfino delle assicurazioni. Alla qual mescolanza ed al qual cumulo di negozii se non contrarii certamente disparatissimi, si cerca di provvedere colla separazione in sezioni distinte della banca ipotecaria dalla mercantile, col limite all' emissione delle cedole o lettere di pegno ristrette al valore già riconosciuto dei fondi ipotecati, coll'assicurazione delle cedole o lettere di pegno sull' intero fondo sociale. Nè per tutto questo si potrebbe tacciare per esose o per men che utili le associazioni di soli capitalisti, contrapponendosi a loro rinfacciamento il disinteresse e la vantata generosità onde si segnalano quelle di soli proprietarii. Se io sono ben lontano, poichè il deggio e per intima convinzione e per principii di scienza dal predicare qual virtù laudabile l'egoismo che trapela dal fondo stesso di cotali associazioni formate di soli capitalisti, non posso però nemmeno accordarmi con quelli che le vituperano o le hanno in uggia quali altre fonti di turpe guadagno o qual nuova esca all'avidità degli speculatori. Per chiunque voglia giudicare saviamente ed imparzialmente delle umane cose, devesi accogliere la massima che è buono e lecito in politica l'ottenere il pubblico vantaggio collo stimolo dell' interesse privato; che non c' è vizio, qualora l' interesse privato non trascenda le leggi dell' equità e della giustizia; che dove sia impossibile di raggiungere lo scopo senza l' utile immediato delle persone indispensabili a conseguirlo, bisogna pur secondarlo e favorirlo. E siccome tutto ciò si avvera nelle associazioni del credito fondiario di soli capitalisti; così nulla mi resta su questo punto ad opporre o a ridire. E poi le stesse associazioni di

soli proprietarii in Prussia non ebbero il primo impulso dall'interesse se non individuale del ceto dei nobili? E non si mirò con queste a salvare colà le grandi proprietà dei signori o dei patrizii? E senza l'interessante sarebbero elleno mai sorte a vita, vi avrebbe il governo messo del proprio per crearle e per farle fiorire?

L'unica differenza pertanto che corra a questo riguardo tra l'una e l'altra specie di associazione, ella è questa: Che in quelle di soli proprietarii soprasta o primeggia l'interesse della comunanza a quello dell'individuo, laddove in quelle di soli capitalisti l'interesse dell'individuo prevale a quello della comunanza; sicchè in ambedue il primo motore è sempre l'interesse o l'utile in una combinazione reciproca ed in un indentico rapporto, salvo che i termini ne sono disposti diversamente. Se dunque si volesse biasimare o respingere le associazioni fondiarie di soli capitalisti a cagione di questo loro principio egoistico, sarebbe lo stesso che ricusare il bene in difetto del meglio; ed allontanare e mettere in dispregio tante e vantaggiose istituzioni della politica che al pari di queste associazioni non poterono aver altro stimolo alla loro esistenza ed al loro ingrandimento se non quello dell'immediato vantaggio de' loro fondatori o dei privati.

Essendosi per me ragionato fin qui delle istituzioni del credito fondiario anche di soli capitalisti, venne percorsa la serie di tutte quelle specie o forme di cotali associazioni che appartengono propriamente al primo gruppo, e che a tutta ragione si appellano vere e legittime associazioni del credito fondiario. Ora passerò a tenere discorso del secondo gruppo secondo la già fattane partizione o divisione (1) cioè delle associazioni del credito agrario, ossia di quelle istituzioni che si reggono non più sul credito fondiario o della terra, ma sull'agrario ossia dei mobili e delle persone. E queste istituzioni formano per l'appunto un'appendice necessaria alla seconda parte della presente memoria.

Il credito fondiario grande e fecondo com'è nel suo principio e nello spirito di perfettibilità che lo anima ed informa, collo svolgersi del tempo e degli umani bisogni non potè a meno di non distendersi e di svolgersi anch'esso in altre guise o forme e più semplici e più proficue all'universale, che non fossero quelle del capitale assicurato soltanto sul suolo; sicchè il credito da reale o fondiario

(1) Vedi la Parte prima nel volume VI, parte I di queste Memorie.

che era nella sua origine, divenne a poco a poco nel suo progresso mobile o personale, raggiungendo per siffatta maniera più dappresso l'altissimo suo scopo, qual dovrebbe essere quello di giovare all' agricoltura e di favorire le sue imprese ed i suoi miglioramenti. Ecco donde derivano le istituzioni del credito *agrario* od agricolo e che costituiscono il terzo stadio del credito fondiario e quindi il complemento d' una così bella e moderna invenzione.

Il credito fondiario avendo per iscopo precipuo di sovvenire la terra degli occorrenti capitali a fecondarla e ad ammigliorarne la produzione, è evidente che dovesse apparire ben presto manchevole ed imperfetto così nelle sue istituzioni di soli proprietarii, come in quelle di soli capitalisti, mentrechè con ambidue non si mira che al vantaggio o della terra stessa o de' banchieri, e per nulla si pensa alla sorte degli agricoltori. D' altra parte, la produzione del suolo è ben poca o nulla senza del lavoro, ed il lavoro non prospera nè avanza senza l' associazione del capitale. Il credito stesso è meno rapido e intraprendente e perciò meno utile nelle sue funzioni, allorchè timido ed assegnato si restringa alla cerchia delle ipoteche sulla terra ed ai soli proprietarii, nè faccia conto veruno della fiducia o nelle cose mobili, o nelle persone.

Gli agricoltori o lavoranti sono quelli che più abbisognano de'suoi capitali; ma essi non possono offerire a sicurtà che i prodotti del suolo, o l' onestà e la fede d' una personale obbligazione. Egli è per tali motivi che si vide ben presto alle istituzioni del credito fondiario aggiungersi quelle del credito agricolo od agrario sotto il nome di *Casse e Banche agrarie* o di prestito nel Badese, in Heidelberg, nell'Assia-Darmstadt, in Irlanda ed in Russia, e che io vengo pure a brevemente chiarire, sì nel loro organismo come nei loro principii per determinarne poscia l' utilità ed una qualunque possibile applicazione.

Le banche o casse del credito agrario finora stabilite in Germania, anzichè generali, sono al tutto speciali in quanto che somministrano danaro ovvero generi in natura per una data classe di persone come sono gli agricoltori, o per un dato bisogno od acquisto, come quello del bestiame sì vantaggioso all' agricoltura. Egli è perciò che le banche agrarie del ducato di Baden mentre danno a prestito il danaro al sei per % ai contadini, affinchè provvedano ed allevino il bestiame, devono rimanere esse la padrone finchè non segua il rimborso del suo prezzo; il quale rimborso può effettuarsi anche d' uno per % all' anno mantenendovi degli agenti che lo sorveglino, e trasformandosi alla fine in vere casse comunali, qualora il Comune è quello che in difetto d' altra cauzione nè gua-

rentigia il pagamento. Dal che deriva ai debitori contadini il beneficio del soccorso ed il risparmio insieme di violenze e di spese che necessariamente s'accompagnano colla procedenza sommaria e privilegiata. Le casse di risparmio invece dell' Assia-Darmstadt, che sono omai diffuse in tutti i circoli e distretti dello stato, si comportano in sostanza come tante casse di prestito o di risparmio mantenute ed alimentate dai depositi che vi concorrono dei poveri, e dalle somme di che le forniscono i comuni ed i loro fondatori o protettori. Esse fanno prestiti specialmente ai poveri della campagna per la somma dai 10 a 100 fiorini a patto che l'interesse sia del cinque per %, che venga dato cauzione del prestito, e che si renda il capitale anche a decimi dentro lo spazio di tre anni. In fine, nell' Irlanda esistono le società di prestito che sovvengono fino alle 10 lire sterline i coloni od agricoltori al quattro per % mediante obbligazioni trasmissibili per via d' indossamento, e dietro la sola sicurtà de' debitori.

Quella però che più si distingue siccome la più perfetta tra queste banche agrarie sarebbe la banca dei contadini dell' isola di Oesel in Russia, formatasi dal concentramento in essa dei due magazzini di biade o di riserva delle Isole di Areusbourg e di Mohn nella Livania. Questa banca è costruita di tre fondi amministrati da una commissione governativa. Il primo è del danaro accumulato coi guadagni della primitiva od originaria banca di Oesel, e coi doni che le fa la nobiltà; e con questo danaro si soccorre ai bisogni particolari e domestici dei contadini. Il secondo è tutto di biade o di grani che si distribuiscono in natura agli stessi contadini, o per sementa o pel vitto delle loro famiglie. Il terzo è pure di danaro che s' impiega nel dissodare terre incolte, e nello scavamento di fossi e di canali od in qualsiasi altra operazione che sia di utile generale ed esteso per l'agricoltura. I prestiti in danaro di questa cassa si patteggiano a due o tre anni, ma con ipoteca, ad una somma non minore di 500, nè maggiore di 600 rubli ed all' interesse del sei per %. La sezione poi che distribuisce le biade ed i grani, li sovviene gratuitamente a' coloni veramente poveri ed a quelli che non essendo tali si obbligano a restituirli con un dodicesimo di più sulla raccolta di quell' anno. Quello che addita la molta prudenza con cui si procede nei prestiti del danaro a beneficio dell' agricoltura, sono le cautele con che si adopera la commissione amministratrice di questo fondo; giacchè è dessa quella che guarda e che determina i luoghi, la qualità, e la spesa dei grandi miglioramenti da farsi ne' campi o nell'agricoltura e che ne sorveglia tutte le opere di esecuzione, ottenendo per siffatta guisa il doppio intento, l' uno dell' impiego

esclusivo del capitale in quei dati miglioramenti del suolo, l'altro dell'immediato soccorso al dissodamento delle terre incolte dell' Isola stessa di Oesel (1).

Da questa succinta esposizione dell' indole e dell' organismo delle istituzioni del credito agrario si deduce essere loro principii fondamentali :

1.° L' associazione di soli capitalisti.

2.° Il credito più che fondiario o reale, mobile ed anco personale.

3.° L' ammortizzazione od il pagamento dei prestiti a piccole rate, ma ad alto interesse e a termine brevissimo.

4.° L' idea, più che del guadagno, della pubblica beneficenza.

5.° Il vantaggio diretto ed immediato dei contadini e dell' agricoltura. Dal che si comprende come vadano lungi cosiffatte istituzioni del credito agrario propriamente dette, da quelle del fondiario in tutte le sue forme o specie, non solo per rispetto all' indole ed allo scopo, ma altresì per rispetto all' amministrazione ed ai principii. Nelle une si pensa a disgravare la proprietà immobile dalle usure ed a preservarla dall' alienazione forzata a beneficio di una sola classe di persone, com' è la possidenza, oppure ad avvantaggiare i capitalisti, con qualche comodo o profitto insieme dei proprietarii o possessori. Nelle altre invece si provvede unicamente al bene dei coloni e dell' agricoltura, rimossa ogni idea di lucro dalla mente dei sovvenitori. Quelle sono associazioni politiche o d' interesse privato; queste istituzioni politiche, ma più che d'interesse di vera beneficenza. Le prime si tengono al credito fondiario per la sicurezza del capitale senza riguardo al suo impiego. Le seconde, per lo contrario, si affidano principalmente al credito mobile ed anco personale, purchè sia sicuro il capitale e produca eziandio un bene qualunque all' agricoltura ed un sollievo alla povertà dei contadini.

Ad onta però che siano da un lato utili e dall'altro così filantropiche e benefiche le casse o banche del credito agrario di Germania, d' Irlanda, e di Russia finora conosciute, cionnonpertanto non si può a meno di non appuntarle di parecchi difetti, e tra gli altri della soverchia angustia e limitazione nelle loro funzioni ed operazioni, della difficoltà e del disagio e della loro impraticabilità pei nostri costumi e bisogni.

Quanto alla loro angustia e limitazione nelle loro operazioni essa ben tosto si appalesa nel circoscrivere i prestiti o al solo acquisto del bestiame ed alla som-

(1) V. *Des institutions de crédit foncier etc. par M. Josseau, 2.de partie, pag. 498-532.*

ministrazione dei grani o generi in natura col dodicesimo di più del già dato, essendo certo che se giova all' agricoltura di estendere e facilitare l' allevamento degli animali, nondimeno saranno ben pochi i contadini che vorranno assoggettarsi al grave interesse del sei per % o torre a prestito biade, che debbono restituire con una dodicesima parte di più della quantità ricevuta. Così se le banche agrarie si rimangono proprietarie del bestiame, finchè il contadino non abbia pagato il danaro pel loro acquisto, gli è forza che esse vi esercitino sopra una sorveglianza incomoda e dispendiosa, e che per difetto di cauzione vi subentrino le comuni come debitrici mallevadrici. E per tutte queste malagevolezze in fatti nelle quali s' incontrano le casse o banche agrarie o di prestito in Germania, esse sono per la più parte e da tempo già chiuse, allorchè non si trasmutarono in banche comunali. La loro impraticabilità, almeno come sono per riguardo ai nostri costumi ed ai nostri bisogni, essa è più che mai manifesta nell' eccessivo interesse del sei per % ne' prestiti di danaro per la semplice compera degli animali, nella moltiplicità dei monti di pietà, delle casse di risparmio e degli istituti di beneficenza destinati a riparare le distrette dei poveri e dei contadini, nella legale impossibilità, secondo le nostre leggi, che i comuni assumano l' azienda o malleveria dei prestiti ai loro contadini, e finalmente nel sistema del fitto o della mezzadria per cui i proprietarii nostri per sentimento di umanità, per stimoli d' interesse sono tratti anche loro malgrado a sovvenire i contadini ne' tempi più stringenti e più angustiosi. Nè per questo io voglio conchiudere che sieno da ricusarsi in modo assoluto le banche o casse del credito agrario, che pure dissi già essere uno sviluppo naturale e necessario del credito fondiario medesimo; ma intendo solo di affermare siccome impraticabili tra noi queste casse o banche nella guisa che vennero organizzate nel Badese e ad Heilberg, essendo invece dell'avviso che lungi dal sopprimerle farà assai pro lo aggrandirle e perfezionarle con una nuova organizzazione e sopra basi più larghe, checchè ne dicano in contrario il Royer, il Barre ed altri riputati scrittori.

Ora che mi venne fatto di spiegare e l' indole ed i principii eziandio del credito agrario, ossia di quelle associazioni le quali formano il secondo gruppo delle istituzioni del credito fondiario in generale, parrebbe già dato tutto il compito che mi sono prefisso in questa seconda Memoria sul credito fondiario medesimo. Ma riducendomi in mente all'invece che tutte queste specie o forme del credito fondiario soggiacciono quale più quale meno a forti obbiezioni e a grandi contrarietà, che il mio finale proposito in questi studii teorici preparatorii essendo

il progetto concreto e pratico di una associazione qualunque per le provincie nostre, io non posso a tanto pervenire infino a che devesi lottare con gravi difficoltà che vengano ad implicarlo; che se tanto più risplende e si lumeggia il vero quanto più si procura di distenebrarlo, si dovrà consentire essere più presto necessario che dicevole il ribattere coteste obbiezioni a cagione che per esse o puossi tuttavia dubitare dell' utilità e convenienza del credito fondiario in massima, o credere alla sua inadattabilità pel nostro paese in via di applicazione.

Venendo impertanto ad una ragionata discussione almeno delle principali fra tutte queste obbiezioni, egli è d'uopo distinguerle primamente in razionali ed empiriche, in generali o speciali, secondo che sono dedotte dal puro ragionamento, ovvero della fattane esperienza, e secondo che vanno a colpire il credito fondiario sotto qualunque specie o forma, ovvero sotto alcuna sua forma od istituzione in particolare. Secondamente sarà inutile che io ne citi qui gli autori, e perchè alcune di esse sorgono spontanee nella mente di chiunque si faccia a meditarle, e perchè la più parte stanno già registrate nelle opere dei più accreditati scrittori e che sono tra mano di quelli che si piacciono di queste materie. Io adopererò in cambio a congegnarle e ordinarle tutte in una separata serie per forma che dalla loro più chiara e più precisa nozione ne esca e più chiara e più distinta anco la confutazione, incominciando dalle prime che si riferiscono al credito fondiario in genere, e discendendo fino all' ultime che ragguardano al credito agrario in ispecie.

Gli avversarii del credito fondiario in generale, ovvero alla sua idea, sono quelli che il reputano inutile od inadattabile in massima, ovvero dannoso od anche meglio surrogato in pratica da altre più confacenti istituzioni. Son eglino quindi che vanno dicendo contro il credito fondiario: essere desso incentivo alla prodigalità ed allo spreco colla facilità di sovvenire capitali; impiegarsi questi capitali anzi che negli ammiglioramenti del suolo nelle spese di famiglia e del lusso cotanto rovinoso ai possessori della campagna; affluire per suo mezzo i capitali alla terra a danno dell'industria e del commercio; tornare pericolosa la emissione delle sue lettere di pegno, se soverchia, ed insufficiente se limitata e ristretta; recar perdita sempre al possessore bisognoso il rimborso di coteste lettere di pegno, perchè costretto dal corso di borsa; aumentarsi di soverchio la massa delle carte o dei segni in circolazione per le lettere di pegno, onde l'alterazione nel pregio e prezzo di tutti gli altri valori mercantili e rappresentativi; racchiudersi nel credito fondiario il patto d'anticresi proibito da ogni savia legisla-

zione; essere impossibile ridurre il credito fondiario alla celerità ed al magistero del bancario e commerciale; evitarsi più presto le crisi tra debitore e creditore, che non tra il debitore e le compagnie o società fondiarie come creditrici; scorgersi immensa la sproporzione tra i capitali forniti dalle associazioni fondiarie e la cifra del debito ipotecario, colla cui conversione in altrettante lettere di pegno mal si conta di poter disgravare la terra dal peso enorme delle usure; supplire meglio al credito fondiario le attuali casse di risparmio, qualora fosse più in assetto il sistema delle ipoteche; apparire come prematura e precoce l'istituzione od organizzazione del credito fondiario avanti che siano accumulati i capitali mediante le banche di circolazione; finalmente opporsi le banche od associazioni privilegiate del credito fondiario al principio della libertà e della concorrenza, e ad ogni legislazione civile esistente, che dovrebbe per esse trasmutarsi da universale che è, in una legge di eccezione. Ora, come ben vedesi, l'apparato di queste ragioni ed obbiezioni contro le istituzioni del credito fondiario in genere non potrebbe essere nè più ingegnoso nè più imponente e guerresco. Eppure, ove ci facciamo a ben considerarle ad una ad una, non è così difficile il far risposta a tutte.

Non è, nè potrà giammai essere la facilità di aver capitali a prestito quella che conduca i possidenti allo sprecamento ed a far gitto del loro, ma sì bene la spensierataggine, il vizio, il non saper fare masserizia. D' altra parte ai possessori che realmente abbisognano di capitali o per renderli produttivi e fruttiferi nelle migliorie de'fondi, o per alleggerire il pro annuo de'mutui che già li aggravano, tornerà sempre a bene lo averli in pronto e lo averli assai agevolmente, sì perchè i miglioramenti del suolo accrescono la rendita della terra quando che sia, sì perchè il pagar meno d' interessi o di usure equivale ad un risparmio, ed il risparmio è sempre un capitale accumulato. Che se per questi capitali in luogo di dispensarli a bonificazione de' campi si profondano in superfluità ed in lussi di famiglia, nemmeno ciò è a colpa delle associazioni fondiarie che li forniscono; ma di chi ne abusa lo intento. Il perchè taluna di esse studiasi di porvi freno col sorvegliare essa stessa l' impiego de' propri mutui. Egli è un vero pregiudizio teorico quello di supporre che pei facili od abbondanti prestiti alla terra si torcano e si disviino i capitali dall' industria e dal commercio. In primo luogo, questo disserrarsi dei capitali tutti per un solo verso non può essere effetto che del rigurgito, e non già della penuria del danaro. Che se fosse il contrario, sarebbe questa eccezione, piuttosto che regola per le associazioni del credito fondiario.

In secondo luogo, giova distinguere il capitale cauto o prudente che non vuol perdere, dal capitale ardito o speculatore che tutto arrischia all'idea del maggior guadagno. Come il primo affluirà sempre alla terra, così il secondo sarà sempre vago delle grandi intraprese industriali e dei giuochi della borsa. Perlocchè è affatto immaginario il timore che s' accumuli di troppo il danaro sulla terra a discapito del commercio e dell'industria, allorchè sia proporzionata la somma dei capitali disponibili sì per l' impiego che per la circolazione. In terzo luogo, i capitali si affollano e si addensano là dove è maggiore il lucro; e finchè questo darà meno pel suolo e più pel commercio e per l' industria, noi li vedremo accorrere là, e non qua con tanto trabocco.

Infine la prima fonte di tutte le produzioni e ricchezze è la terra; ed il commercio e l' industria non potrebbero che avvantaggiarsi e rinsanguinarsi di tutto il succo che per quella discorresse, laddove fosse anche probabile tutta la temuta affluenza de' capitali alla terra la mercè del credito fondiario.

Il pericolo che l' emissione delle lettere di pegno dia negli eccessi svanisce o non è più paventevole, allorchè venga rattenuta dentro certi limiti come quelli del valore della prima ipoteca, e sorvegliata più che dalla banca, dall'occhio del Governo. Essa del pari non può dichiararsi per insufficiente, se non quando scarseggino o difettino di credito o di capitale le associazioni fondiarie, oppure si metta a riscontro la cifra dei loro mutui colla somma sempre ingente a cui può salire il debito ipotecario di un' intera provincia o di tutto uno Stato. Certamente che in allora per quante lettere di pegno si mettano in giro, la somma di queste sarà sempre inferiore alla somma di quelle; ma non pertanto sarebbe a dirsi insufficiente questa limitata emissione almeno pei proprietarii che vanno ad approfittarne. Se non che a prevenire in parte l' inconveniente di una tale insufficienza, le associazioni fondiarie possono moltiplicarsi e dividersi laddove ne sia maggiore il bisogno da un canto e dall'altro l'interesse. Ed è a quest' uopo che alcuni Governi non sogliono autorarle se non provincia per provincia.

Il possessore delle lettere di pegno costretto dal bisogno a chiederne il rimborso è nella condizione medesima di chi porge cambiali alle banche per lo sconto, o di chi le vende alla borsa, o di chi vuol cedere o trasferire in altrui il proprio credito. Egli deve naturalmente sottostare a perdite ragguagliate per lo meno alla provvisione mercantile, alla tassa dello sconto, alla diffalta degli interessi coi conti scalari. Ma egli rivolgendosi immediatamente alla società fondiaria può effettuare il rimborso od al pari od al minimo discapito. Avvi inol-

tre delle associazioni fondiarie che invece delle lettere di pegno somministrano a dirittura il danaro; delle altre che ammortizzano loro stesse le proprie lettere di pegno, e delle altre così bene in sodo ed accreditate da non abbisognare mai del rimborso.

Le lettere di pegno accrescono ed alterano anch' esse la massa delle carte in circolazione, e quindi cresciuta la massa deve conseguitarne per necessità la diminuzione od il ribasso nel prezzo di tutte le altre carte che sono egualmente segni rappresentativi di valori.

Ma il basso prezzo di tutte cose, come quello eziandio delle carte circolanti, non è in ragione diretta soltanto della loro massa o quantità, ma più ancora della loro qualità e dell' intrinseco loro valore. Egli è per questo che le lettere di pegno quali segni rappresentativi di un valore ipotecario o reale non possono giammai confondersi nè equipararsi agli effetti pubblici che si sostengono sul solo credito bancario o personale: Tanta e così essenziale si è la differenza che intercede dalle une agli altri. Egli è per questo che le lettere di pegno della Prussia nella catastrofe dell' anno 1848 così terribile agli stessi biglietti del tesoro, si tennero sempre in alto, e fecero aggio appetto di tutte le altre carte. Egli è per questo infine che non si può sentenziare così di punto contra alle lettere di pegno fondiario pel solo motivo ch'esse vadano ad aumentare la massa o quantità delle carte poste in circolazione (1).

Il patto dell' anticresi è certamente e giustamente vietato dalle leggi, perchè alla sua ombra si copre e si scherma con contratti simulati l' ingordigia dell' usura. Ma il suo illicito non dipende già dal semplice fatto che il venditore si compensi co' frutti della cosa venduta in luogo degli interessi del capitale figurante il prezzo della vendita, ma in sostanza d' un vero mutuo, ma sì bene dall' esorbitanza di questi interessi medesimi. Per conseguente non possono appuntarsi le associazioni fondiarie d'un patto anticretico illecito, abbenchè godessero del privilegio d' impossessarsi temporaneamente del fondo ipotecario o dei suoi frutti fino al perfetto ragguaglio de' loro crediti, appunto perchè esse non travalicano mai la misura od il segno legale degl'interessi acconsentiti anco dalla convenzione. E ciò è tanto vero, che come si respinge per illegalità qualsiasi

(1) Nella prima Memoria sul credito fondiario, io ho ammesso che le carte lettere di pegno o delle associazioni del credito fondiario cresceranno il disfavore e la diffidenza, cagionando altresì impaccio alla circolazione delle altre. Ma con ciò non vengo punto a contraddire la legge qui stabilita che le carte abbassano di prezzo in ragione più che della quantità della loro qualità, ossia dell' intrinseco loro valore.

contratto che adombri l'anticresi, così si approvano quelli delle associazioni fondiarie che amministrano per un dato tempo e da padrone i fondi loro ipotecati per risarcirsi d'ogni loro avere.

Il pretendere che il credito fondiario acquisti l' impulso e la rapidità del bancario o commerciale, ella è cosa nemmeno pensabile e da snaturare di posta la qualità dell' uno con quella dell' altro. Le lettere di pegno che si usano nel credito fondiario, per quantunque trasmissibili e giranti alla borsa quasi simboli o segni di valori al presentatore od anche a nome, non possono rilasciarsi che in un numero sempre limitato e dietro indagini, cautele e formalità che esigono dispendio di tempo e noia di lungherie talvolta assai penose. Quindi egli è ben naturale che una cotal sorta di credito non possa giammai aggiungere la forza produttrice o creatrice de' capitali dell'altro, nè operare a guisa di cambio elevato alla seconda o terza potenza siccome avviene del credito esercitato oggidì dalle grandi associazioni industriali o dalle banche. Il credito fondiario porta con sè l' indelebile ed essenziale carattere dell' immobilità del suolo o del valore reale, nè sarà mai possibile sotto qualunque forma esso si atteggi od apparisca, che divenga in tutto e per tutto mobile o personale qual è di sua indole il credito bancario o commerciale, altramente tutta la gran fiducia che vi è posta andrebbesi in fumo ed i timidi ne rifuggirebbero siccome da un azzardo troppo fortunevole e di certissima loro rovina. Esso per altro mette in giro e mobilita con abbastanza di celerità una massa di capitali fissi come sono i titoli ipotecarii, i quali si moltiplicano e danno nuovi valori col continuo giro e colla costante circolazione, e, quel che è più, mentre disgrava la terra de' suoi pesi e provvede ai grandi bisogni dell' agricoltura, non corre nè ai rischi nè al precipizio in cui s' impiglia od in cui si perde bene spesso il credito mobile ed arditissimo delle banche o delle compagnie. Quantunque tra il debitore e il creditore come semplici individui si venga più presto ad accordo intorno ai debiti per mutuo ; cionnonstante neppure colle associazioni del credito fondiario un tale vantaggio va perduto, o perchè anche queste concedono ulteriore indugio ai pagamenti, o perchè ne commettono le tenui rate all' arbitrio e al comodo de' debitori, o perchè intervengono spesso i terzi a redimerli coll' acquisto e colla guarentigia, ove siano in credito le lettere loro di pegno, o perchè infine non ne riscuotono mai il rimborso. Anche la sproporzione tra il debito ipotecario di una provincia o d' uno Stato e la somma dei mutui sovvenuti dalle associazioni del credito fondiario se non può dirsi immensa, siccome si esagera, è però sempre grandissima.

Di fatto è noto che il debito ipotecario di Francia ascende dai 12 ai 14 milliardi, e che fin ora la banca del suo credito fondiario istituita colla legge 28 febbrajo 1852 non potè fornire che dai 50 ai 60 milioni in cedole o lettere di pegno; come pure non s' ignora che le banche del credito fondiario di Germania non sovvennero i proprietarii che di 500 milioni, mentre il loro debito ipotecario tocca agli otto milliardi. Ma posto come irrepugnabile anche questo fatto, chi vorrà mai inferirne con buon senno che le istituzioni del credito fondiario per ciò siano da proscriversi siccome dannose, ovvero superflue ed inutili! La conseguenza tradisce e soverchia di troppo la logica. Certo che se il credito fondiario si vuole farlo servire d' un tratto ad estinguere o trasformare tutto il debito ipotecario d'una nazione in tante lettere di pegno, non v' ha capitali nè associazioni che bastino. Ma se invece si avvii questo credito a provvedere a poco a poco ed in parte al gran male delle usure che gravitano ed opprimono orrendamente il suolo; se con esse si tenda a mobilitare un' ingente massa di capitali fissi quali sono i titoli ipotecarii, e che diversamente rimarrebbero inerti ed inoperosi; se si aspiri per suo mezzo ed a patti discreti e vantaggiosissimi ad anticipare le somme occorrenti alle migliorie della terra ed ai bisogni degli agricoltori, in allora non si può che riconoscere per utile anzi per indispensabile questa specie di credito, come una nuova e sicura fonte di ben pubblico, come un vero perfezionamento od un vero progresso del credito in generale. Egli è in queste viste che, lungi dal respingerlo come cosa dappoco perchè non provvede a tutto il male, nè produce tutto il bene, noi dobbiamo tenerlo in pregio e farne capitale, acciocchè esso si svolga e s' invigorisca, e ci venga fatto modo a raccoglierne e più lungamente e più estesamente i frutti.

Lo affermare che le casse di risparmio possano servire meglio e con più profitto delle banche del credito fondiario, qualora venisse perfezionato il sistema delle ipoteche, parmi un asserto più presto rischievole che difendibile. In primo luogo, le casse di risparmio sono un' istituzione di pubblica beneficenza o pei poveri, e mal si presterebbero ad essere convertite in banche o casse di credito e di circolazione per gli abbienti o pei ricchi. In secondo luogo, i capitali ammontati mediante i piccoli depositi non possono per la necessaria sicurezza impiegarsi se non come capitali fissi, ed al credito fondiario occorrono capitali circolanti. In terzo luogo, i mutui delle casse di risparmio non rappresentano che valori effettivi e presenti, e non i futuri. In quarto luogo, non è così facile il migliorare il sistema delle ipoteche, come si converrebbe all'uopo massime quando

non si sa conoscere in che debbano consistere questi suoi miglioramenti. Per ultimo, se migliorando il sistema delle ipoteche si rendessero mobili e circolanti i capitali delle casse di risparmio, allora esse si trasmutano in vere banche del credito fondiario; e con ciò si verrebbe ad ammettere da una parte quello che si niega dall'altra. Se non che le banche del credito fondiario sembrano a taluni un anacronismo in quanto presuppongano le banche di circolazione senza delle quali mancano i capitali accumulati e disposti pei loro mutui. Anche questa obbiezione non regge se non per que' luoghi ne' quali penuriasse il danaro od il risparmio. Oltracciò essa odora d'una tal quale petizione di principio; giacchè se non ci sono capitali non può esserci nemmanco la loro circolazione. D'altro canto, le stesse banche fondiarie sono essenzialmente banche di circolazione in quanto accumulano e mettono in giro capitali mediante le lettere di pegno. Infine l'obbiezione cade da sè, qualora le banche del credito fondiario si aprano ne' paesi che abbondino discretamente di danaro; perchè in allora basta richiamarvelo per farle esistere. E tanto si può conseguire colla retta istituzione e disciplina delle associazioni del credito fondiario indipendente dalle banche di circolazione. L' ultima obbiezione al credito fondiario in genere ella è quella del suo contrasto o nocimento col privilegio, alla libertà ed alla concorrenza, e dei grandi e sostanziali cangiamenti ch'essa reca alla legislazione civile. Egli sarà un punto assai controvertibile se convenga sì o no privilegiare, come si costuma, le associazioni del credito fondiario, massime quando non esiste od ha niuna o ben poca espansione lo spirito di associamento; ma il privilegio per sè solo non farà mai ostacolo alla loro introduzione in modo assoluto, appresentandosi all'uopo il contrario partito della libera concorrenza ossia delle associazioni fondiarie puramente private e libere. D' altra parte, i cambiamenti della legislazione civile ed universale a pro delle associazioni del credito fondiario tuttochè favorite dal privilegio, non saranno mai da tanto da sovvertirla e ridurla a legge di eccezione. Il fatto di queste associazioni è nuovo nelle moderne nazioni, ed ogni savio legislatore deve seguirlo e regolarlo con nuove leggi nelle sue giuridiche relazioni. Il diritto civile in sè è così ampio ed astratto da comprendere eziandio questo fatto impreveduto e non prima d'ora conoscibile. Tutt'i codici ammettono la procedura sommaria e l'esecuzione cosiddetta *parata* in via politica od in via fiscale. Ecco tutto quello che di principale fa mestieri alle associazioni in fatto di legislazione acciocchè possano piantarsi e fiorire.

Ma le obbiezioni contra il credito fondiario non si arrestano a queste gene-

ralità; chè anzi ne penetrano fino il midollo, osteggiandosi con talune le associazioni o di soli proprietarii, o di soli capitalisti, e contrariandosi colle altre la sua ultima forma di credito agrario od agricola. Io farò di discorrere anche su tutte queste quistioni in separato, affinchè ne emerga più nitidamente il vero. Gli avversarii delle associazioni fondiarie di soli proprietarii appongono che è impossibile una società libera, ed illegale la forzata di tutt' i proprietarii d' una provincia o d' uno Stato allo scopo del credito fondiario; che le banche fondiarie trovansi a fronte non di proprietarii agricoltori, ma di soli affittaiuoli a causa del generale sistema della nostra agricoltura; che le associazioni del credito fondiario giovano alla grande proprietà, ma non alla media ed alla piccola; che il credito fondiario mobilitando la proprietà la spoglia del suo carattere di stabilità e perpetuità; che ne' prestiti del credito fondiario l' interesse del capitale dovendo sorpassare la rendita dei fondi, i proprietarii ricadono nel malanno delle usure; che le lettere di pegno tuttochè assicurate con ipoteca non possono sfuggire alle crisi della borsa; che l'ammortizzazione forzata e l' immediata esecuzione o allontanano i proprietarii dai prestiti delle banche fondiarie, oppure riescono loro più che del comune mutuo fatali e dannose. Quelli invece che attaccano più di fronte ed in particolare le associazioni fondiarie di soli capitalisti, vanno predicando che queste non tendono ad altro che a saziare l'avidità dei banchieri e degli speculatori; che è pernicioso il mescolare le operazioni del credito ipotecario con quelle delle banche; che è inevitabile l' eccesso nell'emissione delle lettere di pegno, quando essa è in mano dei capitalisti o banchieri; che la mancanza di puntualità nel pagamento degl' interessi fa trampolare o fallire simili banche od associazioni; che queste banche non potendo accordare a lungo termine il rimborso, si benefiziano per sè e non già pei proprietarii; che l' estinzione delle lettere di pegno coll' estrazione a sorte è disconvenientissima; che finalmente la sfortuna ed il tristo successo della banca ipotecaria di Baviera e di quella stessa di Francia provano ad evidenza l' inopportunità delle associazioni fondiarie di soli capitalisti od a forma di banche (1). Ma anche da queste obbiezioni, non pure speciose ma stringenti, è facile il liberarsi facendone tralucere o l'arguzia del sofisma o la mala applicazione dei principii o la negazione del fatto e della prova e riprova dell' esperienza.

(1) V. Le opere citate di Royer, di Barre, etc. *Journal des Économistes, Octobre* 1856. Del credito fondiario di Leone Carpi. Torino, 1854.

E facendomi a capo di quelle che più specialmente si riferiscono alle associazioni fondiarie di soli proprietarii, chi potrebbe mai acconsentire essere impossibile la società libera o volontaria di tutti i possidenti d'una o più provincie al fine di farsi reciprocamente e da sè creditori e debitori collo stesso principio della mutuazione e mediante prestiti ipotecarii (1), allorchè si pensa ai tanti consorzii per le acque della Lombardia e del Veneto, allorchè sorge anche adesso l'idea di una società di mutua assicurazione pei danni della grandine, allorchè si veggono prosperose moltiplicare le associazioni di mutuo soccorso anche nel nostro regno (2)? Non v'ha dubbio che queste libere associazioni dovranno procedere lente ed incontrare gravi difficoltà innanzi di addomesticarsi. Non v'ha dubbio che il Governo stesso dovrà eccitarle e promuoverle per darvi il tratto singolarmente colà dove non fosse così avvanzato e progrediente lo spirito di associazione verso di quelle; ma cionnondimeno dal difficile all'impossibile non corre l'induzione. Che se tutti noi dobbiamo riconoscere per illegali codeste associazioni, qualora si volesse forzarle, siccome già avvenne politicamente nella Prussia, non per questo andrebbesi a chiudere loro l'adito come libere, qualora fossero richieste dal bisogno e avessero ad opportunamente acconciarsi alle varie circostanze. Qui sta il punto per non ricredersi a questa prima obbiezione.

Del resto tutte le altre obbiezioni contro alle associazioni fondiarie di soli proprietarii, e che qui si annoverano, sono quelle stesse che già m'imposero fino dal principio di questo lavoro, ma che peraltro io nè qui nè là, reputo da tanto di non poterle superare o divertire (3). Il perchè giovami ripetere ed assai di corto, che le associazioni fondiarie col trovarsi a fronte non già di proprietarii ma di soli fittaiuoli grandi e piccoli, ne verranno impedite allora soltanto che accolgasi l'idea d'istituirle ad esclusivo beneficio dei possidenti; che le associazioni fondiarie provvederanno ugualmente alla grande proprietà che alla media ed infima, se in esse s'introdurrà il principio del credito eziandio agrario, e se le loro lettere di pegno gireranno a tenui somme ed anche a forma di *coupons;* che con esse non si mobilita propriamente il valore del suolo o di ciò che è per natura immobile, ma soltanto que' valori o capitali che vi si appiciccano ed apperpetuano come morti ed improduttivi; che la tassa dei loro prestiti può tenersi

(1) V. la parte I di questa Memoria.

(2) V. Gazzetta di Milano 27 Gennajo 1857.

(3) V. Memoria prima sul credito fondiario.

dentro i confini della rendita fondiaria tuttavolta che abbondi il danaro, che moltiplichino i prestiti stessi, e che si convertano questi prestiti nell' effettivo miglioramento delle terre e dell' agricoltura, mentre la tassa degl' interessi delle associazioni fondiarie non si fissa sopra il dato della rendita ordinaria, ma sull'industria agricola e quindi sul possibile futuro suo accrescimento; che le lettere di pegno poste in sicuro dalla prima ipoteca, non possono soggiacere, nè mai soggiacquero alle funeste crisi delle altre carte circolanti, e che nol potranno nemmanco quando si stabiliscano dalla legge segni esteriori ed incontrastabili all'acquisto legale del dominio o della proprietà, come sono l' ufficio della pubblica intavolazione, il registro o la trascrizione dei contratti di compra e vendita degl' immobili, od anche il processo edittale o delle gride applicate a simili contrattazioni; che l' ammortizzazione forzata può rendersi facoltativa e volontaria, e meno incomoda col lungo termine accordato al rimborso; che la procedura sommaria e fiscale è un diritto competente alle associazioni fondiarie, del quale esse possono far uso a loro senno, avendo queste associazioni un interesse contrario a questa procedura in quanto l' espropriazione forzata tronca il corso alle annualità cotanto loro vantaggiose; e che infine esistono associazioni fondiarie di soli proprietarii che non abbisognano nè dell' una nè dell' altra in virtù del principio di mutuazione.

Per quanto spetta alle obbiezioni che si rivolgono direttamente alle associazioni fondiarie di soli capitalisti, ognuno al solo rimemorarle non può se non che scorgere in talune la falsità, in talaltre l' esagerazione. Sebbene di queste associazioni a forma di banche debbano avvantaggiarsi anche i capitalisti e gli speculatori, cionnonostante esse non sono più odiose, nè si può più tacciarle di avidità ed ingordigia, ove coll' utile di questi sappiano congiungere quello pur anco de' loro concorrenti. La mescolanza delle operazioni del credito ipotecario con quello delle banche non ha più luogo, e non è più dannevole, ogni qual volta si guardino in separate sezioni i negozii dell' uno e quelli dell' altro, ovvero si trovi modo ad abbinarli e conciliarli insieme. Così il sopraccarico o l' eccedente emissione delle lettere di pegno non impaura nè minaccia pericolo tuttochè sia in mano de' banchieri, allorchè si sa che il moltiplicarle di soverchio genera il loro discredito, e quando vi sopravvede l'autorità politica come cosa di pubblico bene. La puntualità nel pagamento degli interessi per parte de' debitori verso le banche fondiarie è di tanta importanza, che senza di questa esse possono non che trampolare ma condursi al verde; ed è a causa di ciò che per l' appunto vi si

costituisce a sicurtà di tali interessi la compagnia stessa degli azionisti. Ma indipendentemente da codesta sicurtà può dirsi che il ritardo o il difetto nel loro pagamento non fu sempre nè la vera, nè la sola cagione del loro scadimento. Non regge il fatto che queste banche non possano mandare in lungo il rimborso, essendo anzi questa la condizione principale alla loro prosperità e sussistenza. L'estinzione delle lettere di pegno per via dell'estrazione a sorte se disconviene o non s'accorda colla solidità del loro credito, pure talvolta è stimolo maggiore alla loro ricerca ed al loro acquisto. Per ultimo il fatto della sfortuna o del cattivo successo delle banche ipotecarie specialmente di Francia non deriva necessariamente dalla loro costituzione, ma sì bene da diverse altre ragioni. Il perchè anche recentemente al congresso di economia pubblica in Bruxelles se ne accagionarono lo sviamento de' capitali per l'altezza dello sconto salito al 6 per %, la loro concorrenza ad impiego più vantaggioso nelle azioni delle strade ferrate e dei grandi intraprendimenti dell'industria e della fognatura, la troppo ristretta quantità delle lettere e cedole di pegno limitate ai mutui con prima ipoteca, l'esclusiva od il monopolio onde vanno distinte le società fondiarie in virtù del privilegio, la tassa già prestabilita dell' interesse, la niuna riforma del sistema ipotecario ed i vizii dell'amministrazione (1). Dopo ciò non mi rimane più che confutare le ragioni con che si obbietta al credito non fondiario, ma agrario che è forse il più convenevole quanto è il meno accetto nè fatto degno di preesistimazione.

Gli oppositori al credito agrario od a quelle banche ed associazioni che mirano a sovvenire di prestiti il colono ed i fittaiuoli all'ombra del credito soltanto personale, s'avvisano di dar nel segno dichiarando inutili queste banche od associazioni in quanto i proprietarii medesimi possono accomunare con loro i prestiti già avuti da quelle del credito fondiario; ingiusta e violenta la trasformazione di queste associazioni in banche comunali od in istituti di carità e di beneficenza; complicata la loro amministrazione, e difficoltoso od impossibile il rimborso; preferibili i monti di pietà e le casse di risparmio; soppresse e abbandonate simili banche in que' luoghi ne' quali vennero istituite (2). Ma la forza in generale di queste obbiezioni sta tutta nel falso supposto che il credito agrario non possa stabilirsi che ad un modo, ossia in quella forma con cui venne intro-

(1) V. *Journal des Économistes; Octobre* 1856.

(2) V. Royer, *des Institutions de Crédit*, ecc. pag. 50 e 153.

dotto già in Germania e presso altre nazioni. Tolto di mezzo questo falso supposto esse non possono più sostenersi. Ma venendo al particolare eziandio di queste obbiezioni, si fa per sè chiarissimo che niuna di esse sta così a martello da doverla confermare od acconsentire.

Primamente le banche del credito agrario non saranno mai inutili, se non quando i capitali tolti a prestito mediante il credito fondiario dai proprietarii fossero tali da sorpassare a'loro bisogni, e da farne compartecipi i coloni. Inoltre questi coloni dovrebbero essere in grado di rispondere della parte loro con ipoteca pari a quella cui s' assoggettarono i proprietarii medesimi. Ma ciò esce da ogni ipotesi del credito agrario; chè anzi con questo vuolsi accorrere agli agricoltori senza tenute. Secondariamente egli è certo che le banche agrarie prestando danaro a sicurtà de' comuni, o senza l'obbligo del rimborso si trasmutano od in casse comunali od in istituti di beneficenza. Ma questo loro trasmutamento non può avvenire che coll' assenso delle banche stesse; ed in allora non c' è più orma di violenza o d' ingiustizia; nè rimane altro che o la lesione dei principii direttivi della buona amministrazione comunale, o la trasformazione di un genere di società in quello di altre. Terzamente sui difetti dei monti di pietà non c' è da aggiustare parole, perchè tutti gli economisti li notano e tutto il mondo ne va persuaso.

Che se mai più che bisogno è necessità di questi istituti il riscuotere dai poverelli l' interesse non mai minore dell' otto o nove per $\%_0$, anche tutto compreso, essi non possono più intitolarsi per istituti di carità, e mal si confanno ad essere sostenuti e preferibili alle banche agrarie (1). Le casse di risparmio altresì non danno ma ricevono danaro; ed i loro prestiti non possono essere che ingenti e sotto la cauzione reale od ipotecaria. E questo solo le rende inette ad iscambiare le banche di credito agrario. In quarto luogo devesi pur convenire essere da un lato avviluppata ed intricatissima l' amministrazione delle banche agrarie almeno nella guisa che vennero finora istituite; e dall' altro difficile, se non impossibile, il rimborso de' loro prestiti massime se rivolti alla compera o del bestiame non da latte ma da grascia o di istrumenti rurali, o di che che sia d' altro occorrente all' agricoltura. Ma chi ha mai detto che queste banche deb-

(1) V. *De la bienfaisance publique, par M. de Gérando, Tom. II, pag.* 6-26 *des monts de Piété.* Bruxelles 1829. *Dictionnaire de l'Économie politique par MM. Coquelin et Guillaumin.* Brusselles 1854, alla parola *Monts de-Piété*, pag. 251-258. Atti dell'i. r. Istituto Veneto, Tom. I, serie terza, pag. 69. Studii sui monti di Pietà del M. E. co. Cavalli.

bano essere d' un modo o d' una misura. Per ultimo, la mala prova fatta fino a qui dalle banche agrarie del Würtemberg e del Badese lungi dal doverla attribuire alla loro indole nativa, od al loro originale principio, ella è da ascriversi piuttosto a' vizii della susseguente loro organizzazione, e cioè al soverchio della loro estensione ed associazione, alla differenza troppo notevole tra il prestito nominale ed il reale, al contributo a tutta perdita pel fondo di riserva, alla difficoltà delle chieste garanzie, e alle altre gravezze e misure di rigore onde con esse si venne premendo i debitori.

Ma con tutto questo apparecchio di studii preparatorii sulle varie forme o specie delle istituzioni del credito fondiario in Europa, raggiungerò io lo scopo prefissomi, quello cioè di un progetto ben appensato e di pratica applicazione per le nostre provincie? Io non ristarrò dal tentarlo nella terza ed ultima Memoria sul credito fondiario per quantunque sieno e l' opera scabrosa e deboli le forze.

(*Letta il* 25 *marzo* 1857.)

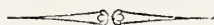
FLORA FOSSILE

DEL MONTE COLLE

NELLA PROVINCIA VERONESE

DEL SOCIO CORRISPONDENTE

DOTT. A. B. PROF. MASSALONGO

con 8 Tavole litografiche

Non in extremas adducimur terras, aut in Indias rapimur: Italia decreta est nobis, in Italia merebimus! — Pont. Comp. tab.

Lo stato geognostico della provincia veronese, fu già esposto in molti scritti del prof. Catullo, del cav. Zigno, del Maraschini, del Pasini, del Pollini e varii altri: ed io pure ne ho trattato o per incidenza o per esteso in molti miei lavori, secondo che comportavano le mie cognizioni. Potrà perciò sembrare superfluo, se non affatto inutile, che io ritorni sopra quest'argomento, nè stimerassi ragionevole, che per discorrere delle reliquie vegetali fossili del *M. Colle*, abbia qui ad occuparmi di tutti gli antichi sedimenti della mia patria.

Ma pure per parlare convenevolmente della Flora fossile di questo monte, m'è giuoco forza prendere le mosse un po' da lungi: perocchè il *M. Colle* è tale, che da sè solo giudicato, potrebbe trarre in inganno, e farmi ribadire un qualche errore, nel quale sovr'esso incappai altra fiata: come quello che giacendosi a foggia d'isola fra le roccie plutoniche, sia per mille guise disordinato e travolto.

Per bene adunque decifrare la geognosia del *M. Colle*, ed assegnare ai suoi sedimenti il posto ch'è loro convenevole, è d'uopo soccorrerci coll'analisi di altri luoghi del veronese, indagare l'analogia delle roccie e la loro normale successione, la conformità de' resti organici contemporanei, senza di che non

potrassi riuscire a buon giudizio. E qui fin da principio asserisco, che per sè solo giudicato questo monte, o, dirò meglio, il suo strato a filliti, non potrebbe in modo alcuno e con alcun fondamento essere definito nè per terziario, nè per cretaceo, ove alcuni luoghi della provincia vicentina (Altissimo, Gausi, ecc.), e della provincia veronese (Fumane, Negrar, M. Cavolo) di eguali resti vegetali provveduti, non ci servissero di scorta e di guida.

Per queste ragioni, debbo qui in poche righe recitare la serie delle principali roccie che formano l'ossatura del Veronese, e farollo brevemente, senza corredo di citazioni: chè non è mio scopo di dare la storia della geognosia di questa provincia, ma semplicemente la successione stratigrafica delle roccie, che nulla meno i miei scritti, e quelli di altri geologi di me ben più addottrinati, non è stata fin qui ancora espressa con rigorosa aggiustatezza.

Le epoche jurasica, cretacea, e terziaria sono le sole delle quali abbiamo bene caratterizzati sedimenti nel Veronese.

I più antichi strati sono potentissimi banchi variamente colorati di un calcare saccarino magnesifero, ora rosso-ferrigno chiuso, ora roseo aperto, ove giallo sbiadato, ove giallo cupo, ma più generalmente bianco-latteo, leggermente volgente al perlino-cilestrognolo; dove a grana più fina, dove più grossolana, a frattura ineguale, talora compatto e lustrante, tal altra friabile ed amorfo. Tale roccia, che vedesi appena emersa dal suolo nelle parti meno alte della provincia, e si lancia frastagliata in aguglie a formare le vette delle più alte montagne, in stratificazioni concordanti colle altre roccie che seguono, è la dolomite de' nostri geologi, che taluni vogliono riferire al periodo jurasico, ed altri tener luogo appo noi dell'epoca liasica *(Dachsteinkalk)* di altre contrade, o come membro più antico inseparabile del Giura, ovvero da questo affatto distinto. Fino ad ora nelle dolomiti del Veronese io non ho raccolto che qualche raro modello di conchiglia fossile affatto indecifrabile, e quindi perciò che spetta al carattere zoologico, non mi sarebbe possibile l'assegnare a questi depositi nella scala geognostica, un posto con sicurezza, e qualunque giudizio da mia parte sarebbe azzardato; e dirò francamente, checchè ad altri possa sembrare, che passerà ancora molto tempo, pria che con certezza venga stabilito il vero periodo geologico di queste dolomiti del Veronese. Basterà frattanto l'averne fissata la normale stazione, che meglio apparirà da quanto sono per dire; e confesserò che parlando di queste roccie, m'atterrei più volentieri all'opinione che fossero inseparabili dall'epoca jurasica, laddove stimerei le dolomiti di altri luoghi del

Veneto, p. e. del M. Spitz di Recoaro, di Campo Grosso, di Campo Bruno, ec. ec., e del M. Malera nel Veronese, cronologicamente più antiche, e probabilmente spettanti al membro più superiore del Trias, ovvero o l'uno o l'altro dei piani *Toarciano* o *Sinemuriano* dell'epoca liasica.

I soli resti organici, ed i progressi della scienza potranno decidere, e per ora basti sapere, che il maggior numero dei geologi convengono attualmente nell'opinione, che una parte del calcare dolomitico sopradescritto, rappresenti il Lias inferiore *(Dachsteinkalk)*.

Alle dolomiti sopraccitate, seguono i potentissimi banchi della formazione jura-oolitica, la quale nel Veronese, coll'appoggio di fossili reliquie, non può essere divisa che nei due piani: *inferiore* o della grande oolite, e *superiore* o dell'oolite media od oxfordiana, mancando (a quel che sembra) affatto appo noi la parte superiore dell'Jura, tanto sviluppata nella vicina Allemagna. Alcune specie di molluschi però, e massime parecchie impronte vegetali scopertesi nella grande oolite del Veronese, massime a Roverè di Velo, ai Pernigotti, a Saline, a Campofontana, a Grezzana, a Badia, ec. accennano, sebbene non ancora con soverchia certezza, ai due piani *Batoniano* (il superiore) e *Bajociano* (l'inferiore), nei quali volle divisa questa formazione il celebre d'Orbigny.

La parte dell'Jura inferiore è d'assai più sviluppata e potente della calcaria oxfordiana cotanto zeppa di ammoniti (1): e dove quella forma le radici od il corpo delle maggiori montagne nostre, questa ne forma le vette nella parte più settentrionale, o la base nei monti meno elevati. La grande oolite è povera di fossili animali (2), e consta di grandi banchi di calcare, ordinariamente bianco-lattei, dove compatti e dove mirabilmente oolitici, e dovunque è caratterizzata da uno strato brecciato pieno zeppo di articolazioni di encriniti (3). Così pei membri

(1) Le specie d'Ammoniti più frequenti nel calcare oxfordiano del Veronese sono le seguenti: *Ammonites Fontana Cat. Backariae Sow. triplicatus Sow. Athleta Phil. babeanus D' Orb. Chauvinianus D' Orb. Calloviensis Sow. inflatus Ziel. tripartitus Rp. tumidus Ziet. anceps Rhein* (*exornatus Cat.*) *oculatus Phil. plicatilis Sow. Jason Ziel. ptychaicus estd. perarmatus Sow. Zignoidianus D' Orb. heterophyllus Sow. fimbriatus Sow. Sabaudianus D' Orb. ooliticus D' Orb. Humphressianus Sow. latricus Pusch.*

(2) Fin qui non furono frequentemente trovati che modelli di *Pholadomia*, *Gervillia*, *Isocardia*, *Nucula*, *Terebralula sphaeroidalis*, *Hinniles? Pychnodus*, *Pholidophorus*, e crinoidi, massime negli strati reputati bajociani.

(3) Quasi per tutto il Veronese si possono riscontrare nelle ooliti questi straterelli pieni di innumerevoli articolazioni di crinoidi *(Pentacrinus scalaris?)*: fatto già da me pubblicato fino dal 1850. Vedi *Osteolog. Orsi foss.* pag. 5 e anche la nota 3.

più antichi; laddove nei più recenti o superiori, le testate calcari sono di vario colore, sempre più o meno alluminifere, e frequentemente brecciate e di venuzze o macchie di carbonato calcare cristallizzato infarcite. Non di rado strati schistosi di calcari marno-argilliferi pieni di filliti, e schisti bituminosi, e testate di argille si alternano coi calcari ora cinereo-giallognoli, ora cinereo-grigiastri, fra i quali si trovano i più belli e ricercati marmi della provincia veronese, le *Lumachelle,* l' *Occhio di Pernice*, il *Bronzetto,* la *Pietra litografica* e varii altri, che insieme uniti, si stimano formare il piano *Bajociano* sopra designato.

Non è possibile con sicurezza definire dove finisca questo piano della *Grande oolite*, e dove abbia cominciamento l' *Oolite media* od il periodo oxfordiano o calloviano: chè certamente non poche divisioni e trinciamenti fatti dai moderni di alcune epoche geologiche, sono più nella mente di chi le introdusse, di quello che nella natura. Litologicamente parlando, sembrami potersi distinguere le testate della calcaria oxfordiana sovrapposta alla grande oolite, anzi tutto pella copia e frequenza degli ammoniti, e pel colore roseo o carnicino o rosso di mattone che acquistano le roccie: ed eziandio pella potenza assai minore degli strati, e pella struttura loro brecciata globoso-nodosa inegualissima. È ben vero, che il calcare oxfordiano, che forma il tanto pregiato *marmo rosso veronese*, del quale è fabbricato per la maggior parte l' antico e colossale anfiteatro dell'*Arena,* si alterna con altri calcari della stessa natura e di color bianco-latteo i quali formano il *Biancone* dei Lombardi, ed in parte il *Biancone* di S. Ambrogio del Veronese, ed eziandio talora, sebben di rado, con calcari giallo-ocracei conosciuti col nome di *Marmo giallo di Torri*, ma tuttavolta potrassi facilmente e grossolanamente distinguere il loro insieme dalla grande oolite sottoposta, per certi cotali stratarelli rosso cupi di ossido, di ferro che uniscono fra loro il *marmo rosso*, ed altri straterelli verdognoli alluminosi di silicato di ferro, che separano o congiungono il *marmo bianco*.

I fossili, non v' ha dubbio, ci potrebbero con più scientifico fondamento condurre alla distinzione e conoscenza di questi due grandi piani dell' epoca jurasica, ma qui io ho voluto insegnare a distinguere queste roccie veronesi, semplicemente dietro i caratteri esterni, sapendo tutti quanto sia difficile e raro l'abbattersi a resti organici; e di ciò mi saprà grado peculiarmente il geologo viaggiatore.

Notabilissima circostanza e degna de' più alti riflessi si è, lo stato metamorfico regolare della calcaria oxfordiana (se male non m' appongo) nelle parti

meno elevate del Veronese ad oriente (1), laddove è allo stato naturale dove forma e costituisce la cima delle montagne.

Tal fatto è segnalatissimo specialmente nella valle di Tregnago, che ha origine nel Tirolo e sbocca nell'Adige. Poco sopra del paese di Illasi, e più manifestamente nei paesi di *Tregnago, Cogollo* e *Badia* cotale calcaria oxfordiana metamorfica, in forza della potente immersione nord-est = sud-est degli strati, forma, nei luoghi nominati, gli strati più bassi o le radici dei monti. La sua natura è saccarina, a frattura inegualmente concoidale, pellucida, generalmente di color carneo-roseo uniforme, e dove a chiazze più o meno colorata. Però ce n'ha di questa calcaria estesi tratti color giallo sudicio, di biancastra, ed eziandio di bianchissima come zucchero; talora compatta e durissima, non di rado friabile, a grana finissima uniforme, e talora a grana così fatta da emulare il *marmo di Carrara,* o da eguagliare il *marmo Pario.* Intorno ambi i lati della valle sopraricordata, troverassi sempre la stessa roccia qui descritta, la quale, non presentando traccia veruna di organiche reliquie, certamente, in grazia del metamorfismo al quale fu soggetta, non potrebbe per questo di leggeri essere geologicamente classificata, ove le roccie che l'accompagnano inferiormente, e massime superiormente, non ci ponessero in grado di definirla senz'altro per oxfordiana. Per convincersene poi, basterà, come io ebbi a fare, accompagnare qualunque di questi strati metamorfici, da Tregnago fino ai paesi di Badia, Selva di Progno e Giazza, dove giunti, troverassi lo stesso strato divenuto naturale, mostrare già in parecchi luoghi i fossili più caratteristici.

Tal fatto delle calcarie oxfordiane del Veronese, di trovarsi cioè dove allo stato naturale, e dove sullo stesso orizzonte metamorfosate, sembra a mio credere bastevole, a comprovare l'origine metamorfica delle dolomiti: essendo altrimenti impossibile il farci ragione, come uno stesso mare potesse sullo stesso orizzonte a sì brevi distanze, depositare materiali così diversi sotto eguali ed analoghe circostanze.

Non voglio per questo negare, che non v'abbiano assolutamente e non possano esistere dolomiti naturali, io non avrei argomenti per provare nè la verità nè la falsità di questo fatto: io non parlo che del Veronese, e dietro quanto ho potuto io stesso vedere, e sostengo unicamente all'appoggio di molti fatti, l'origine metamorfica di tutte le dolomiti di qualunque periodo della mia patria.

(1) Quivi infatti per lungo tratto estendesi la eruzione basaltica.

Infatti nel periodo jurasico non solo, ma eziandio nell'epoche cretacea superiore ed inferiore, e persino nei sedimenti terziarii banchi più o meno potenti di roccie metamorfiche e dolomitiche, si alternano a brevi intervalli colle roccie calcaree più pure: ed ove cotali dolomiti non fossero di origine metamorfica, converrebbe ammettere che in una stessa epoca lo stesso mare alternativamente depositasse sedimenti diversissimi (1).

Le serie dei terreni che seguono il periodo jurasico, sieno cretacei o terziarii, se è chiara per sè stessa presa in largo senso, non lo è del pari se vogliamo fare attenzione ai varii membri, nei quali questi terreni furono divisi e suddivisi. — Innanzi tutto voglio confessare, che egli è appunto sui più antichi sedimenti del periodo cretaceo, che io ho pubblicate alcune opinioni, che furono in parte esatte ed in parte errate, o dirò meglio, giuste per tutto il Veronese, tranne che per una sola località, quale è quella di cui impresi ad illustrare la Flora fossile, in una parola pel monte Colle, che da qualcuno forse a torto venne alle epoche cretacee riferito. Le indagini minuziose che ho instituite non ha guari, mi pongono in caso di raddrizzare ora alcuni fatti sulla successione delle roccie cretacee del Veronese, le quali bene spesso per la loro natura in mille guise alterata dalle roccie basaltiche, possono trarre in errore i più oculati naturalisti. Il calcare neocomiano ora bianco marmoreo compatto, detto *majolica* volgarmente, ora marnoso, leggermente verdognolo, o roseo, o cenericcio (similissimo all' *Albarese*) ora argilloso, ed alternante con schisti di vario colore cinerei o bituminiferi, intersecato da vene od arnioni di piromaco, ora di color epatico, ora verde, ora nero, ora giallo di miele, e più comunemente di color perlaceo, è il membro più antico della formazione cretacea inferiore, che adagiasi sul calcare oxfordiano. — In alcune località però hacci una roccia marnoso-sabbiosa giallastra, ora compatta ed ora sabbiosa, e sempre cristallina, con vene ed arnioni di quarzo, assai rozzamente stratificata, che in alcuni luoghi sembra sottoposta al marmo majolica o calcare ad aptici *(Aptychenschiefer)*, del quale quindi dovrebb' essere più antica. È questa la roccia che appellasi dal volgo veronese *preapura,* e che deve essere

(1) Alcuni da questi stessi argomenti da'quali io deduco l'origine metamorfica delle dolomiti, traggono invece le loro ragioni per provare l'origine naturale (per via umida) di queste roccie: come infatti potrebbe la forza metamorfosante avere agito alternativamente sopra alcuni strati, e lasciarne tanti di intatti? ? A questi io rispondo, come si possono conoscere le relazioni dei varii strati colle roccie di emersione, per determinare le leggi del metamorfismo!

riferita all'epoca cretacea, come è evidente dal suo avvicendarsi non di rado col calcare decisamente neocomiano. Come in alcuni luoghi la *preapura* forma una testata unica sottoposta al calcare neocomiano, così io all'appoggio di questo fatto definivala di questo calcare più antica. In appresso avendo veduti in più luoghi alternare queste due roccie senza regola nè ordine alcuno, ho dovuto convincermi non esser altro la *preapura*, che lo stesso calcare ad aptici metamorfico. Se però è vero questo generalmente per tutto il Veronese, v' ha per qualche luogo non poco incertezza. Nel paese di Tregnago, p. e. sul colle ove sorge un diroccato castello dell' Età di Mezzo, troveresti la seguente successione di roccie, che costituiscono anche l' intero vicino monte *Precastio* e *Gardon*. Alle radici un calcare rosso carnicino, che non è altro che la roccia oxfordiana metamorfosata, la quale e quivi ed anche nel monte *Cagalati* ed altrove, nelle ultime testate diviene meno compatta, friabile e di colore giallastro, non differente in questo per nulla dalla *preapura cretacea* testè accennata. Sovra quest' ultimi strati di tale roccia jurasica, nel monte *Castello* del quale ragiono, succede una pietra rozza arenacea, friabile e giallastra ch' ha più l' aspetto di un conglomerato che di una roccia stratificata. È piena di frammenti angolosi di quarzo, talora allineati in filoncini, e tal altra aggruppati in arnioni, ed assai frequentemente, a pezzi angolosi di calcare neocomiano naturale non metamorfico commista.

E nel *M. Castello* e nel *M. Verdella*, e sulla strada detta *Calcarara* dello stesso paese di Tregnago, tale roccia vedesi coperta dal calcare ad aptici o *majolica* de' nostri villani, al quale succedono la scaglia, e quindi le roccie nummolitiche, che formano la vetta del M. Gardon sopra nominato. Io ho definita questa roccia, che è la *preapura* de' paesani, per decisamente cretacea, e tuttora per questi luoghi persisto nell' istessa opinione e reputola cronologicamente più antica (sebbene coeva ed inseparabile) del calcare marmoreo bianco (neocomiano!) che la ricopre.

Il chiar. cons. montanistico il signor Fr. Foetterle, che fu con me sopra i luoghi nominati, sembrò di contrario parere, e la reputerebbe per terziaria, od almeno di formazione più recente del calcare neocomiano che la ricopre. Ed infatti, trovandosi in questa roccia sabbiosa giallastra frammenti angolosi di marmo majolica bianchissimi e naturali, com' è possibile se sono dessi più recenti della roccia che gli racchiude, che si trovino in una roccia più antica impigliati?? L' obbietto mossomi dal chiar. signor Foetterle, e che più fiate si facemmo vicendevolmente negli anni andati fra me ed il cav. Zigno, che pur meco vide que-

sti luoghi, è naturalissimo e logicissimo: ma d'altra parte è possibilissimo che metamorfosandosi questa roccia, ovvero sottoposta colle sopragiacenti roccie a qualche potente sollevamento o compressione, od a qualunque altro avvenimento, fosse qui e qua rotta e screpolata, di maniera che vi potessero penetrare frammenti de' sedimenti soprastanti.

Ovvero potrebbe darsi che depositato quello primo strato della *preapura* dal mare cretaceo, v'avesse una qualche sospensione nei sedimenti, durante la quale, screpolato lo strato per azioni plutoniche, al succedervi gli altri sedimenti, potessero questi in parte insinuarvisi. Non dovrebbero però essere in questo secondo caso quei frammenti di majolica angolosi. E non potrebb' essere che trovandosi questi frammenti angolosi sempre a contatto del piromaco e con esso mescolati, che per un'azione di questo minerale sconosciuta, si fossero mantenuti intatti contro alla forza metamorfosante alla quale tutto questo strato veniva sottoposto? Io non saprei come meglio decidere — trovo giusta l' obbiezione, ma non posso rinunziare all'idea che questa roccia sia cretacea, come sembra esserlo in fatto.

Veramente se dovessi giudicare da quanto osservasi nel M. Colle, dove una roccia mineralogicamente eguale a quella sopra nominata, ed apparentemente alla majolica sottoposta, appartiene senza dubbio ai terreni di sedimento superiore, dovrei per analogia sancire terziarie anche le roccie del M. *Castello* e *Calcarara*. Ma nulla meno non so mutare opinione, dappoichè nella *preapura* veramente cretacea troveresti sempre il piromaco, in quella del M. *Colle* ed in generale in tutti gli strati metamorfosati de' terreni terziarii, la silice nel Veronese, non trovasi quasi mai, e se pur talora incontrasi è d' assai diversa da quella cretacea, e manca sempre nelle *preapure* jurasiche! Questo fatto grossolano a dir vero, e di un valore forse semplicemente locale, può giovare e distinguere nel Veronese certe roccie anche dietro i soli caratteri esterni, ai quali dobbiamo ricorrere nella mancanza dei dati positivi offertici dalla paleontologia.

Alle testate dell' epoca neocomiana, succedono sviluppatissime quelle della creta superiore, della scaglia *(Hippurittenschichten)*, fra le quali in non pochi luoghi troveransi alcuni strati che mineralogicamente parlando, non si saprebbero distinguere dagli strati della calcaria oxfordiana bianca, ed altri affatto identici a *mattoni* terziarii della *Valle pantena*, altri così argillosi bianchi e farinosi da simulare il gesso *(Gesso di Marcellise)* ed alcuni finalmente metamorfici, non dissimili dalla vera *preapura*. È nei potenti strati di questa forma-

zione che si estraggono tutte quelle scaglie colle quali in generale si lastricano le vie di Verona (1), e colle quali si coprono le umili abitazioni dei nostri montanari. A questi sedimenti seguono i terreni terziarii bene caratterizzati nel loro complesso, non così nelle loro parti. Frattanto lo strato terziario più antico è senza dubbio il calcare arenaceo brecciato dal M. Spilecco a *Terebratula polymorpha* a *Coralli*, a *Corallinites*, a *Cylindrites*, a *Burguetocrinus*, come io credo avere a sufficienza dimostrato nella mia memoria sul M. Spilecco (2). — A questa roccia più antica e tanto simile talora al *Granitello* di *Mosciano*, succedono normalmente i calcari nummolitici, ma non di rado in vece in alcuni luoghi, banchi più o meno potenti di vacchie e di peperiti con essa si avvicendano, massime nella parte nord-est della provincia veronese, e nella vicina provincia di Vicenza. Le roccie nummolitiche devono essere nella provincia di Verona divise in due piani distinti, sebbene coevi, ed è a questi che succedono strati più o meno potenti di argille calcarifere o di marne per lo più giallastre o cinericcie talora metamorfosate, che per mio avviso formano il piano superiore de' terreni eoceni corrispondente forse al piano *Parisiano* del d' Orbigny, laddove quelle probabilmente terrebbero luogo del piano *Suessoniano*.

A tal piano de' terreni eoceni superiori io eguaglierei i banchi fillitiliferi della provincia Vicentina (*Novale, Salcedo, Chiavon etc.*) ed eziandio quella roccia arenacea grigio-verdognola dei contorni di Schio, in una parola la *glauconia* del prof. Catullo: e non saprei cronologicamente distinguere da questa formazione nè separare i tanto famosi strati a filliti di *Sotzka* nella Stiria, di *Haering* nel Tirolo, del M. *Promina* in Dalmazia, di *Roncà*, dei *Vegroni*, di *Fumane*, del M. *Cavolo*, di *Negrar*, e del M. *Colle* nella provincia veronese, che il celebre Heer vorrebbe (parlando di Haering Sotzka e Promina etc.) eguagliare ai banchi di *Stradella* e *Sinigaglia* del Piemonte e della Romagna, che per mio avviso sono di più recente formazione e spettano senza dubbio al terreno mioceno (3).

Con questi strati non finisce la serie de' terreni terziarii del Veronese, che

(1) Dissi in generale, perchè fra le lastre delle quali sono selciate le vie di Verona, ce n'ha eziandio non poche spettanti geologicamente al periodo jurasico.

(2) *Descrizione di alcuni fuchi fossili del M. Spilecco.* Rivista period. dei lavori dell' I. R. Accademia di Padova. Trim. III, IV, 1855-1856

(3) Vedi Massal. *Descrizione dei fuchi fossili del M. Spilecco*, pag. 9, e nota pag. 29.

anzi abbiamo delle altre stratificazioni più recenti che si stendono in parte sulle rive del Benaco (1), e formano molte delle minori eminenze del Veronese.

Queste colline vennero da me fino del 1853 (2) definite così ad occhio per pliocene senza l' appoggio di fossile alcuno: ora però mercè le scoperte dei due bravi naturalisti Pizzolari e Pellegrini, sembrano dover essere senza dubbio riportate ai banchi più superiori dei terreni terziarii. Non vorrò per altro asserire che le argille di *Porcino* presso Caprino spettino al periodo plioceno come quei signori hanno asserito, potendo essere forse di epoca più antica e rappresentare appo noi il periodo mioceno, laddove i conglomerati, banchi di argille, e marne tanto sviluppate a Castion, più probabilmente costituiranno il terreno subapennino del Veronese. La raccolta de' fossili alla quale attendono con tanto zelo quei due naturalisti, porrà fuor di dubbio la questione.

Frattanto restringendomi al M. Colle, ecco la serie dei terreni che la costituiscono. — Calcare oxfordiano dolomitico forma la base del Monte: gli ultimi strati, visibili nei botri che lo circondano, sono di color giallo e di natura arenacea variabile, identici mineralogicamente ad un altro strato a loro sovraincombente, egualmente metamorfico ed arenaceo, nel quale sono racchiuse le poche reliquie vegetali scopo del presente lavoro; il resto del monte è calcare neocomiano che succede superiormente al banco a filliti. L' eguaglianza mineralogica di queste due roccie tanto diverse di epoca, l'identità loro colla *preapura* di altri luoghi, e la loro apparente successione nel M. Colle, furono la cagione che si riferisse all' epoca cretacea il M. Colle (3).

Per quante volte mi facessi ad esaminare e studiare questo monte, sempre rimasi nella stessa opinione. Il parere però del cons. Foetterle che alla sola vista delle reliquie vegetali, definiva per terziaria la flora del monte Colle, e l'eguale giudizio del sig. E. Wolf che dietro mia preghiera visitava questo monte, mi posero nella necessità di dover uscire da questa incertezza. — E siccome pel M. Colle era impossibile cambiare parere, così mi feci ad indagare altri luoghi della provincia Veronese e Vicentina, e fui avventurato di scoprire finalmente le stesse

(1) Da Pesena, Costerman, Caprino, tutto quel tratto che si estende fra Pescantina, Bussolengo, Pastrengo, Verona, S. G. Lupatoto e Buttapietra, Mozzecane, Villafranca, Valeggio, M. Bianco, M. Magarin, Salionze, Peschiera, Lazise, Bardolino, Colà, M. Raso, Castelnuovo, Sona Custoza, M. Goi, Castel d' Azzano, Volta, Cavriana, Pozzolengo, Castiglione, Desanzano, Sermione, Padenghe, ecc., ecc.

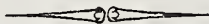
(2) Massal., *Sulle Pandanee fossili*, pag. 13.

(3) Vedi *Specola d' Italia*, Ann. I, n.° 10. — *Notizie scientific. dell'Ibis*, pag. 152-153.

ed identiche reliquie vegetali in altri luoghi decisamente terziarii, e per conseguenza ora devo far eco al giudizio del sig. Foetterle. Conobbi allora essere apparente la sovrapposizione delle roccie nel M. Colle, e come lo strato a filliti sembrasse sottoposto al calcare neocomiano ed unito all' oxfordiano, per uno spostamento avvenuto nella direzione del nord al sud.

Noterò alla fine di passaggio, come io fino dal primo momento che vidi un frammento di pianta fossile del M. Colle, lo definissi a priori per terziario senza ancora avere visitato il luogo, e di ciò mi potrebbe far fede una lettera che indirizzai nel mese di maggio 1854 al chiar. cav. Ach. De Zigno (1). In appresso la natura mineralogica della roccia, la sua anormale stazione, o meglio la sua apparente sottoposizione al calcare neocomiano, e più il parere di alcuni geologi, mi fecero cambiare opinione. È questa una novella prova quanta maggior fede dobbiamo talora prestare alle nostre prime opinioni scevre da idee preconcette e non affascinate da autorità: essendo inalienabile a coloro che studiano sul libro della natura, quella sublime potenza intuitiva, che di rado o quasi mai conduce in errore. Il chiar. prof. Catullo potrebbe servirci in questo argomento di sublime testimonianza.

(1) A questa lettera rispondeva il cav. Zigno il 3 giugno 1854 colle precise parole: *Dalla posizione indicatami, sono indotto a dividere la di lei opinione che le piante presso Bolca (M. Colle) possano essere terziarie*, ecc. »

FLORA FOSSILE DEL MONTE COLLE

Il monte Colle giace nel comune di Bolca, al sud-ovest del M. Purga e delle famose cave ittiolitiche. Non è un monte isolato o particolare, ma una eminenza o meglio il dosso d'uno dei versanti de' monti che circondano ad occidente il paese di Bolca. La composizione geognostica di questo monte fu qui sopra descritta, ed eziandio venne stabilito il periodo geologico al quale deve spettare quello strato fillitifero. Ora non rimane di dire che dell' estensione dello strato e delle sue reliquie organiche.

Lo strato a filliti di natura arenacea, di colore giallastro volgente al rosso di mattone, non si estende più in là di 2, 3 pertiche quadrate in tutto, ed è senza dubbio una porzione staccata, e quivi per un qualche cataclismo, dalla vicina eruzione basaltica balestrata. Contiene molte piriti di ferro, squame e qualche scheletro di pesce. Il celebre Heckel, al quale inviai queste reliquie, trovolle spettanti al genere *Rhombus*, e ciò appoggia e conferma l'epoca terziaria anche delle piante con questi ittioliti associate.

Assai scarse sono le reliquie vegetali, e si riducono in tutto a 4, 5 specie, nè per avventura maggior numero potranne essere scoperto in questo luogo, avendo io esplorato e fatto fendere tutto lo strato. Spettano esse, due alle dicotiledoni, una alle conifere, ed una che è la più frequente ed interessante, probabilmente ad un genere novello. Della conifera non scoprii che foglie e ramoscelli, nè traccia veruna de' frutti. Fermo nell' opinione che fossero di epoca cretacea queste piante, definii quella pella *Geinitzia cretacea* (1): ora però devo rettificare quest' errore ed attaccare queste impronte agli *Araucarites*. Lo stesso devo dire delle due dicotiledoni, che prima io credetti di collocare fra le alghe, ma che ora non posso staccare dalle miricee e dalle pomacee. È questa una prova novella, quanto interessi conoscere talora l' epoca geologica di un terreno, prima di decidere la classificazione dei resti organici : i quali, massime se animali, devono essi servirci di guida per l' epoca del terreno, laddove per le piante e massime per certi organi conservatori quasi affatto eguali, la determinazione non può essere esatta, ove non preceda la conoscenza del terreno.

(1) Vedi *Specola d' Italia*, ann. I, n. 10, e *Notizie scientifiche dell' Ibis*, pag. 152, 153.

Sulle altre impronte io ho stabilito il genere *Aularthrophyton* (1): quali sieno i suoi caratteri particolari, e con quali piante del mondo attuale debba essere paragonato, sono le questioni che ora andrò esaminando.

AULARTHROPHYTON

Nov. gen.

Delle impronte di questo genere, io ho scoperte nel M. Colle più di 40 esemplari, in tutti gli stati di sviluppo: ramoscelli d' ogni forma, d' ogni età, porzioni del tronco, e perfino una pianticella pressochè intera, per cui mi trovo in grado di darne una completa illustrazione. Malauguratamente non si scoperse alcun organo riproduttore, nè fiori nè frutta, se ne eccettui un' esile impronta (tav. III, fig. 4) che non so bene definire se a quest' organi importanti debba appartenere.

Gli *Aularthrophyton* erano umili pianticelle cespistose dell' altezza di 3 a 5 spanne od in quel torno, ramosissime, con un tronco cavo nell' interno e nodoso, e striato esternamente, del diametro di uno o due pollici. I rami erano esili attenuantisi all' estremità, sempre alterni e dicotomi, e nascenti alla stessa foggia dei *Calligonum, Salicornia. Strumphia, Casuarina* fra le fanerogame, e *Corallina* e *Tuna* fra le crittogame: sono vuoti nell' interno, e spiccatamente nodosi ed articolati, coi nodi che attraversano parte a parte ed interrompono l' interne cavità della pianta. Gli articoli sono disuguali in lunghezza ed in spessore, talora esternamente lisci, e talora con coste più o meno rilevate, che non può essere stabilito se sieno due o 4 trovandosi ora l' uno or l' altro caso.

Fra le piante viventi io non conosco che i *Calligonum* e più le *Salicornia*, che a queste strane impronte si avvicinino: l' interna struttura però è affatto diversa. — Fra le piante fossili si trovano maggiori analogie, ed i *Caulinites* ed i *Culmites* stanno agli *Aularthrophyton* assai dappresso: anzi coi *Caulinites* hanno tali somiglianze che sembrerà non naturale la loro separazione. Differiscono però gli *Aularthrophyton* dai *Caulinites* anzi tutto, per la mancanza di cicatrici annulari nei meritalli, prodotte dalla presenza di peli o di foglie o di radici, che queste piante tanto incerte, ornavano; in secondo luogo, pei nodi od articolazioni che attraversano i rami degli *Aularthrophyton* e la loro interna vacuità; laddove nei *Caulinites* sembrano in vero articolati, ma le loro cicatrici annulari non passano nell' interna sostanza, e sono conseguenze di foglie o di peli o di radici cadute (per quanto sappiamo) non di veri nodi. A questo aggiungasi l' interna vacuità degli *Aularthrophyton*, la solidità dei *Caulinites*. Per queste ragioni io reputo questo mio nuovo genere, non a torto proposto. Sarà quindi questa la diagnosi generica.

(1) Vedi *Notizie scientifiche dell' Ibis*, pag. 153.

AULARTHROPHYTON.

Caules ramosi, articulato-nodosi, cavi (cavitate diaphragmatibus instructa) articulis inaequalibus.

Quanto dicemmo delle differenze di questo genere coi *Caulinites*, dicasi eziandio pei *Culmites*, pei *Bambusium* e le *Bajera*, dei quali tutti è detto *caule semplice* o *ramoso articolato*, ma non più in là. Veniamo ora alla descrizione della specie.

Aularthrophyton formosum, Massal.

Tav. I (fig. 1, 4), Tav. II (fig. 1, 2), Tav. III (fig. 1, 3), Tav. IV (fig. 1, 2), Tav. V (fig. 1, 3), Tav. VIII (fig. 1, 2, 3).

Innanzi tutto devo fare avvertito, che ho creduto ben fatto di mutare il nome specifico di questa pianta, che eragli stato imposto nell' articolo sulla *Flora cretacea* del Veronese (1): cioè *Aularthrophyton petraepurae*, in quello di *Aularth. formosum*, e ciò dopo che ho verificato non spettare alla vera *Preapura* cretacea questa pianta, e per non ricordare un errore col nome.

Sarebbe assai difficile l'offrir quivi una diagnosi specifica, che tutte comprendesse le varie forme di questo vegetale, del quale ho voluto figurare tanti saggi a bello studio, a fine di offerire un' idea completa di questa pianta. La sola ispezione delle figure, basterebbe forse a questo scopo, più di qualunque accurata descrizione: ma come, per quanto sia esatto il disegno, non si può mai giungere a rilevare con assoluta esattezza tutte le più piccole note e caratteri, così credo opportuno di dare la descrizione di ogni singolo saggio figurato, traendola dagli originali medesimi.

Tavola I, fig. 1.

È questo uno dei più belli e perfetti saggi della nostra pianta, lungo 14 centimetri e mezzo, ed ornato di sei rami: il diametro degli articoli varia dai 4 ai 5 millimetri, mentre la lunghezza dei meritalli si estende dai 10 ai 15 millimetri. In questo saggio i nodi marcati della lettera *b* formano una cresta saliente assai spiccata e manifestamente attraversante tutto lo spessore del meritallo: la cavità interna è dell'ampiezza di 1 millimetro ed $\frac{1}{3}$, ad un 1 mill. e $\frac{2}{3}$ fino a due, e forma un canale assai distinto e marcato nella figura colla lettera *a*: e da ciò risulta che lo spessore della parte esterna di questo saggio era di poco maggiore di un millimetro. La natura legnosa di questo vegetale è a sufficienza dimostrata dalle forti e profonde impronte che hanno lasciato sulla roccia. La tavola VIII offre questo stesso esemplare riedificato e segnato de'soli contorni, affinchè meglio appariscano in *a* i nodi, in *b* la cavità o canale interno segnato da leggeri ed appena visibili setti trasversali o diafragmi, in *c* lo spes-

(1) Vedi *Notizie scientifiche dell' Ibis*, pag. 153.

sore della parte esterna. Da questa figura apparirà chiara la convenienza del nuovo genere *Aularthrophyton*, e la sua differenza notabile dai *Caulinites*.

Tavola I, fig. 2.

Quest' esemplare lungo 11 centimetri, con principii ed indizii di 4 rami, riunisce in sè tutti i caratteri dei *Caulinites*, e non ne dovrebbe essere staccato, se le molte figure qui offerte ed i molti saggi che ne posseggo, non mi avessero fatto evidentemente conoscere non esser egli che uno stato del mio *Aularthrophyton*. I nodi in questo saggio sembrano frequentissimi e ravvicinati, e distanti fra loro 1 millimetro ed $\frac{1}{3}$, e mai più. Il suo stato di conservazione non lascia bene vedere lo spessore esterno ed interno, ma dall' ispezione dell' originale apparisce manifestamente, che i setti trasversi non sono i veri nodi, ma i diafragmi della interna cavità, che per essere questo ramo più adulto, avranno raggiunto una maggiore consistenza.

Tavola I, fig. 3.

Da quest' esemplare lungo 9 centimetri con 3, 4 rami, appare manifesto che la cavità interna era provveduta di diafragmi, e che nell'antecedente il ravvicinamento dei setti a questi spettava, e non ai nodi. — Colla lettera *a* sono marcati i nodi in questo saggio, colla lettera *b* lo spessore esterno, colla lett. *c* il canale ed i suoi diafragmi. I meritalli di quest' esemplare variano in lunghezza dai 10 ai 13 millimetri, ed il loro diametro, dai 4 ai 6 millimetri.

Tavola I, fig. 4.

L' esemplare è lungo 11 centimetri od in quel torno, provveduto di 5 rami alterni dicotomi. I meritalli variano dai 3 ai 9 millimetri di lunghezza, e sono larghi 4 millimetri. Anche in questo saggio è evidente il canale interno, e l' esterna grossezza, marcata come sopra colle istesse lettere. La dicotomia dei rami è pure patente. La figura 3, tav. VIII, offre quest' esemplare riedificato e segnato coi soli contorni, onde più evidente ne riesca quanto fu detto.

Tavola II, fig. 1.

Bellissimo saggio è questo, lungo 24 centimetri, ed ornato di 10, 12 rami: alla base i nodi variano di lunghezza dai 10 a 15 millimetri, e sono larghi 4, 5, laddove nei rami superiori i meritalli si allungano ed arrivano alla lunghezza di 20, 30 millimetri, mentre non giungono al diametro di 3 millimetri. Si vede chiaro in questo saggio, che i diafragmi del canale interno esistevano nei rami adulti, laddove sparivano nelle giovani messe, le quali andavano sempre più assottigliandosi fino a sparire. — Le lettere *a*, *b*, *c* indicano le stesse particolarità di cui sopra.

Tavola II, fig. 2.

Per lo stato di conservazione è questo uno dei saggi migliori, ma insieme uno dei più difficili ad essere figurato, con tutte quelle accidentalità che lo accompagnano. È lungo 17, 18 centimetri ed ornato di 12, 15 rami. Nella figura 2 tav. VIII che offre questo istesso saggio delineato a contorni si vedrà meglio lo spesseggiare dei nodi (*a*), la loro contorsione, la grossezza (*b*) dell' esterno inviluppo, e l' interna cavità (*c*). — I meritalli variano in lunghezza da uno a 4 millimetri, e non sorpassano il diametro di 3, 4. Se si volesse procedere con sottigliezza, sembrerebbe che i saggi fig. 1, 2, 3 tav. VIII dovessero formare 3 specie distinte di questo stesso genere, tanto poco fra loro differenti, ma confrontando tutti gli esemplari figurati, vedrassi evidente essere tutti figli di una stessa pianta.

Tavola II, fig. 3.

Quest' impronta per me è indeterminabile, e non saprei se al regno vegetabile od animale dovesse essere riferita. Potrebbe essere una porzione della pinna di qualche pesce, e se pianta, potrebbe essere paragonata colle foglie dei *Zamites* e meglio dei *Potamogeton*. È unica, e non è facile sopra un sol saggio decidere.

Tavola III, fig. 1.

Esemplare lungo 16, 17 centimetri, con soli 3 rami : alquanto adulto, e perciò mostrante i diafragmi assai sviluppati, e poco chiari i nodi. In questo saggio non può essere decifrata la lunghezza dei meritalli, la loro larghezza varia dai 3 ai 5 millimetri.

Tavola III, fig. 2.

Più chiara è la struttura e conformazione dei nodi in questo saggio lungo 14, 15 centimetri, e di 7, 9 rami adorno : i meritalli sono lunghi dai 10 ai 14 millim. e larghi 3, 4, sono evidenti i nodi (*a*), la corteccia (*b*), e il canale interno (*c*).

Tavola III, fig. 3.

Esemplare lungo 7 centim. circa, con 4 ramoscelli, i quali sebbene giovani pur lasciano benissimo vedere i nodi *a*, la corteccia *b*, ed il midollo coi diafragmi *c* ; i meritalli di questo saggio poco variano in lunghezza e larghezza dell' antecedente.

Tavola III, fig. 4.

Quest' impronta sembra forse appartenere agli organi riproduttori di qualche pianta, e probabilmente potrebbe essere il frutto od il fiore degli *Aularthrophyton*. Ma essendo staccato,

isolato, non può essere deciso. È costituita da un nucleo (*a*) piriforme, da un corto peduncolo (*c*), e da tre appendici (*b*) filiformi di diversa lunghezza. Che sia forse una porzione del genere *Pilularia* ??

Tavola IV, fig. 1, 2.

Tutti i saggi figurati nelle tre tavole antecedenti, non offerivano che le impronte degli *Aularthrophyton*, i due rappresentanti nella tavola 4 esibiscono invece due bei rami del vegetale in questione interi, ed allo stato naturale. In essi si è conservato il midollo, il quale dovette probabilmente essere bianco, conservando ancora lo stesso colore, nullameno tutto il resto della roccia sia di colore giallastro. Se non fosse questo il vero midollo della pianta, o non avesse esistito, il materiale insinuatosi dovrebbe avere il colore del sasso. L' altezza di quelle impronte è di 2 millimetri od in quel torno, la lunghezza dei meritalli poco varia da quella degli antecedenti, ed i diafragmi sono assai irregolari. L' esemplare fig. 1 è lungo 25 centim. circa ed ha 5, 6 rami, quello della fig. 2 è lungo altrettanto ed ha 10, 12 rami. Sì nell'uno che nell' altro osservasi il bianco midollo qui e qua mancante. Somigliano talmente queste impronte alle articolazioni di certi crinoidi, da far sospettare della loro vegetale natura.

Tavola V, fig. 1, 2, 3.

Fin qui non avemmo che ramoscelli più o meno adulti, in questa tavola sono figurate tre porzioni del tronco, le quali ove i molti passaggi non fossero evidenti, potrebbero sembrare piante affatto diverse. L' esemplare fig. 1 è il più adulto, e mostra ancora in *e* una porzione dell' interna cavità vuota, in *f* l'origine di parecchi rami alterni, in *a* i pronunciati nodi, ed in *b* la corteccia, in *c* il midollo e suoi diafragmi risentiti. Quest' esemplare e quello della fig. 2 sono per poco della stessa età e natura, e similissimi ai tronchi delle *Arundo* e *Phragmites*, ai quali gli avrei riuniti, ove l'esemplare fig. 3 non facesse vedere evidente la somiglianza di tutte queste impronte, coi saggi figurati nelle antecedenti tavole. L'esemplare della fig. 1 è lungo 21 centim. circa, largo 10, 12 millimetri ; il secondo è lungo 14 centimetri, largo 6, 7 millimetri; il terzo è lungo 17 centimetri e largo 10. Se i *Caulinites* vengono paragonati alle Najadee, gli *Aularthrophyton* con quella struttura che vedemmo, dovrebbero forse spettare alle Graminee, ma nulla io saprei dire di preciso.

Araucarites ambiguus, Massal.

Tav. VI, fig. 1. — Tav. VII, fig. 1.

A. Ramis alternis (transverse zonato-costatis), foliis subfalcatis ovato-ellipticis obtusiusculis subdecurrentibus patentibus, apice imbricatis.

Syn. *Geinitzia cretacea* (non Endl.). *Notiz. scient. dell' Ibis*, pag. 153.

Obser. Fisso nell' idea che il monte *Colle* fosse cretaceo, non potea distinguere queste impronte dalla *Geinitzia cretacea*, la quale d'altra parte pelle foglie è somigliantissima a quest' *Araucarites*. Come sopra dissi, ora devo mutare parere e rettificare questa classificazione. — Sta ora a vedere se quest' *Araucarites* del M. Colle, sieno veramente una specie conosciuta o non descritta come io suppongo. Lo stato di conservazione di queste impronte è tale però da non poter dar luogo ad un giudizio assoluto, per cui io proposi il nome specifico di *ambigua* a questa specie, la quale d'altra parte differisce dall' *Ar. Sternbergii* pelle foglie meno falcate e meno embricate, pelle foglie istesse piane e non costate e pelle zone trasversali dei rami (nate dalla caduta delle foglie) le quali accennano senza dubbio ad una filotassi assai diversa da quella dell' *A. Sternbergii.* Aggiungasi la punta delle foglie più ottusa in queste mie impronte, e l' *habitus* particolare, e troverassi non soverchiamente ardita ed avventata questa classificazione.

Araucarites ambiguus v. bachyphylloides

Tav. VI, fig. 2, 4 — Tav. VII, fig. 2, 3, 7.

A. Ramis alternis (transverse zonato-costatis), foliis ovato-ellipticis obtusis parvis planis ecostatis arcte imbricato-stipatis.

Obser. Sono tanto diverse queste impronte dalle antecedenti, che per poco dubiterei perfino del loro genere, e se non fossero gli esemplari della tav. VI, fig. 4, e della tav. VII, figura 3, 7, che servissero di anello per unire la specie sopra descritta, colle impronte delle tav. VI, fig. 2, e tav. VII, fig. 2, io sospetterei queste due ultimi saggi per specie distinte. Chi però si faccia ad analizzare tutti gli esemplari qui figurati troverà giusto il mio parere, che tutti spettino ad uno stesso vegetale, ovvero a varietà di una stessa pianta. Somigliantissime son quest' impronte al *Brachyphyllum caulerpites* Ung. dei contorni di Schio, ma ne differisce pelle foglie carinate ; anzi a questo proposito farò osservare essere assai probabile che questa specie del prof. Unger, spetti piuttosto agli *Araucarites* che ai *Brachyphyllum*

Myrica salicina, Ung.

Tav. VII, fig. 4, 6.

M. foliis late-lanceolatis v. obovato-lanceolatis, in petiolum attenuatis, nervo primario valido, nervis secundariis obsoletis.

Syn, *Myrica salicina Ung. Icon. pl. foss.* tav. 16 fig. 7 — *Myrica integrifolia Ung.* loc. cit. tav. 16, fig. 6. — *Delesserites colleanus* loc. cit. pag. 153.

Obser. La figura 6 di questa specie quadrerebbe a capello colla *Myrica integrifolia* di Unger, ma io non posso staccarla dalla sua *Myrica salicina*, colla quale conviene a capello la mia impronta fig. 4, perchè non ne so trovare le differenze. Chi darà una sola occhiata a

questi due saggi qui figurati, converrà meco, che sì l'una che l'altra devono appartenere ad uno stesso vegetale. Perchè fossero collocate tanto a sproposito fra le alghe, queste filliti è detto superiormente. Fra le piante viventi la *Myrica sapida* Wall. e *laurina* Sieb. hanno colle impronte del M. Colle ragguardevoli analogie.

Pyrus minor, Ung.

Tav. VII, fig. 5.

P. Foliis petiolatis obovatis integerrimis saepius apice emarginato-retusis (penninerviis) nervo primario valido, nervis secundariis parallelis rectis subsimplicibus (saepe obsoletis) — (*Ung. Flora Sotz.* tav. 38, fig. 16, 24) — *Delesserites retusus* loc. cit.

Obs. Nella mia impronta mancano affatto tutti i nervi laterali, per cui potrebbe sorgere dubbio sulla sua eguaglianza colla specie ungeriana, se nella Flora di Sotzka non avesse il prof. Unger figurato eziandio (fig. 20, 22) dei saggi affatto privi di nervi laterali. Chi è versato in questa fatta di studii, conosce a prova, quanto sia variabile e diverso lo stato delle impronte, e come ben di rado nelle stesse specie si riscontrino nervi, e ne manchi talora ogni traccia. Io credo in questo caso di attenermi al carattere della forma ed alla smarginatura caratteristica dell' apice.

Nota. La fig. 3 tav. VI offre la figura di un' impronta indeterminabile di una porzione di ramo, probabilmente di *Araucarites*.

(*Letta il* 16 *febbrajo* 1857.)

CORREZIONI AL RAGIONAMENTO SULLA
LEANDREIDE

Pag. 434, linea 10 . . . *nitissimo* . . . nitidissimo
» 449, num. 10, colonna seconda . . . *Cestaldo* . . . Certaldo
» 450, num. 3, colonna prima e seconda.
Nel Crescimbeni (Vol. III, p. 88, 89) trovo ricordato anche un illustre militare e poeta *Guido Novello* da Polenta, che fiorì a' tempi di fra Guittone e di Dante, e viveva ancora nel 1290. Potrebbe darsi che il nome *Guido* posto dall'anonimo fosse vero, ma non così il cognome, e dovesse leggersi piuttosto *Novello*, che *Brunello;* tanto più che l'anonimo lo pone tra gli altri due *Guidi*, e tra Guittone *d'Arezzo;* e non vi sarebbe lo sconcio dello avere nominato *Brunello* o *Bornello* due volte.
» » num. 5, colonna seconda.
Ho detto che l' anonimo non palesa il nome di *Jacopo* da *Lentino;* ma più attentamente riletto il passo, cioè: *E notay chomo De Lentino;* deduco che l' amanuense abbia voluto dire: *E nota Yachomo De Lentino.*
» 451, num. 13, colonna prima.
L' anonimo fu esatto. *Jacopo da Imola* è Jacopo de' Carratori o Garatori contemporaneo del Petrarca: e sue canzoni e sonetti trovansi nel Codice Boccoliniano, ov'è appellato *Jacopo da Imola*. Veggasi il volume XXXVIII, pag. 403 e seg. della prima Raccolta di Opuscoli detta Calogerana, ove si riporta una sua canzone e due sonetti; e si scopre che il sonetto diretto al Petrarca (che leggesi anche a pag. 372 del Petrarca Cominiano, 1732) attribuito ad Antonio Beccari, è veramente di Jacopo da Imola.
» » num. 21, 22, colonna seconda.
Il commento attribuito a *Pietro Allighieri* fu impresso la prima volta in Firenze dal Piatti nel 1845, ottavo grande. Vedi il Batines nel Vol. I, Parte III, pag. 635 della Bibliografia Dantesca, dove annovera le varie opinioni sull' autenticità di quel commento. Pietro morì nel 1364, non 1361.
» 452, num. 33, 34, colonna prima.
Di *Antonio Beccari* notava ultimamente parecchie rime a stampa il chiarissimo Francesco Zambrini a p. 14 del *Catalogo di Opere volgari a stampa* dei secoli XIII e XIV (Bologna, Ramazzotti, 1857, ottavo) da lui compilato con somma accuratezza ed erudizione, e dedicato al comune amico nostro il cultissimo uomo Andrea Tessier.
» » num. 36, colonna seconda.
Il Batines (Bibliografia Dantesca, T. II, p. 219, 220) ricorda Dnō *Mengino Mezano* che in un codice della Biblioteca Gambalunga di Rimini, contenente la Divina Commedia di Dante col commento di *Jacopo Gradenigo*, ha due capitoli nei quali fa l'*epitome* della prima e della seconda cantica. Se altro non ha, non può il *Mezano* notarsi fra i *commentatori* di Dante. Vedi il Batines anche a pag. 295, 296 dello stesso Tomo.
» 456, num. 68, colonna prima.
Quel *Jacopo Gradenigo*, che viene accennato dal Batines siccome commentatore di Dante (Vol. II, pag. 219, 220), è certamente il nostro; e di questo suo commento non ebbe notizia l' Agostini.

Pag. 462, num. 36, colonna prima.

Giammaria Barbieri (autore del secolo XVI) a pag. 133 della *Origine della poesia rimata* (Modena, 1790 - 4) chiama questo secondo poeta *Ramberti de Bovalel;* e il Tiraboschi editore di quel libro a pag. 185 lo ritiene italiano, cioè *Ramberti no Buolalello* bolognese: del quale vedi quanto dice il Fantuzzi nel tomo II degli scrittori bolognesi, pag. 350 e seg., a cui il Tiraboschi stesso aveva trasmesse otto canzoni di questo poeta chiamato anche *Lambertino Debuarel*, e *Boverello*, e *Bonarello* e *Bualelli.*

» 465, num. 121, colonna prima . . . *pe* . . . de

Pag. 468, num. 11, col. seconda *Alla* . . . . Ala
» » ivi » *lesquier* . . . lesqier
» 469, num. 3, col. prima *gauz* . . . . gaug
» » num. 4, col. prima *Fosquetz* . . . Folquetz
» » num. 6, col. prima *Pugcibot* . . . Pug Cibot
» » num. 7, col. prima *Mas* . . . . (si ommetta)
» » num. 8, col. prima *Daniels* . . . Daniels,
» » num. 9, col. prima *Perdigon* . . . Perdigon:
» » ivi » *dons* . . . . dous
» » ivi » *Gazardon* . . Gazardon.
» » num. 10, col. prima *doussor* . . . doussor,
» » num. 13, col. prima *sausa* . . . . s'ausa
» » num. 9, col. seconda *Donna Guiderdone* dona guiderdone
» 470, num. 20, col. seconda *sinc* . . . . sine
» 471, num. 16, col. prima *engles* . . . . engles,
» » num. 20, col. seconda *amorose spine* . amorosa spina
» » num. 22, col. prima *Bronelh* . . . Bornelh
» » ivi » *Buvarelh* . . . Buvarelh,
» » num. 22, col. seconda *Buvarelh.* . . Buvarelh,
» » num. 23, col prima *Roman* . . . Roman,
» » num. 25, col. prima *aurit* . . . . auzit
» » num. 25, col. seconda *dopo dire* . . . (si levino queste parole)

Pag. 472, prima del num. 15 si aggiunga:

Num. 13, Non confondere *Ugo di S. Cyr* con *Ugo di S. Cher (de Sancto Caro:* è forse il San Theuder o San Cherfs del Martirologio) teologo morto nel 1263. Vedi *Hist. litt. de France*, Tomo XIX, pag. 38.

Ulteriori correzioni favorite dal chiariss. sig. dott. Giuseppe Todeschini.

Pag. 444, num. 27. *Tersicoro.* Intendi *Stesicoro* ricordato anche da Orazio vicino ad Alceo. Vedi Crasso, pag. 487. Il quale *Alceo* è il più celebre *Alceo* di Lesbo poeta lirico, di cui il Crasso stesso p. 17.

» 449, num. 8. Pare sia da preferire la lezione del codice trivigiano: *Di Anna dopo la morte aspra di Elisa*, cioè dopo la morte di Didone.

» 450, num. 2. *Con gloria del parlar cacciai dal nido.*

Allude certamente a quel luogo di Dante (Purg. XI, 97—99):

. . . . . . e forse è nato
Chi l' uno e l' altro caccerà del nido.

» 452, num. 32. *Jacopo della Lana* fiori prima della metà del secolo XIV.

ELENCO

DEI

MEMBRI E SOCI DELL' I. R. ISTITUTO VENETO

DI

SCIENZE, LETTERE ED ARTI

31 *luglio* 1857.

PRESIDENTE

Menin ab. cav. Lodovico, professore emerito, direttore della Facoltà filosofica dell' i. r. Università di Padova.

VICE-PRESIDENTE

Cavalli co. Ferdinando di Padova.

SEGRETARIO

Namias Giacinto, medico primario nell' Ospedale civile di Venezia.

VICE-SEGRETARIO

Zambra dott. Bernardino, prof. di fisica nell' i. r. Ginnasio-liceale di S. Catterina in Venezia.

MEMBRI ONORARJ

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria FRANCESCO CARLO GIUSEPPE, Principe Imperiale, Principe Reale d'Ungheria e di Boemia, ecc., cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ordine r. di s. Stefano d'Ungheria, ecc. ecc.

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria FERDINANDO MASSIMILIANO GIUSEPPE, cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell' Ordine r. Siciliano di s. Ferdinando e del merito, ecc. ecc. Vice-Ammiraglio e Comandante superiore dell'i. r. Marina Austriaca, Governatore generale del regno lombardo veneto.

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria LUIGI GIUSEPPE ANTONIO, Principe Imperiale, Principe Reale d'Ungheria e di Boemia, ecc. cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ordine r. di s. Stefano d'Ungheria, ecc. ecc.

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria STEFANO FRANCESCO VITTORE, Cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ordine Imp. di s. Stefano d'Ungheria e di quello Imp. Austriaco di Leopoldo, ecc. ecc.

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria GIOVANNI BATTISTA GIUSEPPE FABIANO SEBASTIANO, Principe Imperiale, Principe Reale di Ungheria e di Boemia, ecc., cav. del Toson d'oro Gran Croce dell'Ordine militare di Maria Teresa e dell'Ordine Imperiale Austriaco di Leopoldo, ecc. ecc.

S. A. I. R. l'Arciduca d'Austria LEOPOLDO LODOVICO MARIA FRANCESCO GIULIO EUSTACHIO GERARDO, cav. del Toson d'oro e del r. Ordine Sardo dell'Annunziata, Gran Croce dell'Ordine Costantiniano di s. Giorgio di Parma, ecc. ecc.

S. A. S. il Principe CLEMENTE VENCESLAO di METTERNICH-WINNEBURG, ecc. Grande di Spagna di I. Classe, cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell' Ordine R. di san Stefano di Ungheria (in brillanti), Gran Croce della Croce civile d'Onore, i. r. Consigliere intimo attuale e Ciambellano di S. M. I. R., ecc.

S. E. il sig. co. FRANCESCO ANTONIO di KOLOWRAT LIEBSTEINSKY, cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell' Ordine Imperiale Austriaco di Leopoldo, Croce d'oro della Croce civile d' onore, Bailo Onorario e Gran Croce dell' Ordine sovrano di S. Giovanni di Gerusalemme, i. r. Consigliere intimo e Ciambellano di S. M. I. R., ecc.

S. E. il sig. co. LUIGI PALFFY di ERDÖD, cav. di I. classe dell' Ord. Imp. Austr. della Corona di ferro, cav. dell' Ordine Russo dell'Aquila bianca, dell' Ordine Pontificio di Cristo, i. r. Consigliere intimo, i. r. Ciambellano, ecc.

S. E. il sig. bar. FRANCESCO di GALVAGNA, cav. di seconda Classe dell' Ordine Imperiale Austriaco della Corona di ferro, Commendatore dell'Ordine Pontificio di s. Gregorio il Grande, i. r. Consigliere intimo.

S. E. il sig. co. Andrea Cittadella - Vigodarzere, i. r. Consigliere intimo e Ciambellano di S. M. I. R. A. Gran Maggiordomo di S. A. I. R. l'Arciduchessa Carlotta, ecc.

Francesconi Ermenegildo, i. r. Consigl. aulico, cav. di terza Classe dell'i. r. Ordine Austriaco della Corona di Ferro, Commendatore del r. Ordine Belgio di Leopoldo.

Sartori - Canova Monsignor Giovanni Battista, Vescovo di Mindo, cav. di II classe dell'Ord. Imp. Austr. della Corona di ferro.

Di Sebregondi nob. Giuseppe, co. e patrizio romano, cav. dell'Ordine Imperiale Austriaco di Leopoldo, Gran Croce dell'Ordine Pontificio di s. Gregorio il Grande, cav. dell'Ordine dei Gioanniti e di quello Pontificio di Cristo (in brillanti).

S. E. il Feld-Maresciallo co. Giuseppe Radetsky di Radetz, Cav. del Toson d'oro, Gran Croce dell'Ord. di Maria Teresa e di quello di S. Stefano d'Ungheria (in brillanti), ecc. ecc. Governatore generale emerito civile e militare del regno Lombardo-Veneto, i. r. Consigliere intimo attuale e Ciambellano di S. M. I. R., ecc.

S. E. il sig. co. Leone Leopoldo di Thun - Hohenstein, i. r. Consigl. intimo di S. M. I. R., cav. di prima classe dell'Ord. Imp. Austriaco della corona di ferro, ecc. Ministro del culto e della pubblica istruzione.

S. E. cav. Giorgio Ottone di Toggenburg, i. r. Consigl. intimo di S. M. I. R., cav. di I Classe dell'Ordine Imp. Austriaco della Corona ferrea, ecc. ecc. Ministro del commercio, dell'industria e delle pubbliche costruzioni.

Marzani co. Gio. Battista di Steinhof e Neuhaus, patrizio tirolese, Cav. di seconda Classe della Corona di ferro, Comm. dell'Ord. Pontificio di S. Gregorio il Grande, Consigliere Aulico attuale, Vicepresidente dell'i. r. Luogotenenza veneta.

Negrelli Luigi, cav. di Moldelbe, i. r. Consigliere ministeriale di I classe, cav. di più ordini, ecc.

S. E. il sig. co. Gaetano di Bissingen - Nippenburg, i. r. Cons. int. e Ciambellano di S. M. I. R. A., cav. di più Ordini, i. r. Luogotenente delle provincie venete, ecc. ecc.

S. E. il cav. Carlo Gorzkowsky di Gorskow, Gran Croce dell'Ordine Imp. Austriaco di Leopoldo, cav. dell'Ord. di Maria Teresa, ecc. ecc., Generale di Cavalleria, i. r. Consigl. intimo e Ciambellano di S. M. I. R., Governatore militare di Venezia.

Vacani di Fort'Olivo, barone Camillo, cav. di II classe dell'Ordine Imp. Austr. della Corona ferrea della Legion d'Onore di Francia, e di molti altri ordini, i. r. Tenente Maresciallo del Genio in pensione.

S. E. il sig. bar. De Bach Alessandro, i. r. Consigl. int. di S. M. I. R. A., Gran croce dell'Ord. Austriaco di Leopoldo, e dell'Ord. di Francesco Giuseppe, i. r. Ministro dell'Interno, ecc. ecc.

MEMBRI EFFETTIVI PENSIONATI.

(26 novembre 1839).

Santini Giovanni, cav. di III Classe dell'Ordine Imperiale Austriaco della Corona di ferro, cav. del r. Ordine Danese di Dannebrog e di quello Granducale Toscano di S. Giuseppe, commendatore dell' Ordine Imp. Austr. di Francesco Giuseppe, direttore provvisorio della Facoltà matematica, direttore dell' i. r. Osservatorio e professore titolare di astronomia nell' i. r. Università di Padova.

Catullo dottor Tommaso Antonio, cav. della Milizia Aurata, professore emerito di storia naturale nell'i. r. Università di Padova.

Zantedeschi ab. Francesco, cav. dei ss. Maurizio e Lazaro, professore di fisica nell'i. r. Università di Padova.

(26 novembre 1839 — 16 gennajo 1844)

Fapanni dottor Agostino, cav. della Milizia Aurata, in Venezia.

(26 novembre 1839 — 10 giugno 1851)

Menin ab. Lodovico, *come sopra.*

(26 settembre 1840)

Bizio dottor Bartolomeo, professore emerito dell'i. r. scuola tecnica, in Venezia.

Bellavitis nob. dottor Giusto, professore di geometria descrittiva nell'i. r. Università di Padova, Ispettore provvisorio dell'i. r. scuola reale (tecnica) superiore in Venezia.

Venanzio dottor Girolamo, di Portogruaro.

Sandri Giulio, di Verona.

Bianchetti dottor Giuseppe, in Treviso.

(26 settembre 1840 — 5 giugno 1843)

Nardo dottor Gian-Domenico, direttore della casa degli esposti in Venezia.

(26 settembre 1840 — 16 gennajo 1844)

De Visiani dottor Roberto, professore di botanica nell'i. r. Università di Padova.

(26 giugno 1843 — 4 ottobre 1854)

Turazza dottor Domenico, professore di geodesia e d' idrometria nell'i. r. Università di Padova.

(16 gennajo 1844 — 10 giugno 1851)

Minich dottor Serafino Rafaele, professore di matematica sublime nell' i. r. Università di Padova.

Poli dottor Baldassare, prof. di filosofia teorica e morale e della storia della filosofia nell'i. r. Università di Padova.

(13 gennajo 1846 — 25 marzo 1855)

Namias Giacinto, *come sopra.*

(4 ottobre 1854 — 28 aprile 1856)

Cicogna Emmanuele, cav. della Legion d' Onore, consigliere straordinario dell' i. r. Accademia di Belle Arti in Venezia.

Cappelletto Antonio Alippio, ingegnere meccanico, in Verona.

Zanardini Giovanni, dottore in medicina, in Venezia.

MEMBRI EFFETTIVI NON PENSIONATI.

(4 ottobre 1854)

Zambra dottor Bernardino, *come sopra.*

Canal ab. Pietro, professore di filologia classica per le lezioni di filologia e letteratura latina e di letteratura italiana, nell'i. r. Università di Padova.

Zambelli dottor Barnaba Vincenzo, professore di scienze politiche, e di legislazione amministrativa austriaca nell'i. r. Università di Padova.

Zannini dottor Gio. Battista, in Belluno.

Cavalli co. Ferdinando, *come sopra.*

Fario Leovigildo Paolo, dottore in medicina, in Venezia.

(25 marzo 1855)

Galvani Antonio, chimico, in Venezia.

De Zigno bar. Achille, cav. di III. Classe dell' Ordine Imp. Austr. della Corona di ferro, in Padova.

Sagredo co. Agostino, in Venezia.

(28 aprile 1856)

Bucchia Gustavo, prof. di architettura civile, idraulica, ecc., nell' i. r. Università di Padova.

Pazienti Antonio prof. s. nel r. ginnasio liceale di Vicenza.

Miniscalchi Co. Francesco, ciambellano di S. M. I. R. A., in Verona.

SOCI CORRISPONDENTI

NELLE PROVINCIE VENETE.

(28 novembre 1842)

Parolini cav. Alberto, i. r. Scudiere di S. M. in Bassano.
Parravicini nob. Luigi, direttore della i. r. scuola reale (tecnica) superiore, in Venezia.
Pasini Valentino, dottor in legge, in Vicenza.
De Tipaldo dott. Emilio, cav. dell'Ordine r. Greco del Salvatore, in Venezia.

(7 agosto 1843)

Gera Francesco, dottor in medicina, di Conegliano.
Mugna Gio. Battista, dottore in medicina, in Padova.
Zinelli ab. Federico, professore e vice-direttore dello studio filosofico nel Seminario Patriarcale di Venezia.

(26 maggio 1844)

Asson Michelangelo, chirurgo primario nell' ospedale di Venezia.

(20 gennajo 1845)

Selvatico Estense march. Pietro, cav. di III classe dell'Ordine imp. austr. della Corona di ferro, Segretario e Capo provvisorio dell'i. r. Accademia di belle-arti in Venezia.
Spongia dottor Filippo, Consigliere di Sanità presso l'i. r. Luogotenenza delle provincie venete.

(30 novembre 1846)

Locatelli dottor Tommaso, in Venezia.
Valentinelli ab. Giuseppe, i. r. Bibliotecario della Marciana, in Venezia.

(24 settembre 1847)

Luzzato Samuele David, in Padova.

(8 ottobre 1850)

Minich dott. Angelo, chirurgo primario nell' ospedale di Venezia.

(19 maggio 1855)

Sorio padre Bartolommeo, di Verona.
Veludo Giovanni, i. r. vice-bibliotecario della Marciana, in Venezia.

Massalongo prof. Abramo, in Verona.
Messedaglia dottor Angelo, di Verona.
Pirona professor Jacopo, in Udine.
Martelli Gio. Battista, Consigliere presso l'i. r. Luogotenenza delle prov. venete.
Bassi Gio. Battista, ingegnere di Udine.
Trattenero dottor Vigilio, aggiunto calcolatore astronomo dell'i. r. Osservatorio di Padova.
Ziliotto dottor Pietro, medico primario dell'ospedale di Venezia.

(11 marzo 1857)

Berti dott. Antonio, medico a Venezia.
Marzolo dott. Paolo, medico a Treviso.
Tomada dott. Vincenzo, veterinario all'i. r. Luogotenenza veneta.

(15 aprile 1857)

Balbi cav. Eugenio, prof. s. di storia e geografia nell'i. r. scuola reale superiore di Venezia.
Querini Stampalia co. Giovanni, ciambellano di S. M. I. R. A. a Venezia.
Ragazzini Francesco, prof. di chimica nella r. Università di Padova.

SOCI CORRISPONDENTI FUORI DELLE PROVINCIE VENETE.

Alessandrini prof. Antonio, Bologna.
Amici cav. Gio. Battista, di Firenze.
Antinori commend. Vincenzo, di Firenze.
Arcari Giovanni, ingegnere, in Trieste.
Arneth cav. Giuseppe, cav. dell'Ordine Imp. Austr. di Francesco Giuseppe, Consigl. di Reggenza e Direttore dell'i. r. Gabinetto di numismatica e di antichità in Vienna.
Baumgartner bar. Andrea, Consigliere intimo di S. M. I. R. A., cav. dell'Ordine imp. austr. di Leopoldo, ecc. in Vienna.
Bertoloni prof. Antonio, di Bologna.
Botto prof. Giuseppe Domenico, di Torino.
Bufalini cav. Maurizio, di Firenze.
Capponi marchese Gino, Firenze.
Clementi dott. Giuseppe, in Genova.
Czoernig barone Carlo, cav. di II classe dell'Ordine Imp. Austr. della Corona di ferro, i. r. Capo-Sezione nel Ministero del Commercio.
Dalle Chiaje prof. Stefano, di Napoli.
D'Ettingshausen Andrea, professore di fisica nell'i. r. Università di Vienna.
De Filippi Filippo, dottore in medicina, professore a Torino.
Duca di serra di Falco Domenico, di Palermo.

Franceschi Ferrucci Caterina, Pisa.

Ghega Carlo, dottore in matematica, i. r. consigliere ministeriale, cav. dell'Ordine Imp. Austr. di Leopoldo, ecc. Capo della Direzione centrale per le costruzioni delle strade ferrate, in Vienna.

Giorgini cav. Gaetano, di Firenze.

Giulio prof. Carlo Ignazio, di Torino.

Haidinger Guglielmo, Cons. di Sezione, direttore dell' i. r. Istituto geologico dell' impero a Vienna.

Hyrtl Giuseppe, cav. dell'Ordine Imp. Austr. di Francesco Giuseppe, professore di anatomia nell'i. r. Università di Vienna.

Kreil dottor Carlo, cav. dell'Ordine Imp. Austr. di Francesco Giuseppe, Direttore dell'Istituto centrale per la meteorologia ed il magnetismo tellurico, in Vienna.

Linari prof. Santi, in Napoli.

Marianini cav. Stefano, in Modena.

Matteucci prof. Carlo, di Pisa.

Moris cav. Giacinto, di Torino.

Mossotti cav. Ottaviano Fabrizio, di Pisa.

Negri dottor Cristoforo, in Torino.

Pareto march. Lorenzo N., di Genova.

Parlatore prof. Filippo, di Firenze.

Pianciani prof. Gio. Battista, di Roma.

Piria prof. Rafaele, di Pisa.

Plana commend. Giovanni, di Torino.

Puccinotti prof. Francesco, di Pisa.

Ridolfi march. Cosimo, di Firenze.

Savi cav. Paolo, di Pisa.

Scacchi prof. Arcangelo, di Napoli.

Sismonda cav. Angelo, di Torino.

Spinola march. Massimiliano, di Genova.

Tenore cav. Michele, di Napoli.

Tommaseo Nicolò, in Torino.

Unger Francesco, professore di botanica in Vienna.

Zescevich Giovanni professore dell'i. r. Collegio di marina, in Trieste.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE IN QUESTO VOLUME

FINE DEL SESTO VOLUME.

Fig. 1.a

Fig. 2.a

Fig. 3.a

Fig. 4.a

Massal. del.

Fig.e 1.a 4.a Aulacarthrophyton formosum. Massal.

Fig. 1. 2. Calarthrophyton formosum Massal. Fig. 3. Ind.

Fig 1-3. — Aularthrophyton formosum Massal. Fig. 4. Indeter

Fig. 1-2. Calarthrophyton formosum. Massal.

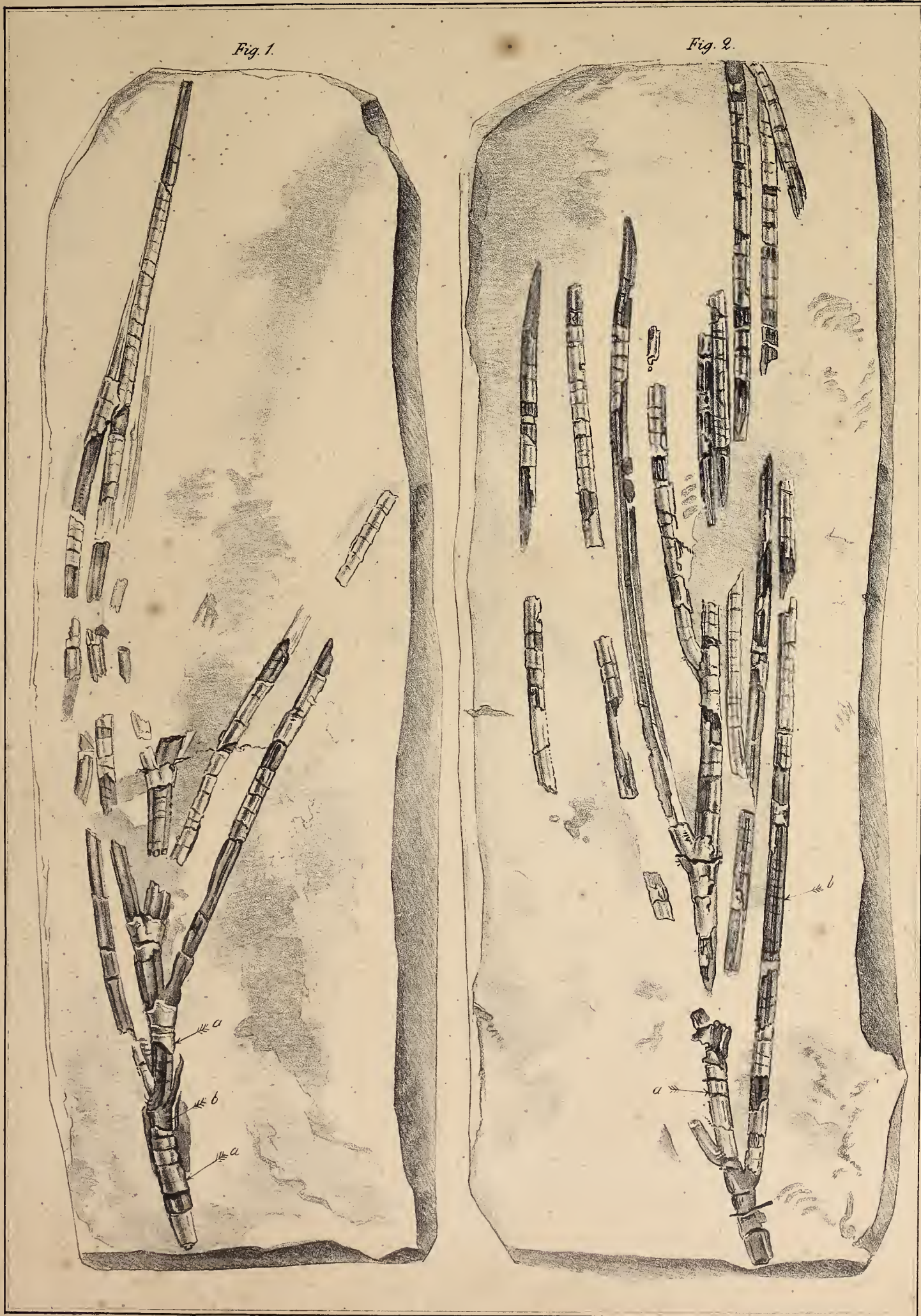
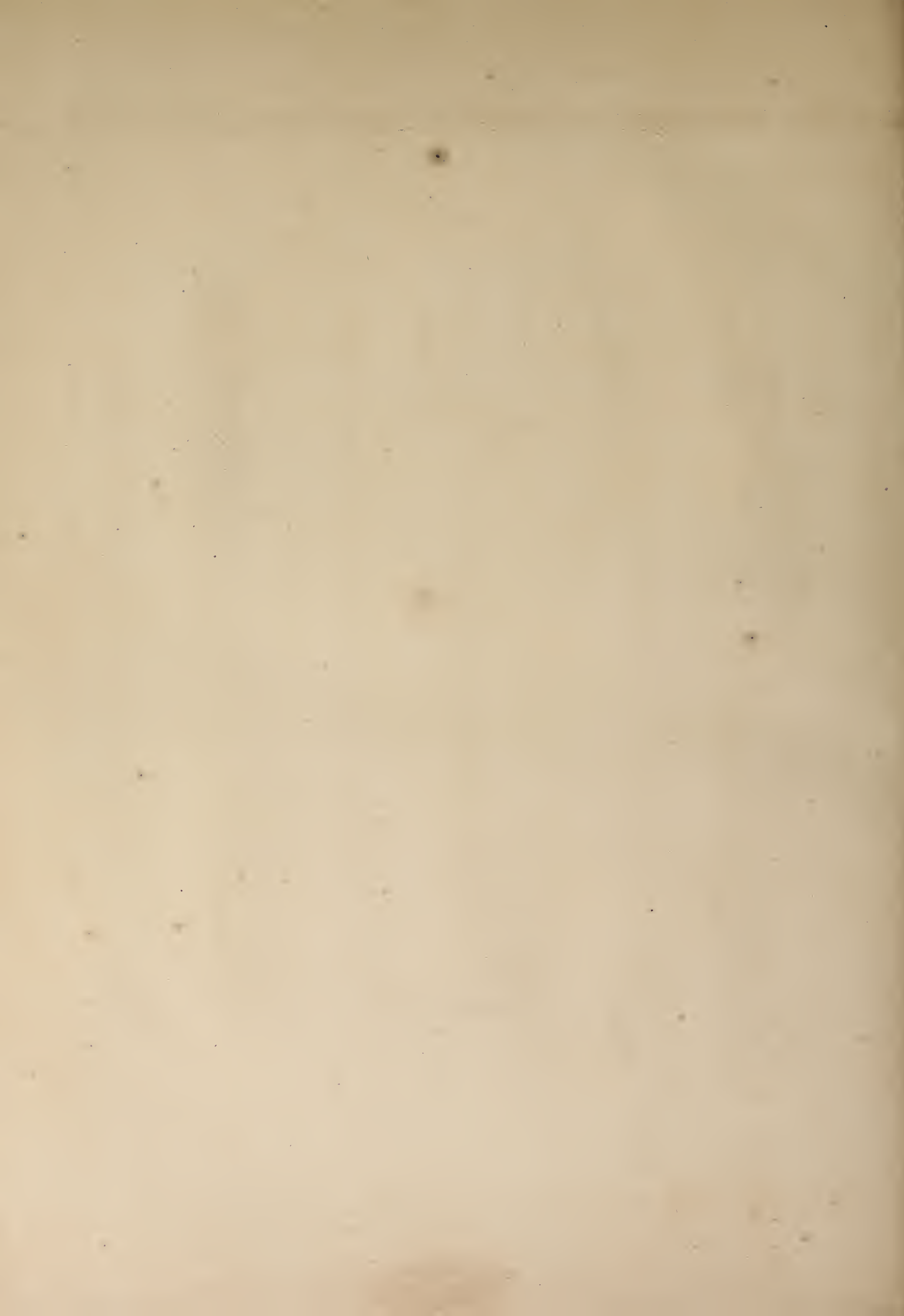
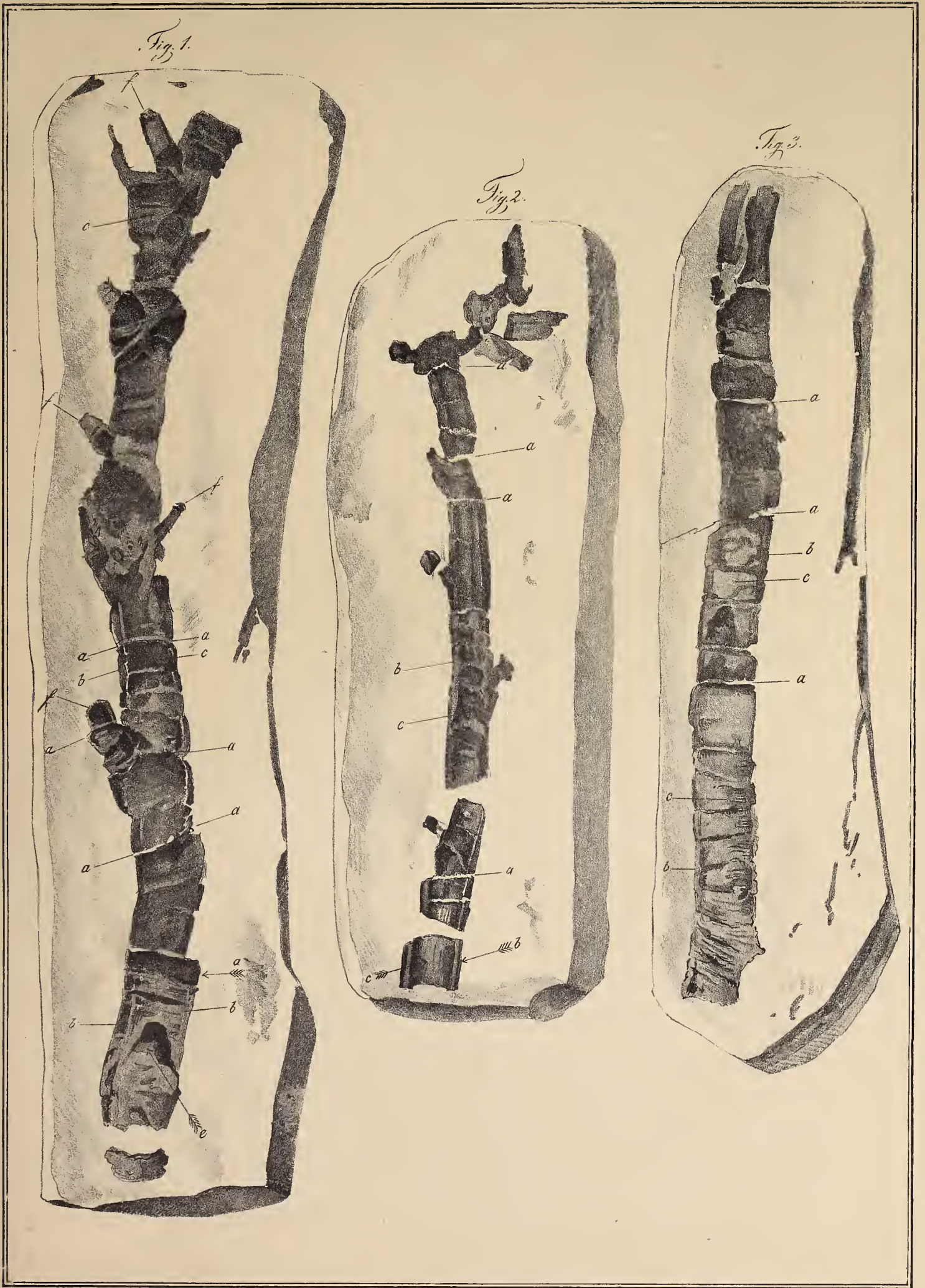



Fig. 1. 2. 3. Aularthrophycus formosum Massal.

Massal. del.

Fig.ª 1.ª Araucarites ambiguus. Massal.
Fig.ª 2.ª 4.ª Araucarites ambiguus β brachyphylladus. Massal. Fig.ª 3.ª indet.

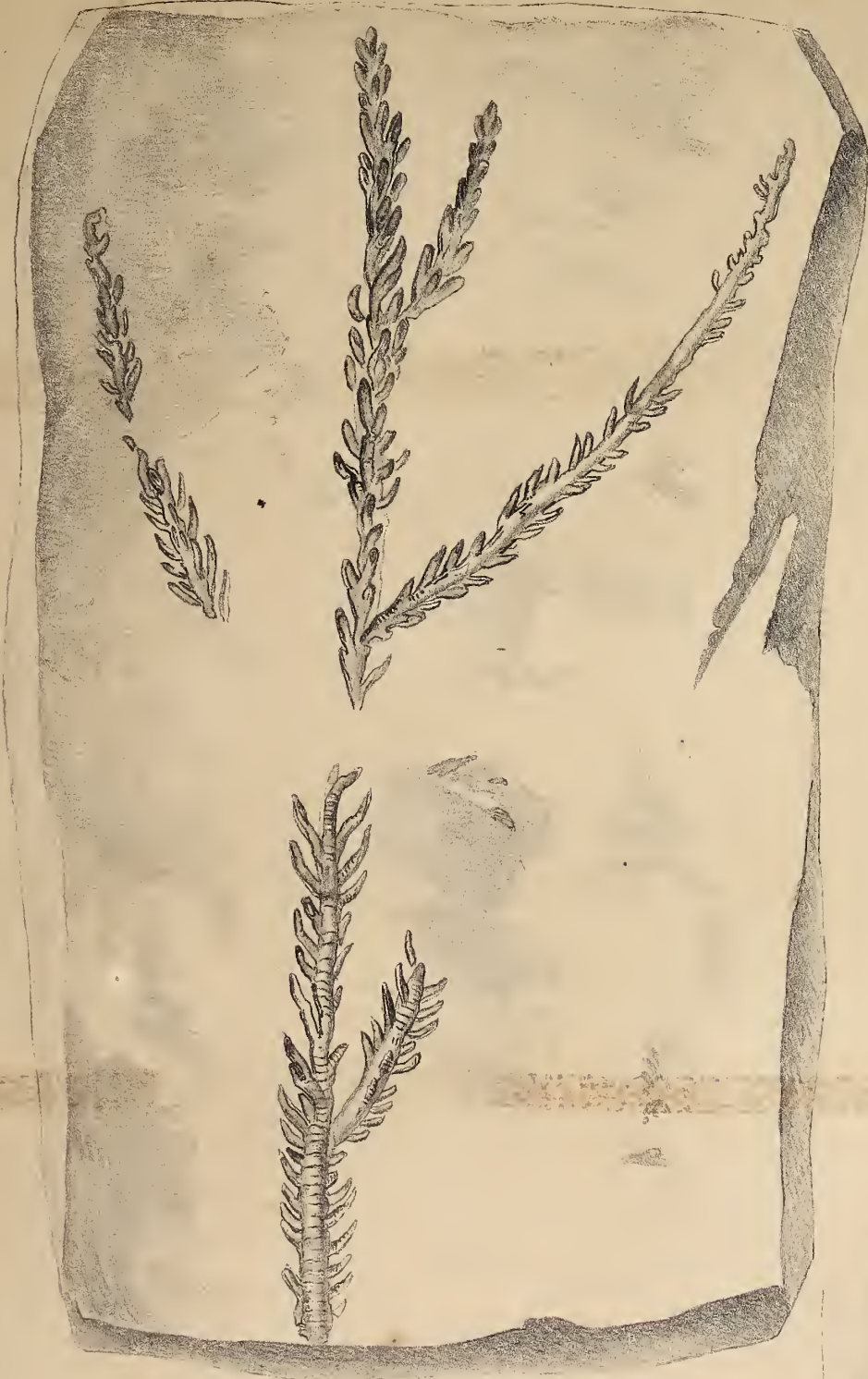
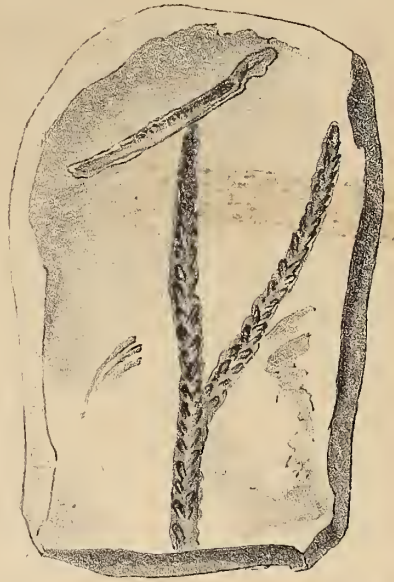
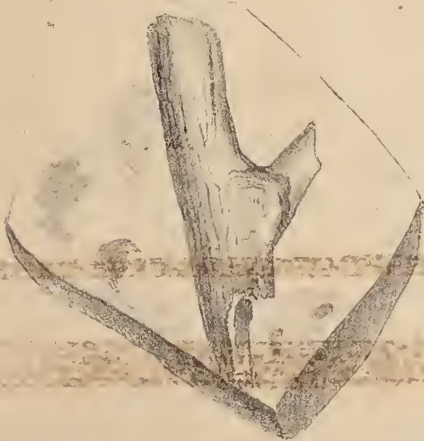



Fig. 1. Araucarites ambiguus, Massal. Fig. 2. 3. 7. Araucarites ambiguus var. brachyphylloides Massal.

Fig. 4. 6. Myrica salicina Ung. Fig. 5. Pyrus minor Ung.

Massal. del. Venezia. Lit. N. Fontana

Fig. 1. 2. 3. — Aularthrophyton formosum Massal.

VENEZIA

NEL PRIV. STABIL. DI G. ANTONELLI

1857.